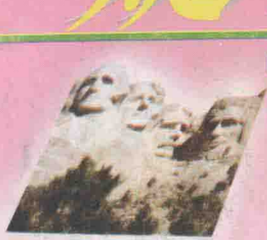
唐万林
郭丽坤 主编

重点 难点 疑点 学习手册

ZHONGDIAN
NANDIAN
YIDIAN
XUEXISHOUCE



代数

初二

东北师范大学出版社

重点难点疑点学习手册

代　数

初　二

唐万林　郭丽坤　主编

东北师范大学出版社

(吉)新登字 12 号

主编:唐万林　郭丽坤
编者:赵莉红　公宝珍　杨丽华
赵桂森　陈　敏　齐守礼
王　学

重点难点疑点学习手册
代　数
DAI SHU
初　二
唐万林　郭丽坤 主编

责任编辑:刘兆辉	封面设计:李冰彬	责任校对:江　萩

东北师范大学出版社出版
(长春市斯大林大街 110 号)
(邮政编码:130024)
吉林省新华书店发行
吉林工业大学印刷厂制版
东北师范大学印刷厂印刷

开本:787×1092 毫米 1/32
印张:7.25
字数:170 千
1996 年 5 月第 1 版
1996 年 5 月第 1 次印刷
印数:00 001—10 000 册

ISBN 7-5602-1813-X
G·890
本册定价:6.90 元
全套定价:41.40 元

出版说明

为了帮助广大师生更好地把握教材，准确、扎实地掌握教材中的重点，化解难点，消除疑点，培养学生的学习能力，发展其思维能力，提高其素质，我们组织部分省、市、县的教研员和第一线的特级、高级教师编写了这套丛书。

这套丛书共38册，覆盖了初中和高中语文、英语、历史、代数、几何、物理、化学诸科课程。

这套丛书严格依据国家教委制定的《全日制中学各科教学大纲》和全国统一教材编写。对重点、难点的确定，既考虑到大纲和教材的要求，又考虑到教学的实际情况，同时又使之形成一定的系统。对重点、难点的解析力求准确、清晰、简明、透彻。疑点主要是从启发学生思维，培养学生的质疑问难精神出发提出的，问题新颖，答疑注重比较和引申，拨云见日。

这套丛书编写的指导思想是突出其实用性，强调其科学性、针对性和新颖性。

书中除“重点、难点、疑点”及其解析外，还设有“典型例题解析”、“典型错解剖析”、“反馈练习”、“综合测试题”、“参考答案”等部分。

“重点、难点、疑点解析”针对教材中的重点、难点及学生学习过程中的疑点进行提炼并详细地解释、

说明。

“典型例题解析”围绕重点、难点选择有代表性的典型题为例子进行具体分析，以加深对重点、难点的理解，并指明思路，教给方法，培养学习能力。

“典型错解剖析”针对学生学习中常见的错误、易混淆的知识，通过剖析典型错例，明确错误根源，以防患于未然。

“反馈练习”按章节或单元进行编写，突出重点、适当加些难点内容，题型新颖多样，既便于阶段反馈检测，又有利于提高学生的分析问题、解决问题的能力。

“综合测试题”基本上按每个学期一套编拟，既突出重点，又考虑覆盖面，可作为检测和反馈所学知识之用。

在保持整套丛书体例基本一致的前提下，根据各科教材体系和实际情况，对上述各部分适当地进行了某些局部调整。

东北师范大学出版社

目　　录

第八章　因式分解

本章的内容是多项式因式分解中一部分最基本的知识和基本的方法，它包括因式分解的有关概念，整式乘法和因式分解的区别和联系。因式分解的四种基本方法即：提公因式法、运用公式法、分组分解法和十字相乘法。

【重点、难点、疑点解析】

重　点

本章重点是因式分解的四种基本方法。

1. 提公因式法是因式分解的最基本的也是最常用的方法。其理论依据是乘法分配律。运用这个方法，首先要对欲分解的多项式进行观察，提出字母系数的公因数以及公有字母或公共因式中的最高公因式。

例 1　把下列各式分解因式。

(1) $15x^3y^2+5x^2y-20x^2y^3$

(2) $-ab(a-b)^2+a(b-a)^2-ac(a-b)^2$

分析：首先观察(1)是由三项组成的且系数 15、5、20 的最大公因数是 5。公有字母的最高公因式（所有公因式中次数最高的一公有字母中次数最低的）是 x^2y。因此三项的最高公因式是 $5x^2y$。

解　(1)　$15x^3y^2+5x^2y-20x^2y^3$

$$=5x^2y\cdot 3xy+5x^2y\cdot 1-5x^2y\cdot 4y^2$$

$=5x^2y(3xy+1-4y^2)$

分析:观察(2)可知多项式是由三项组成,其公有字母是 a,另外,由于 $(a-b)^2=(b-a)^2$,所以公有因式还有 $(a-b)^2$。

(2) $-ab(a-b)^2+a(b-a)^2-ac(a-b)^2$

$=-a(a-b)^2\cdot b+a(a-b)^2\cdot 1-a(a-b)^2\cdot c$

$=-a(a-b)^2(b-1+c)$

注意:多项式的第一项的系数是负的,一般要提出负号,使括号内第一项的系数是正的。在提出"－"号时,则括号内的各项都要变号。

2. 关于运用公式法,教材讲了最常用的五个公式。运用公式法的关键是熟悉各公式的形式和特点。对于初学者来说,如何根据要分解的多项式的形式和特点,来选择运用公式。请看本章例题已指明思路并交待了方法。

3. 分组分解法,是前两种方法的综合运用。教材中分两类,一类是分组后能直接提公因式,一类是分组后能运用公式的。由于多项式的形式各异,分组的方法也有所不同,要根据具体问题具体分析;并要预见到分组后分解整个多项式的可能性。

例 2 把下列各式分解因式。

(1) $a^2+ab-ac-bc$ (2) $x^3-8y^3-x^2-2xy-4y^2$

分析:(1)题分组方法较灵活,按前两项与后两项分组,可得 $a(a+b)-c(a+b)$ 这样可再提公因式 $(a+b)$,得 $(a+b)(a-c)$。如果第一项与第三项、第二项与第四项分组,可得 $a(a-c)+b(a-c)$,这样也可再提公因式 $(a-c)$,得 $(a-c)(a+b)$。两种分组方法得到同一结果。如果第一、四项为一组,第二、三项为一组,则无法继续往下分解因式。

解 (1) $a^2+ab-ac-bc$

$=(a^2+ab)-(ac+bc)$（注意后两项提“$-$”号）

$=a(a+b)-c(a+b)$（两组分别提公因式）

$=(a+b)(a-c)$（再提公因式$(a+b)$）

分析：(2)题由5项构成，把前两项作为一组是一个立方差公式：$x^3-8y^3=[x^3-(2y)^3]=(x-2y)(x^2+2xy+4y^2)$；把后三项作为一组，即$-x^2-2xy-4y^2=-(x^2+2xy+4y^2)$，那么还有公因式$(x^2+2xy+4y^2)$。因此可继续分解因式。

(2)　$x^3-8y^3-x^2-2xy-4y^2$

$=(x^3-8y^3)-(x^2+2xy+4y^2)$

$=(x-2y)(x^2+2xy+4y^2)-(x^2+2xy+4y^2)$

$=(x^2+2xy+4y^2)(x-2y-1)$

注意：后三项作为一组，需提取公因式“-1”，括号内各项要变号。

4. 十字相乘法是适用于某些二次三项式的一种方法。教材中分两个层次编排这部分内容，第一层是二次三项式的二次项系数是1的情况，第二层是二次三项式的二次项系数不为1的情况。这样层次分明，条理清楚。

难　点

1. 运用公式法中，根据被分解多项式的特点，选择什么样的公式，往往不很容易，这是难点之一；

2. 分解因式的方法多，变化技巧性较高，这是本章的难点。

因为应用提公因式法时，当提出的公因式符号为负号时，括号内各项的符号极易出现失误；灵活运用公式和公式的变形，根据多项式的特点选择所需公式，有一定难度。应用分组分解法时，由于多项式复杂，分组方法也不同，但其指导思想是分组的目的在于预见整个多项式有进一步分解的可能性，

这种“预见性”也是有一定难度。十字相乘法中的二次项系数与常数项的分解,及交叉乘积之和,学生开始时把握不准,其实分解过程是二项式竖式乘法的逆转,这种思考方法学生感到困难。

【典型例题解析】

例 1 判断下列多项式从左到右的变形是不是因式分解?

(1) $a^3-3a^2+2a+1=a(a-1)(a-2)+1$

(2) $a^2x-bx+cx=x(a^2-b+c)$

(3) $-2p+4p^2-10pq=-2p(1-2p)-10pq$

(4) $x^3-3x^2y+3xy^2-y^3=(x-y)(x-y)(x-y)$

(5) $2t^2-3t+1=\frac{1}{t}(2t^3-3t^2+t)$

分析:判断多项式从左到右的变形是不是因式分解,首先看多项式是否化为几个整式的积的形式。

解:(2)、(4)是因式分解:(1)、(3)、(5)均不是因式分解。

判断多项式是否为因式分解需注意:

(1)因式分解不是加、减、乘、除、乘方、开方的运算,而是把多项式由一种形式变成另一种形式。

(2)一个多项式的变形是不是因式分解,关键要看变形后的多项式是否为几个整式的乘积。整式可以是单项式,也可以是多项式。像(5)中$\frac{1}{t}$便不是整式。虽然变形后是乘积运算,但不是整式的乘积运算也不是因式分解。

(3)因式分解是一种恒等变形,因式分解正好与整式乘法相反,检验因式分解的结果是否正确,可以利用整式乘法运算看是否与原多项式相等。相同因式之积应写成幂的形式。

例 2 指出下列各多项式的公因式。

(1) $7ab-6abc+10abc^2$ (2) $5p^2q^2+6p^4q^4+8p^6q^6$

(3) $3x^2y+6x^2y^2+12xy^2$ (4) $nx^2-ny^2+nz^2$

(5) $4(S+t)^2+6(S+t)^2-2S-2t$

(6) $3(x-y)^2-6(y-x)^3+9(x-y)$

分析：根据公因式的定义，找出多项式中的公因式，即各项中都含有的因式。

解：(1) ab (2) p^2q^2 (3) $3xy$ (4) n

(5) $2(S+t)$ (6) $3(x-y)$或$3(y-x)$

确定公因式时，要对多项式进行分析，注意以下几点：

(1)若多项式的系数都是整数，应将各系数绝对值的最大公因数提出，作为公因式的系数，如(3)、(5)、(6)中各提出 3、2、3。

(2)若多项式的各项都是单项式，应将各项都含有的字母的最低次幂作为公因式的字母因数，如(1)、(2)、(3)、(4)中的ab、p^2q^2、xy、n。

(3)在已知多项式中，若含有多项式与单项式或多项式与多项式的积时，如(5)、(6)中$(S+t)$、$(x-y)$或$(y-x)$，要把它看作一个整体来处理。由于$x-y=-(y-x)$，$(x-y)^2=(y-x)^2$，$(x-y)^3=-(y-x)^3$，因此在确定公因式时应先适当变形，然后再确定公因式，如(5)、(6)题。

(4)所确定的公因式分解因式之后不能再有公因式。

例 3 填空：

(1) $\pi R^2+2\pi R+\frac{4}{3}\pi R^3=\pi R$ (________)

(2) $\frac{1}{5}p^2q+\frac{1}{25}pq^2=$________$(5p+q)$

(3) $32(m+n)-12(m+n)^2+20(m+n)^3=$________

$[8-3(m+n)+5(m+n)^2]$

分析:多项式从左到右的变形应是因式分解的形式,(1)给出了公因式,(2)、(3)是填公因式。

解: (1) $(R+2+\frac{4}{3}R^2)$ (2) $\frac{1}{25}pq$ (3) $4(m+n)$

注意:在(1)中,提出公因式后,要求另一个因式,可通过除法来确定,即用已知多项式除以公因式所得的商即为另一个因式。在(2)、(3)中,给出了另一个因式,要求公因式,可通过多项式与另一个因式的对应项相除,得到同一个因式,即为公因式。

例 4 用提公因式法分解因式:

(1) $2xy^2-10x^2y-6x^2y^2$ (2) $3a^2bc^3-15ab^2c+9a^2bc$

分析:分解因式首先考虑提公因式,提公因式的关键是寻找公因式。先找各项系数的最大公约数,再找各项相同字母的最低次幂。然后把它们相乘,即为公因式。本题公因式为 $2xy$ 和 $3abc$。

解: (1) 原式$=2xy(y-5x-3xy)$

(2) 原式$=3abc(ac^2-5b+3a)$

注意:用提公因式法分解因式时,要正确找出公因式,还要把单项式因式写在前面。

例 5 用提公因式法分解因式:

(1) $4S+16t+32$ (2) $28x^2y^2-56x^3y^3+84x^4y^4$

分析:找多项式中的公因式要注意各项的系数与相同字母的次数,因此,各题的公因式分别为 4、$28x^2y^2$。

解: (1) 原式$=4(S+4t+8)$

(2) 原式$=28x^2y^2(1-2xy+3x^2y^2)$

注意:多项式各项之间的公因式可以是一个数,一个字

母、一个单项式。

例 6 用提公因式法分解因式：

(1) $x(a+b)-y(a+b)$

(2) $3(x+y)+7(y+x)^2-9(y+x)^3$

分析：找上述多项式的公因式时，需将$(a+b)$、$(x+y)$、$(y+x)$看作一个整体来考虑。

解： (1)原式$=(a+b)(x-y)$

(2)原式$=(x+y)[3+7(y+x)-9(y+x)^2]$

$=(x+y)(3+7x+7y-9x^2-18xy-9y^2)$

注意：多项式的公因式可以是一个多项式，这个多项式应是各项中次数最低的。

例 7 用提公因式法分解因式：

(1)$p(x-y)-q(y-x)$　　(2)$x(x-y)^2-y(y-x)$

分析：在找各项的公因式时，需注意 $x-y$ 与 $y-x$ 的符号区别。

解： (1)原式$=(x-y)(p+q)$或$-(y-x)(p+q)$

(2)原式$=(x-y)(x^2-xy+y)$或$(y-x)(xy-x^2-y)$

注意：两题中，用 $x-y$ 和 $y-x$ 作为公因式，另一个因式的符号恰好相反。

例 8 用提公因式法分解因式：

(1) $-9x^2+36xy+63xy^2$

(2) $-2x(a+b)-8y(b+a)+24xy(a+b)$

分析：多项式的第一项为负号，为了使第一项为正，可将负号提到多项式前面，再考虑求公因式。这时，需注意改变其他各项的符号。

解： (1) 原式$=-9x(x-4y-7y^2)$

(2) 原式$=-2(a+b)(x+4y-12xy)$

注意：为了使多项式的首项系数为正，在提公因式时，当第一项为负号时，把负号提出来作为公因式系数的符号，提出公因式后，要改变其他各项的符号。

例 9 用提公因式法分解因式：

(1) $-4ab-\frac{1}{2}bc+\frac{1}{8}abc$ (2) $12S^2-3.5St-20S^2t^2$

分析：多项式的各项系数有分数，有小数，在找公因式时要将小数化为分数，然后再看系数是否有公因数。

解： (1) 原式$=-b(4a+\frac{1}{2}c-\frac{1}{8}ac)$

(2) 原式$=2S(6S-\frac{7}{4}t-10St^2)$

注意：系数的公因数一般是对整数而言的，(1)题若写成$-\frac{1}{2}b(8a+c-\frac{1}{4}ac)$也可以。

例 10 用提公因式法分解因式：

(1) $2x(a+b)-4x(a+b)^2$ (2) $x^6-3x^4-x^3$

分析：经过观察发现，公因式恰是多项式中的某一项。

解： (1) 原式$=2x(a+b)(1-2a-2b)$

(2) 原式$=x^3(x^3-3x-1)$

注意：当提出公因式 $2x(a+b)$ 和 x^3 时，多项式的各项除以公因式所得的商为 1 时，不要漏写。

例 11 用提公因式法分解因式：

(1) $(9S+8t)(3x-y)^2-(4S+3t)(y-3x)^2$

(2) $(2a+5b)(m-n)+(n-m)(3b-2a)$

(3) $(x+y)(5x-3y)-(x+y)(5x+3y)$

分析：此题中的各公因式均为多项式，$3x-y=-(y-3x)$，$m-n=-(n-m)$，故公因式可选 $3x-y$、$m-n$，也可选 $y-3x$、$n-m$。

解： (1) 原式$=(3x-y)^2(9S+8t-4S-3t)$

$=5(3x-y)^2(S-t)$

(2) 原式$=(m-n)(2a+5b-3b+2a)$

$=2(2a+b)(m-n)$

(3) 原式$=(x+y)(5x-3y-5x-3y)$

$=-6y(x+y)$

注意：当提出公因式后，对另一个因式要进行整理，合并同类项，化简后如为单项式，则要写在前面。如整理后仍有公因式，则要继续提取公因式，直到每个因式不能再分解为止，如(1)、(2)题。

例 12 用提公因式法分解因式：

$(b-a)(z-y-x)-(a-b)(2x+y-z)-(a-b)(y-2x)$

分析：若以$(a-b)$为公因式，多项式中括号外的符号大多数为负号。因此，应以$(b-a)$为公因式，避免负号过多出错。

解： 原式$=(b-a)(z-y-x+2x+y-z+y-2x)$

$=(b-a)(y-x)$

注意：提出公因式后整理另一个因式时，要注意符号的改变。另外，若按英文字母表的顺序作字母排列，可将(2)的结果的乘积中各提出-1，最后结果得$(a-b)(x-y)$。

例 13 用提公因式法分解因式：

(1) $8(2a+b)^3+12a(2a+b)^2$

(2) $15a(2m-n)^2-27b(n-2m)^2-18c(n-2m)$

分析：这两题各项的系数有公因数 4 和 3，然后再找相同因式的最低次幂。确定公因式，再提取公因式进行因式分解。

解： (1) 原式$=4(2a+b)^2\cdot 2(2a+b)+4(2a+b)^2\cdot 3a$

$=4(2a+b)^2(4a+2b+3a)$

$$=4(2a+b)^2(7a+2b)$$

(2) 原式 $=3(2m-n)[5a(2m-n)-9b(2m-n)+6c]$

$$=3(2m-n)(10am-5an-18bm+9bn+6c)$$

注意:为了寻找公因式方便,可利用(1)题的方法把各项系数分解,然后确定系数的最大公约数。

例 14 用提公因式法分解因式:

(1) $x^{n+3}-3x^{n+2}+x^n$ (2) $5x^{m+2}+10x^2-20x^{m+1}$

分析:由于 $x^{n+3}=x^n\cdot x^3$。$x^{m+2}=x^m\cdot x^2$,确定公因式应找出关于字母 x 的最低次幂。

解: (1) 原式 $=x^n(x^3-3x^2+1)$

(2) 原式 $=5x^2(x^m+2-4x^{m-1})$

注意:在注意字母 x 的最低次幂同时,还要注意另一因式中字母的次数变化,如(2)中的 x^{m-1}。

例 15 用提公因式法分解因式:

(1) $(x+y)^n+(x+y)^{n-1}+(x+y)^{n-2}$

(2) $(a-b)^n-(a-b)^{n-1}-(a-b)^{n+1}$

分析:多项式各项均为多项式,且指数与 n 有关,这时,要找多项式的最低次幂需根据 n 的情况而定。

解: (1) 原式 $=(x+y)^{n-2}[(x+y)^2+(x+y)+1]$

$$=(x+y)^{n-2}(x+2xy+y^2+x+y+1)$$

(2) 原式 $=(a-b)^{n-1}[(a-b)-1-(a-b)^2]$

$$=(a-b)^{n-1}(a-b-1-a^2+2ab-b^2)$$

注意:在提取公因式后,求另一个因式时需利用同底数幂相除的法则进行计算。

例 16 利用因式分解计算:

(1) $6\times0.125+9\times0.125+12\times0.125$

(2) $5.98\times25.5-(30-45)\times3.68-1.7\times25.5$