建筑结构损伤识别

——解析法

王居林　李峰　编著

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

建筑结构损伤识别
——解析法

王居林　李　峰　编著

机 械 工 业 出 版 社

本书系统地阐述了建筑结构损伤识别解析法的基本原理、数值方法及其计算机的实现。

全书分为7章，第1章为基本部分，介绍了解析法的基础理论，包括损伤理论、结构的动力特性、结构动力响应的算法和损伤参数反演理论等；第2~6章为专题部分，包括解析法的基本原理、优化方法以及计算机的实现；第7章为结构损伤识别的正问题求解，可进一步验证解析法的可行性。

本书反映了结构基于动力响应损伤识别的发展水平，书末附有解析法的计算机实现程序。本书可作为土建、水利等专业教师和工程技术及科研人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

建筑结构损伤识别：解析法 / 王居林，李峰编著. —北京：机械工业出版社，2013.11

ISBN 978-7-111-44358-2

Ⅰ.①建… Ⅱ.①王… ②李… Ⅲ.①建筑结构—损伤—识别 Ⅳ.①TU311

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 242673 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号 邮政编码100037）
策划编辑：覃密道 责任编辑：覃密道 常金锋
版式设计：霍永明 责任校对：陈立辉
封面设计：路恩中 责任印制：乔 宇
北京汇林印务有限公司印刷
2014年1月第1版第1次印刷
169mm×239mm · 8.5印张 · 151千字
标准书号：ISBN 978-7-111-44358-2
定价：25.00元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务	网络服务
社服务中心：(010)88361066	教材网：http://www.cmpedu.com
销售一部：(010)68326294	机工官网：http://www.cmpbook.com
销售二部：(010)88379649	机工官博：http://weibo.com/cmp1952
读者购书热线：(010)88379203	**封面无防伪标均为盗版**

前　言

建筑物在生命周期的全过程中一般受到多个因素的作用，其中地震和强风是引起结构损伤的主要因素。结构的损伤无疑对建筑物在后期中的抗力和剩余寿命产生重大的影响。而建筑结构都是按照力学原理设计的，没有生命，不能感知自然灾害的作用，从而不能作出适当响应以保护自己。因此，建筑结构的损伤诊断成为工程结构领域中的重要研究课题之一。

目测法、无损检测法和静力参数诊断法是检测结构损伤的常用传统方法。目测法具有直观、简便、费用低等优点，但需要检测人员富有经验，且损伤可视化。无损检测如X光检测、超声波检测等属于结构局部损伤检测方法，只能用于损伤位置确定的结构。此外，这类技术还要特殊的测试设备和专业人员，往往测试工作量大，而且不能实现在线监测和整体损伤检测。静力参数诊断法通过在结构上施加静力荷载，建立静力平衡方程，根据实测结果得到静力参数。静力测试能较准确地获得结构变形或应变等，但由于试验条件要求很高，现场工作量大，无法做到实时监控。此外，当受损结构在特定荷载作用下变形几乎未受影响时，要获得理想的诊断结果很困难，仅通过结构的静力测试信息来进行有限元模型修正，难以保证误差。

上述方法的缺陷及结构日益向大型化、复杂化发展，客观上促使基于动力响应损伤识别方法的产生、发展。这种方法的基本原理是：利用结构动力响应的实测数据，通过系统参数识别技术得到结构参数的变化，从而诊断出结构是否存在损伤以及损伤的位置和程度。一般将结构参数的识别值与结构无损状态时相应值间的显著差异作为损伤的标志，并通过建立损伤与结构参数的关系确定损伤的部位和程度。

近十年来，作者一直从事结构可靠度方面的研究，在本书中提出并系统地阐述了建筑结构损伤识别的解析法，用以分析大型结构在地震、冲击等破坏载荷作用下的损伤。最后，在 Visual Fortuan 编译环境下编制和开发了

NLAMETH 程序，便于解析法在计算机上进行数值分析计算。

由于作者水平有限，难免存在不足和不妥之处，恳请读者和同行专家批评指正。

编　者

2013 年 7 月

目　　录

第 1 章　基础理论知识

本章主要介绍解析法涉及的一些基础理论知识，便于对后面章节的理解。

1.1　损伤理论

由建筑的损伤特点，认为结构存在的损伤为各向同性损伤，采用几何损伤理论建立损伤本构方程。

几何损伤理论认为损伤造成的实际承载面积的减少是材料劣化的主要原因。一维情况下，假定有一受单轴拉伸的试件，受拉力 P，存在损伤 D，截面积为 A，构件可分为不考虑损伤的无损构件、考虑损伤的损伤构件与虚拟无损构件，虚拟无损构件的有效承载面积为 A^*。

无损构件的表观应力 σ 为：

$$\sigma = \frac{P}{A} \tag{1-1}$$

损伤 D：

$$D = 1 - \frac{A^*}{A} = \frac{A - A^*}{A} = \frac{\Delta A}{A} \tag{1-2}$$

虚拟无损构件中，有效应力 $\tilde{\sigma}$ 与表观应力 σ 的关系为：

$$\tilde{\sigma} = \frac{P}{A^*} = \frac{P}{(1-D)A} = \frac{\sigma}{1-D} \tag{1-3}$$

J. Lemaitre 在 1971 年提出了应变等价性假说，认为应力作用在受损材料上引起的应变与有效应力作用在无损材料上引起的应变等价。由这一原理，受损结构的本构关系可通过无损结构本构关系中的表观应力改为受损材料的有效应力而获得。计算中将每个构件当成弯曲梁，按单元处理，其应力矩阵与广义位移矩阵分别为：

$$\{P_i\} = [N_{xi} \quad N_{yi} \quad N_{zi} \quad M_{xi} \quad M_{yi} \quad M_{zi}]^T \tag{1-4}$$

$$\{\delta_i\} = [u_i \quad v_i \quad w_i \quad \theta_{xi} \quad \theta_{yi} \quad \theta_{zi}]^T \tag{1-5}$$

单元横截面积为 A，xz 面内截面惯性矩为 I_z，xy 面内截面惯性矩为 I_y，单元扭转惯性矩为 J，长度为 L，弹性模量为 E，泊松比为 μ，剪切模量 $G =$

$E/2(1+\mu)$。则无损构件力与位移的本构方程为：

$$\{P_i\} = [K^e]\{\delta_i\} \tag{1-6}$$

设该单元存在损伤 D_i，则损伤构件的本构方程为：

$$\{\widetilde{P}_i\} = [K^e]\{\delta_i\} \tag{1-7}$$

式（1-7）中，$\{\widetilde{P}_i\}$ 为有效杆端力，$\{\widetilde{P}_i\} = \dfrac{\{P_i\}}{1-D_i}$，由式（1-6）和式（1-7）可以得到损伤单元的本构方程：

$$\{P_i\} = (1-D_i)[K^e]\{\delta_i\} = [\widetilde{K}^e]\{\delta_i\} \tag{1-8}$$

式（1-8）中，$[\widetilde{K}^e] = (1-D_i)[K^e]$，$[K^e]$ 见式（1-9）。

$$[K^e] = \begin{bmatrix}
\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & \frac{-12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} \\
 & & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{-12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{-6EI_y}{L^2} & 0 \\
 & & & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-GJ}{L} & 0 & 0 \\
 & & & & \frac{4EI_y}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_y}{L} & 0 \\
 & & & & & \frac{4EI_z}{L} & 0 & \frac{-6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{L} \\
 & & & & & & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & \text{对} & & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{-6EI_z}{L^2} \\
 & & & & & & & & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 \\
 & & & & & & & & & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & \text{称} & & \frac{4EI_y}{L} & 0 \\
 & & & & & & & & & & & \frac{4EI_z}{L}
\end{bmatrix} \tag{1-9}$$

1.2 结构的动力特性

1.2.1 体系的自由度

在动力问题中，需要考虑质量的惯性力，因此对结构进行动力分析时，必须

确定结构质量的分布情况及其在振动中的位置。结构在振动过程中，质量在任一瞬时的几何位置可以用独立的几何参数来确定，其参数的数目称为体系的振动自由度。只有一个集中质量 A 的体系在振动过程中，质量 A 处有三个位移分量：杆的轴向位移 u，竖向位移 v 及转角 θ，质量在任一瞬时的几何位置可由 u、v、θ 确定，如不计杆件本身的质量，则该体系有 3 个自由度，称为 3 自由度体系。

1.2.2 结构的动力方程

如果结构为 n 自由度体系，则它的动力分析可归结为在一定条件下求解下列常微分方程组：

$$\boldsymbol{MU}'' + \boldsymbol{CU}' + \boldsymbol{KU} = \boldsymbol{P} \tag{1-10}$$

这个微分方程组就是结构动力方程。式中 $\boldsymbol{M}$、$\boldsymbol{C}$、$\boldsymbol{K}$ 分别为结构的质量矩阵、阻尼矩阵及刚度矩阵；$\boldsymbol{U}$、$\boldsymbol{U}'$、$\boldsymbol{U}''$及 $\boldsymbol{P}$ 分别为 n 维位移向量、速度向量、加速度向量及干扰力向量，它们是时间 t 的函数。

动力分析有限元中，质量阵的形成可采用集中质量法和一致质量法。

集中质量法把分布质量集中到单元的结点上，得到的质量阵为集中质量矩阵。这些质量与单元的移动和转动惯性有关，并且假设各个广义位移之间不存在动力耦合。这样得到的单元质量矩阵是一个对角矩阵，对于具有 n 自由度的单元，其一般形式为：

$$\boldsymbol{M} = \mathrm{diag}(m_1,\ m_2,\ \cdots m_i, \cdots, m_n) \tag{1-11}$$

式（1-11）中，m_i代表结点 i 的集中质量。

一致质量法根据静力分析所采用的位移模式导出的单元质量矩阵，称为一致质量阵。沿用静力分析的形函数矩阵［N］，按照虚功原理将惯性力移置到结点上，得到等效的结点惯性力：

$$\{F_i\} = \int_V [N]^T \{P_i\} \mathrm{d}V = -[M]\ \{\delta''\}^e \tag{1-12}$$

其中：
$$\boldsymbol{M} = [M] = \int_V [N]^T \rho [N] \mathrm{d}V \tag{1-13}$$

式（1-13）就是一致质量矩阵。

1.2.3 结构动力特性

结构动力特性包括结构的自振频率、振型及阻尼，这里仅介绍自振频率和振型。

如果弹性体系处于无阻尼的自由振动状态，则式（1-10）变为下列形式：

$$\boldsymbol{MU}'' + \boldsymbol{KU} = \{0\} \tag{1-14}$$

式中，$\boldsymbol{U} = [u_1, u_2, \cdots, u_n]^T$。

如果结构作简谐振动，则：$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}^* \sin(\omega t + \alpha)$　　(1-15)

ω 为自振圆频率，U^* 为 U 的振幅向量。将式（1-15）代入式（1-14）得到：

$$(\boldsymbol{K} - \omega^2 \boldsymbol{M})\boldsymbol{U}^* = \{0\} \tag{1-16}$$

因 $\boldsymbol{U}^* \neq 0$，由式（1-16）可知 $\boldsymbol{U}^*$ 的系数行列式必须为零：

$$\det(\boldsymbol{K} - \omega^2 \boldsymbol{M}) = 0 \tag{1-17}$$

这个方程为频率方程，由此可求出 n 个自由度体系的 n 个自振频率 ω_k，$k = 1, 2, \cdots, n$。

当求得自振频率后，对每一个频率，利用式（1-16）可以确定一个相应的 U_k^*。由式（1-15）可知，对每一个振型都有特解：

$$\boldsymbol{U}_k = \boldsymbol{U}_k^* \sin(\omega_k t + \alpha_k) \tag{1-18}$$

由于式（1-16）是一个齐次线性方程组，因此只能求出位移振幅向量的比值。为表征不同的振型，需处理各质点的振幅向量以求得振幅向量相对值。将各个分量乘以任意常数，使之规准化，即：

$$\frac{1}{a_k^*}[u_{1k}^* \ u_{2k}^* \cdots \ u_{nk}^*]^T = [X_k(1) X_k(2) \cdots X_k(n)] = \boldsymbol{X}_k \tag{1-19}$$

式（1－19）中 a_k^* 是一个任意常数，X_k 称为规准化向量。由式（1-19）可得：

$$\boldsymbol{U}_k^* = a_k^* \boldsymbol{X}_k \tag{1-20}$$

根据所取常数 a_k^* 的不同，可得到不同的规准化向量，常用的有两种方法：

1）最大归一准则。这时 a_k^* 取最大值的 u_{ik}^*，即将各质点自由度中最大的振幅取作 1.0，其余按比例缩成小于 1 的值。

2）主质量归一准则。这时取 $a_k^* = \sqrt{m_k^*}$，其中 m_k^* 称为广义质量，即：

$$m_k^* = \boldsymbol{X}_k^T \boldsymbol{M} \boldsymbol{X}_k \tag{1-21}$$

1.3　结构的动力特性与响应的算法

1.3.1　结构动力特性的算法

体系的自由振动可分解为一系列简谐振动的叠加。由式（1-14）、式（1-15）、式（1-16）可得方程：

$$KU^* = \lambda MU^* \tag{1-22}$$

式（1-22）中 $\lambda = \omega^2$。这样，求结构无阻尼自由振动的解就化为求解满足方程（1-22）的 λ 和非零向量 U^*。方程（1-22）为特征方程，该问题变为特征方程求解的问题。

（1）行列式搜索法　行列式搜索法求解时所用的基本方法是：利用 Sturm 序列的性质，通过对称矩阵的三角分解计算矩阵的行列式值，用加速割线法求出靠近下一个未知特征值的移位，然后用移位逆迭代求特征向量，同时使特征值精化，遇到重根情况时，对特征向量施行格雷姆—施密特正交化，以保证不发生丢根。

$$P(\lambda) = \det(K - \lambda M) \tag{1-23}$$

$P(\lambda)$ 为特征方程（1-22）的特征多项式，它的零点即为特征方程的特征值。采用割线法求特征多项式的根，在求 λ_j 的近似值时，迭代所用的多项式为缩约的多项式 P_{j-1}（λ）：

$$P_{j-1}(\lambda) = \frac{P(\lambda)}{\prod_{i=1}^{j-1}[\lambda - \lambda_i(e+1)]} \tag{1-24}$$

然后使用逆迭代法求最小特征值，并移位逆迭代求各个特征值和特征向量。

（2）子空间迭代法　子空间迭代法的基本目的是求解特征方程的最低的 m 个（用户指定）频率以及相应的振型，基本的子空间迭代法主要有三个步骤：

1）取 q 个初始迭代向量（$q > m$）。

2）用 q 个向量同时逆代和分析得到特征值和特征向量的“最佳”的近似值。

3）在迭代收敛后，用 Sturm 序列检查去验证要求的特征值和特征向量已经得到。

这种方法相当于在 q 维子空间进行迭代，因此称为子空间迭代法，它是一种求解大型特征值问题的有效方法。

现求方程前 m 个振型，设初始振型为：

$$X_0 = [X_1(1)X_1(2)\cdots X_1(n)]^T \tag{1-25}$$

将 X_0 代入式（1-22）的右边作一次逆迭代，可得：

$$KX_1^* = MX_0 \tag{1-26}$$

利用式（1－26）求出 $X_1{}^*$ 后，把它作为瑞雷—李兹法的初始向量，可得：

$$K_1^* C_1 = \lambda M_1^* C_1 \tag{1-27}$$

$$K_1^* = X_1^{*\,T} K X_1^*,\ M_1^* = X_1^{*\,T} M X_1^* \tag{1-28}$$

由式（1-27）可求出 n 个 λ_i 及相应的特征向量 $C_1^{(i)}$，它们满足下列方程：

$$\boldsymbol{K}_1^* \boldsymbol{C}_1^{(i)} = \lambda_i \boldsymbol{M}_1^* \boldsymbol{C}_1^{(i)} \qquad i = 1,\ 2, \cdots, n \tag{1-29}$$

由此可得：

$$\boldsymbol{K}_1^* \boldsymbol{C}_1 = \boldsymbol{M}_1^* \boldsymbol{C}_1 \boldsymbol{\Omega}_1^2 \tag{1-30}$$

式（1－30）中 $\boldsymbol{\Omega}_1^2 = \mathrm{diag}(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\lambda_n)$，$\boldsymbol{C}_1 = [C_1^{(1)}\ C_1^{(2)} \cdots\ C_1^{(n)}]$，当 C_1 求出后，利用下列表达式可得新的振型矩阵。

$$\boldsymbol{X}_1 = \boldsymbol{X}_1^* \boldsymbol{C}_1 \tag{1-31}$$

上述计算过程为子空间迭代法的第一次迭代。经过循环迭代，第 k 步的迭代公式为：

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{X}_k^* = \boldsymbol{M}\boldsymbol{X}_{k-1} \tag{1-32}$$

$$\boldsymbol{K}_k^* = \boldsymbol{X}_k^{*\ T} \boldsymbol{K}\boldsymbol{X}_k^* \tag{1-33}$$

$$\boldsymbol{M}_k^* = \boldsymbol{X}_k^{*\ T} \boldsymbol{M}\boldsymbol{X}_k^* \tag{1-34}$$

$$\boldsymbol{K}_k^* \boldsymbol{C}_k = \boldsymbol{M}_k^* \boldsymbol{C}_k \boldsymbol{\Omega}_k^2 \tag{1-35}$$

$$\boldsymbol{X}_k = \boldsymbol{X}_k^* \boldsymbol{C}_k \tag{1-36}$$

在实际应用中，一般经过 2 ~ 3 次迭代，即可求得前面 2 个或 3 个振型逼近精确解。

1.3.2 结构响应的算法

（1）振型叠加法　若结构为 n 个自由度体系，则体系各质点的位移按规则化振型展开成下列形式：

$$u_i = X_1(i)y_1 + X_2(i)y_2 + \cdots + X_n(i)y_n \qquad i = 1,\ 2,\ \cdots, n \tag{1-37}$$

由此可得：

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{X}_1 y_1 + \boldsymbol{X}_2 y_2 + \cdots + \boldsymbol{X}_n y_n \tag{1-38}$$

式（1-38）中 $\boldsymbol{U} = [u_1 u_2 \cdots u_n]^T$，$\boldsymbol{X}_k = [X_k(1) X_k(2) \cdots X_k(n)]^T$，即：

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{Y} \tag{1-39}$$

式（1-39）中，$\boldsymbol{Y}$ 为广义坐标向量，$\boldsymbol{Y} = [y_1\ y_2 \cdots\ y_n]^T$。

若结构 n 个自振频率和振型向量已知，则结构动力方程可写为：

$$y_i'' + 2\xi_i \omega_i y_i' + \omega_i^2 y_i = \boldsymbol{X}_i^T \boldsymbol{P} \qquad i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n \tag{1-40}$$

式（1-40）就是振型叠加法的基本方程。式中 X_i 为第 i 个规准化振型向量，ω_i 为与第 i 振型对应的自振频率，ξ_i 为第 i 振型对应的阻尼比。

式（1-40）中，每一个方程只包含一个广义坐标，相当于一个单自由度体系的动力方程。由此，利用广义坐标可以将 n 个自由度体系的动力方程化为 n 个

单自由度体系的动力方程来求解，它们的自振频率分别等于 n 个自由度体系对应的自振频率。利用上式求出广义坐标 y_i 后，即可利用式（1-37）确定结构的位移、速度及加速度的动力响应。

由上述可知，求解结构动力响应的问题可归结为求 y_i 值的问题。上述求解方法称为振型叠加法。对于 n 很大的多自由度体系，一般只有少数的低阶振型起主要作用，而绝大多数的高阶振型可以忽略不计。振型叠加分析的有效性决定于在分析中必须包含的振型的数目，例如，地震荷载激起的有效振型较少，体系一般只有 2～3 个最低的振型起主要作用，可用振型叠加法分析；而冲击荷载激起的有效振型较多，一般不再采用振型叠加法，而采用下面介绍的直接积分法分析。

（2）直接积分法　直接积分法是将结构动力方程在数值上直接逐步积分的方法，而不转换成其他的形式。直接积分法主要基于两个思想：

1）在时间区间上进行离散，用差分代替微分，将任何时间 t 上都满足结构动力方程改为在离散的时间区间 t 上满足方程，问题就变为与静力问题相似，区别在于包含惯性力和阻尼力，静力问题的所有求解技术基本都可有效地用于直接积分。

2）假定了在每个时间区间内位移、速度、加速度的变化。

1.4　损伤参数反演理论

1.4.1　系统辨识与参数辨识

系统辨识是通过量测得到系统的输入和输出数据来确定描述这个系统的数学方程，即模型结构。基于对先验信息的了解程度，可以把系统辨识问题分为两类：“黑箱问题”与“灰箱问题”。

“黑箱问题”也称为完全辨识问题。这种情况下，被辨识系统的基本特征是完全未知的，要辨识这类系统很困难，目前尚无有效方法。

“灰箱问题”又称为不完全辨识问题。这类问题中，系统的某些基本特征是已知的，不能确切知道的只是系统方程的阶次和系数，参数辨识属于不完全辨识问题。

参数辨识是在模型结构已知的情况下，根据能够量测出来的输入和输出，来决定模型中的某些或全部参数。

根据问题性质及寻求准则函数极值点的算法不同，反演分析可分为“正法”和“逆法”两类。

正法是首先对待求参数指定“初值”，计算模型输出，然后和输出量测值比较，根据差别及一定的参数搜索方向修改参数值，计算模型输出值，重新比较，一直到准则函数达到极小，此时的参数值即为所求的参数。正法可以沿用现成的正问题计算方法和程序，并附加合适的优化搜索方法，因此应用广泛。

逆法是指将模型输出（量测输出值）表示成待求参数的显函数，利用这个函数关系反求待求参数，即求得正问题的显式反函数来求解。因逆法要对模型输入输出作一些处理，工作量较大，且正算方法和程序无法直接使用，因此，其只应用于模型较为简单的情况。

1.4.2 准则函数

进行参数辨识时，由于模型的近似性和量测误差的存在，若量测值的取量等于待求参数的个数，则根据由此列出的方程组求出的参数不能很好地反映整个系统的特征。那么，必须加大量测量，使量测的数量大大超过待求参数的个数，所得的方程组为矛盾方程组，通过适当的最优化方法可以求解这一问题，使得在某些条件下求得的参数最优。

最优准则称为准则函数，记为 J。常用的准则函数表示为实际输出量测值 $y(t)$ 和模型的输出 (t) 的偏差的某个函数，本书反演中采用平方和形式的准则函数：

$$J = \sum_{i=1}^{n} [y(t_i) - \eta(t_i)]^2 \tag{1-41}$$

式（1-41）中 n 为量测数量，$\eta(t_i)$ 是反演输入参数的函数，给定模型结构也就是知道了 $\eta(t_i)$ 的函数形式，t 是自变量，即待反演参量。

准则函数 $F(\boldsymbol{X})$：

$$F(\boldsymbol{X}) = \sum_{i=1}^{n} (\bar{f_i} - f_i(\boldsymbol{X}))^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} [\bar{\psi}_{ji} - \psi_{ji}(\boldsymbol{X})]^2 \tag{1-42}$$

式（1-42）中，$\boldsymbol{X}$ 为各处损伤值构成的向量，$\boldsymbol{X} = \{D_1, D_2, D_3, D_4, D_5, \cdots\}$；$n$ 为取用的频率、振型总数；m 为结构自由度数；$\bar{f_i}$ 为量测的第 i 阶频率；$f_i(\boldsymbol{X})$ 为损伤为 X 时正演计算的 i 阶频率；$\bar{\psi}_{ji}$ 为量测的 j 自由度 i 阶振型；$\psi_{ji}(\boldsymbol{X})$ 为损伤为 X 时正演计算的 j 自由度 i 阶振型。

当选用的模型确定后，$F(\boldsymbol{X})$ 达最小的参数值即为该模型的最优参数。实际上，这可以作为一个最优化问题处理，问题函数即为上面建立的准则函数。正法辨识中，需使用合适的优化方法以搜索最优参数。

1.4.3　优化方法

合适、高效的优化方法对于反演工作的成功、效率以及精度是很重要的。对无约束问题，常采用最小二乘法、单纯形法、变量替换法、Powell 法等；对于约束最优化问题，常采用混合罚函数优化法。近几年，很多学者采用遗传算法、神经网络法等智能反分析法寻求在全局空间上的最优值。本书的反演参数—损伤参数，是一个介于 0 和 1 之间的数，由损伤构件的表观状态，完全可以定出损伤参数大致所处的范围。例如某梁的损伤不大，不会超过 0.5，则可以将该梁的 D 定在 0 ~ 0.5 之间。

混合罚函数法是内点法与外点法相结合的包括等式约束与不等式约束的最优化方法。它将等式约束函数和不等式约束函数分别构成惩罚项，加到准则函数上，构成新的无约束准则函数，称为罚函数。这样，就把原准则函数的约束极小值问题转化为求罚函数的无约束极小值问题。

第 2 章　建筑结构损伤识别——线性解析法

本方法以损伤力学和结构动力特性分析的离散参数模型为基础，把频率和振型看作损伤参数的函数，经过泰勒展开获得频率、振型对损伤参数的一阶偏导数，然后构造以损伤参数为未知量的超定线代方程组，求解得到需要的损伤参数值。损伤参数不为零的构件即为损伤构件，否则为未损构件。另外，通过查看损伤构件的编号，可获得损伤位置，这样，达到了同时识别整个结构损伤的数量、位置和大小的目的。进一步通过自迭代修正技术，可大幅度提高识别精度。

2.1　基本理论

根据损伤力学理论，框架结构中第 i 根构件中拉压、弯曲、剪切刚度计入损伤系数时的表达式为：

$$\begin{cases}(EA)_i = (EA)_0(1 - D_i)\\(EI)_i = (EI)_0(1 - D_i)\\(GJ)_i = (GJ)_0(1 - D_i)\end{cases} \tag{2-1}$$

式（2-1）中，D_i 为第 i 构件（或单元）的损伤参数；下标“0”表示未受损伤时构件的原始刚度。D_i在 0 或 1 取值，$D_i = 0$ 时，表示第 i 构件完好无损；$D_i = 1$ 时，表示第 i 构件完全破坏；在 $0 < D_i < 1$ 区间内，表示第 i 构件不同程度的损伤状态。

对于线弹性有限元模型，动态控制方程表达式为（认为损伤不会引起质量的改变）：

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{U}} + \boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{U}} + \boldsymbol{K}_d\boldsymbol{U} = 0 \tag{2-2}$$

式中，$\boldsymbol{U}$、$\dot{\boldsymbol{U}}$、$\ddot{\boldsymbol{U}}$ 分别为 N 维（N 为结构自由度总数）位移、速度和加速度向量；$\boldsymbol{M}$ 为未损结构质量矩阵；$\boldsymbol{C}$ 为阻尼矩阵；$\boldsymbol{K}_d$ 为损伤结构刚度矩阵。