

大代敏學

A TREATISE ON
ALGEBRA

BY
Charles Smith, M. A.

連江陳文譯



查理
斯密
大代數學

科學會編譯部刊行

查 理 斯 密

大 代 數 學 下 卷

目 錄

		頁
第貳拾五編	級數之和.....	1
	例題.....	2
	問題 例題.....	6
	分項及問題.....	9
	積彈 例題.....	12
	形數 多角數.....	14
	例題三拾三.....	17
	問題 例題.....	19
	任意級數.....	24
	逐差法.....	25
	循環級數 問題 定理.....	29
	級數及發級數 貳項級數.....	36
	Cauchy 氏之定理.....	40
	例題三拾四.....	45
	第貳拾六編	不等式.....
例題 定理 雜例.....		53
例題三拾五.....		60
第貳拾七編	連分數.....	63
	漸近分數 例題.....	66

	頁
連分數作法 例題.....	67
漸近分數之性質.....	68
例題三拾六.....	73
壹般之漸近分數.....	75
循環連分數.....	78
連分數之級數.....	81
化連分數爲貳次不盡根之法.....	86
化貳次不盡根爲連分數之法.....	87
用連分數顯之級數.....	92
例題三拾七.....	95
第貳拾(編) 數之理論.....	100
Eratosthenes 氏之選法.....	100
例題.....	110
Fermet 氏之定理 例題.....	110
例題.....	112
例題三拾八.....	121
等剩式. 等剩式之性質.....	123
Fermet 氏之定理.....	126
Wilson 氏之定理.....	127
Fermat 氏之定理之擴張.....	131
Lagrange 氏之定理.....	152
循環小數之分數變化.....	134
雜例.....	136
例題三拾九.....	138
第貳拾九編 不定方程式.....	141
例題四拾.....	153
第貳拾九編 ^種 貳次不定方程式(荷廬及奈脫氏第貳拾八編).....	156
例題貳拾八.....	162

	頁
第參拾編	
適遇法, 例題.....	163
期望, 例題.....	174
反適遇, 一般之說題例題.....	176
雜例.....	182
例題四拾壹.....	185
第參拾壹編	
行列式.....	189
例題.....	199
小行列式.....	200
行列式之展開, 例題.....	201
乘法之原則例題.....	209
複縱線, 聯立一次方程式, 例題.....	213
消去法.....	217
例題四拾貳.....	220
第參拾貳編	
方程式之理論, 函數.....	225
根原之定理, 根及係數之關係.....	226
根之等勢式.....	228
根之等勢函數, 等勢函數之例.....	233
方程式之變化.....	235
應用, 例題四拾參.....	241
虛根, 不盡根, 例題.....	246
兩方程式之通根, 根之關係.....	248
可通約之根.....	251
例題四拾四.....	252
變函數, 有理函數之變化.....	254
Rolle 氏之定理.....	265
Desartes 氏之符號規則.....	266
例題四拾五.....	269
三次方程式, 普通三次方程式.....	271

四次方程式.....	頁
Sturm 氏之定理.....	274
綜合除法.....	276
拾之倍數 Horner 氏之法.....	285
例題四拾六.....	289

編 外.....	294
----------	-----

雜 題.....	297
----------	-----

新編算術

查理斯密

大代數學

下卷

第貳拾伍編

級數之和 (Summation of Series)

(315). 級數 級數之最要者。既舉於前。即等差、等比、調和、三級數。詳於第拾柒編。貳項級數。詳於 288 章。指數及對數之級數。詳於第貳拾肆編。是也。本編惟舉他種必需之級數。

(316). 記法 以 U_n 顯級數之第 n 項。以 S_n 顯其 n 項之和。若級數爲斂級數。則至無窮項之和。可用 S_∞ 顯之。

(317). 公項之差 求級數之和。雖無一定之法則。然級數之公項 U_n (即第 n 項) 多能分爲兩式之差。使一式含有 n ，一式含有 $n-1$ ，由

是可求其和。

[例] 於 $\frac{a}{x(x+a)} + \frac{a}{(x+a)(x+2a)} + \frac{a}{(x+2a)(x+3a)} + \dots$ 內其第 n 項即 $\frac{a}{(x+n-1a)(x+na)}$ 等於 $\frac{1}{x+(n-1)a} - \frac{1}{x+na}$ 。故此級數可書為 $\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+a}\right) + \left(\frac{1}{x+a} - \frac{1}{x+2a}\right) + \left(\frac{1}{x+2a} - \frac{1}{x+3a}\right) + \dots$
 $+ \left\{ \frac{1}{x+(n-1)a} - \frac{1}{x+na} \right\}$; 而除首項及末項外。諸項悉消盡。

故 $S_n = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+na} = \frac{na}{x(x+na)}$ 。

例 題

1. 求級數 $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots$ 之 n 項之和

答 $1 - \frac{1}{n+1}$ 。

2. 求級數 $\frac{1}{\underline{2}} + \frac{2}{\underline{3}} + \frac{3}{\underline{4}} + \dots + \frac{n}{\underline{n+1}} + \dots$ 之 n 項之和

今 $u_n = \frac{1}{\underline{n}} - \frac{1}{\underline{n+1}}$ 。 答 $1 - \frac{1}{\underline{n+1}}$ 。

3. 求級數 $\frac{1}{\underline{3 \cdot 1}} + \frac{1}{\underline{4 \cdot 2}} + \frac{1}{\underline{5 \cdot 3}} + \dots + \frac{1}{(n+2)\underline{n}} + \dots$ 至無窮項之和

今 $u_n = \frac{1}{\underline{n+1}} - \frac{1}{\underline{n+2}}$ 。 答 $\frac{1}{2}$ 。

4. 求級數 $\frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \dots + \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} + \dots$ 至

無窮項之和

答 1。

5. 求級數 $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{2}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{3}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} + \dots + \frac{n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n+1)}$ 之 n 項之和 $\left[2u_n = \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)} - \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)(2n+1)} \right]$.

答 $\frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n+1)} \right\}$.

6. 求級數 $\frac{2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{3}{3 \cdot 5} \cdot \frac{1}{3^2} + \frac{4}{5 \cdot 6} \cdot \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{n+1}{(2n-1)(2n+1)} \cdot \frac{1}{3^n} + \dots$ 至無窮項之和 $\left[\text{然 } \frac{n+1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{4} \left(\frac{3}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \right]$.

$4u_n = \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{3^{n-1}} - \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{3^n}$. 答 $\frac{1}{4}$.

7. 求級數 $\frac{1}{2^2-1} + \frac{1}{4^2-1} + \frac{1}{6^2-1} + \frac{1}{8^2-1} + \dots$ 至無窮項之和 答 $\frac{1}{2}$.

8. 求級數 $\frac{x}{(1-x)(1-x^2)} + \frac{x^2}{(1-x^2)(1-x^3)} + \frac{x^3}{(1-x^3)(1-x^4)} + \dots$ 之 n 項之和 答 $\frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1}{(1-x)(1-x^{n+1})}$.

(318.) 問題 求次之級數之 n 項之和

$\{a(a+b)\dots(a+\overline{r-1}b)\} + \{(a+b)(a+2b)\dots(a+rb)\} + \dots$
 $+ \{(a+\overline{n-1}b)(a+nb)\dots(a+\overline{n+r-2}b)\} + \dots$

此級數之性質。(1)各項有 r 因子。(2)任意壹項之諸因子成等差級數。(3)連續諸項之諸第壹因子。成與第壹項諸因子相同之等差級數。

欲考察以同規律所成之級數。宜先於此各項之最後因子之次。更加壹因子。作成新級數。而設此級數之第 n 項爲 v_n 。

$$\text{由是 } v_n = \{(a + \overline{n-1}.b)(a + nb) \dots (a + \overline{n+r-1}.b)\}.$$

$$\begin{aligned} \text{然 } v_n - v_{n-1} &= \{(a + \overline{n-1}.b)(a + nb) \dots (a + \overline{n+r-1}.b)\} \\ &\quad - \{(a + \overline{n-2}.b)(a + \overline{n-1}.b) \dots (a + \overline{n+r-2}.b)\} \\ &= \{(a + \overline{n-1}.b) \dots (a + \overline{n+r-2}.b)\} \{(a + \overline{n+r-1}.b) \\ &\quad \quad \quad - (a + \overline{n-2}.b)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{由是 } &= (r+1)b \{(a + \overline{n-1}.b) \dots (a + \overline{n+r-2}.b)\} \\ &v_n - v_{n-1} = (r+1)b \times u_n \end{aligned}$$

於是次第變 n 爲 $n-1$ 則得次之各式即

$$\begin{aligned} v_{n-1} - v_{n-2} &= (r+1)b \times u_{n-1}, \\ &\dots\dots\dots = \dots\dots\dots \\ v_2 - v_1 &= (r+1)b \times u_2, \end{aligned}$$

$$\text{又 } v_1 - v_0 = (r+1)b \times u_1$$

但 v_0 爲依相同之規律而成者。即在 v_1 前之項也。故

$$v_0 = \{(a-b)a(a+b) \dots (a + \overline{r-1}.b)\}$$

又於 v_n 設 $n=0$ ，亦可得 v_0 。

$$\text{由是。依加法 } (v_n - v_0) = (r+1)bs_n$$

$$\therefore S_n = (v_n - v_0) \div (r+1)b.$$

例 題

1. 求級數 $1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + n(n+1)$.

今 $u_n = n(n+1)$, $v_n = n(n+1)(n+2)$, $v_0 = 0.1.2$, $r=2$ 及 $b=1$.

由是 $S_n = \frac{1}{3} n(n+1)(n+2)$.

上式乃用公式以求其和。若代以求公式之方法則如次。是為最單簡之例。

$$n(n+1) = \frac{1}{3} \{n(n+1)(n+2) - (n-1)n(n+1)\},$$

$$(n-1)n = \frac{1}{3} \{(n-1)n(n+1) - (n-2)(n-1)n\},$$

..... =

$$1.2 = \frac{1}{3} \{1.2.3 - 0.1.2\}.$$

由是 $S_n = \frac{1}{3} n(n+1)(n+2)$.

2. 求級數 $1.2.3 + 2.3.4 + \dots + n(n+1)(n+2)$ 之和。

答 $\frac{1}{4} n(n+1)(n+2)(n+3)$.

3. 求級數 $1.2.3.4 + 2.3.4.5 + \dots + n(n+1)(n+2)(n+3)$ 之和。

答 $\frac{1}{5} n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$.

4. 求級數 $3.5.7 + 5.7.9 + 7.9.11 + \dots$ 之 n 項之和

今 $u_n = (2n+1)(2n+3)(2n+5)$, $v_n = (2n+1)(2n+3)$

$$(2n+5)(2n+7),$$

$$v_0=1.3.5.7, r=3, \text{ 及 } b=2.$$

$$\text{由是 } S_n = \frac{1}{4 \cdot 2} \{ (2n+1)(2n+3)(2n+5)(2n+7) - 1.3.5.7 \}.$$

若級數非如上所述之形狀。然分離其各項。必為所設之級數。故可用具上式之若干級數之代數和顯之。由是可直書其和於式下。今示其例如

5. 級數 $1.3+2.4+3.5+\dots$ 之 n 項之和

$$\text{今 } u_n = n(n+2) = n(n+1) + n.$$

而級數 $1.2+2.3+\dots+n(n+1)$ 之和為

$$\frac{1}{3} \{ n(n+1)(n+2) - 0.1.2 \}$$

級數 $1+2+\dots+n$ 之和為 $\frac{1}{2} \{ n(n+1) - 0.1 \}$

由是所求之和為 $\frac{1}{3} n(n+1)(n+2) + \frac{1}{2} n(n+1).$

6. 求級數 $2.3.1+3.4.4+4.5.7+\dots+(n+1)(n+2)$

$(3n-2)$ 之和。

$$\text{今 } u_n = (n+1)(n+2)(3n-2) = 3n(n+1)(n+2) - 2(n+1)(n+2).$$

$$\begin{aligned} \therefore S_n &= \frac{3}{4} \{ n(n+1)(n+2)(n+3) - 0.1.2.3 \} - \frac{2}{3} \{ (n+1)(n+2)(n+3) \\ &\quad - 1.2.3 \} = \frac{1}{12} (9n-8)(n+1)(n+2)(n+3) + 4. \end{aligned}$$

(319.) 問題 求以下式為公項之級數之和。

$$\frac{1}{(a+n-1.b)(a+nb)(a+n+1.b) \dots (a+n+r-2.b)}$$

此級數為前章之級數各項之反商。而削去

此分母之第壹因子。則得第貳級數。而其公項爲

$$V_n = \frac{1}{(a+nb)(a+n+1.b)\dots(a+n+r-2.b)}$$

然 $V_n - V_{n-1} = \frac{1}{(a+nb)(a+n+1.b)\dots(a+n+r-2.b)}$

$$- \frac{1}{(a+n-1.b)(a+nb)\dots(a+n+r-3.b)}$$

$$= \frac{1}{(a+n-1.b)\dots(a+n+r-2.b)} \{ (a+n+1.b) - (a+n+r-2.b) \},$$

$$\therefore V_n - V_{n-1} = -(r-1)b \times u_n.$$

令 n 爲 $n-1$ 則 $V_{n-1} - V_{n-2} = -(r-1)b \times u_{n-1}$

由是類推

$$V_2 - V_1 = -(r-1)b \times u_2,$$

$$V_1 - V_0 = -(r-1)b \times u_1,$$

但 V_0 爲依相同之規律而成者。即在 V_1 前之項也。故

$$V_0 = \frac{1}{a(a+b)\dots(a+r-2.b)}$$

由加法 $V_n - V_0 = -(r-1)b \times S_n$;

$$\therefore S_n = (V_0 - V_n) / (r-1)b.$$

例 題

1. 求級數 $\frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ 之和

$$\text{今 } u_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)}, v_n = \frac{1}{n+2}, v_0 = \frac{1}{2}, r=2, b=1.$$

$$\text{由是 } S_n = \frac{1}{1 \cdot 1} \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} \right\} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}.$$

2. 求級數 $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$ 之 n

項之和及無窮項之和。

$$\text{今 } u_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}, v_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)},$$

$$v_0 = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}, r=4, \text{ 及 } b=1.$$

$$\text{由是 } S_n = \frac{1}{3 \cdot 1} \left\{ \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} \right\},$$

$$\text{及 } S_\infty = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{1}{18}.$$

3. 求級數 $\frac{1}{3 \cdot 7 \cdot 11} + \frac{1}{7 \cdot 11 \cdot 15} + \dots + \frac{1}{(4n-1)(4n+3)(4n+7)}$ 之和

$$\text{答 } S_n = \frac{1}{8} \left\{ \frac{1}{3 \cdot 7} - \frac{1}{(4n+3)(4n+7)} \right\}.$$

若級數非如上所述之形狀。然分離其各項。必為所設之級數。故可用具上式若干級數之代數和顯之。由是可直書其和於式下。今示其例於次

4. 求級數 $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots$ 之和

$$\text{今 } u_n = \frac{1}{n(n+2)} = \frac{n+1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n(n+1)} \cdot \frac{1}{n+2}.$$

而以 $\frac{1}{(n+1)(n+2)}$ 及 $\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ 為公項之兩級數。具有

本款所說之形狀。故已知級數之和。如次

$$S_n = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1.2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right) = \frac{3}{4} - \frac{2n+3}{2(n+1)(n+2)}$$

5. 求級數 $\frac{1}{1.3.5} + \frac{1}{2.4.6} + \dots + \frac{1}{n(n+2)(n+4)}$ 之和

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{n(n+2)(n+4)} = \frac{(n+1)(n+3)}{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} \\ &= \frac{n(n+4)+3}{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} \\ &= \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \frac{3}{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{由是 } S_n &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2.3} - \frac{1}{(n+2)(n+3)} \right\} + \frac{3}{4} \left\{ \frac{1}{1.2.3.4} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} \right\} \end{aligned}$$

(320.) 分項 前記之級數。可用分項分數之方和求其和

例於 $\frac{1}{1.3} + \frac{1}{2.4} + \frac{1}{3.5} + \dots + \frac{1}{n(n+2)}$

設 $\frac{1}{n(n+2)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+2}$ 依第廿三編得 $A = \frac{1}{2}$ 及 $B = -\frac{1}{2}$ 。

$$\text{由是 } 2u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \quad \therefore 2u_1 = \frac{1}{1} - \frac{1}{3}, \quad 2u_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4},$$

$$2u_3 = \frac{1}{3} - \frac{1}{5}, \dots, \quad 2u_{n-2} = \frac{1}{n-2} - \frac{1}{n}, \quad 2u_{n-1} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1},$$

$$2u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}.$$

$$\text{由加法 } 2S_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \quad \therefore S_n = \frac{3}{4} - \frac{2n+3}{2(n+1)(n+2)}$$

(321.) 求級數前 n 個整數之 r 方乘之和

[第壹] 求 $1^2+2^2+3^2+\dots+n^2$ 之和

$u_n \equiv n^2 = n(n+1) - n$ 由是依 318. 章

$$S_n = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2) - \frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

[第貳] 求 $1^3+2^3+3^3+\dots+n^3$ 之和

$$u_n \equiv n^3 = n(n+1)(n+2) - 3n^2 - 2n$$

$$= n(n+1)(n+2) - 3n(n+1) + n. \text{ 依 318. 章}$$

$$S_n = \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3) - 3 \times \frac{1}{3}n(n+1)(n+2) + \frac{1}{2}n(n+1)$$

$$= \frac{1}{4}n(n+1)\{(n+2)(n+3) - 4(n+2) + 2\} = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2.$$

$$1+2+\dots+n = \frac{1}{2}n(n+1). \quad \therefore 1^3+2^3+\dots+n^3 = (1+2+\dots+n)^2,$$

即前 n 個整數之立方之和等於前 n 個整數之和之平方

[別法] 又 $1^3+2^3+\dots+n^3$ 之和可用下法得之。

由恒等式 $4n^3 = \{n(n+1)\}^2 - \{(n-1)n\}^2$ 設 n 依次減 1。

則 $4(n-1)^3 = \{(n-1)n\}^2 - \{(n-2)(n-1)\}^2,$

.....

$$4 \cdot 2^3 = (2 \cdot 3)^2 - (1 \cdot 2)^2,$$

$$4 \cdot 1^3 = (1 \cdot 2)^2 - (0 \cdot 1)^2.$$

由加法

$$4S_n = n^2(n+1)^2.$$

[第三] 求 $1^r + 2^r + 3^r + \dots + n^r$ 之和

凡前 n 個整數之 r 乘方之和。若 r 為任意之特別值。亦可用與 $r=2$ 及 $r=3$ 之例相同之法求之。

例如求 $1^4 + 2^4 + \dots + n^4$ 之和當變其公項如次。

$$n^4 \equiv n(n+1)(n+2)(n+3) - 6n(n+1)(n+2) + 7n(n+1) - n.$$

又 r 方乘之和。依貳項式之定理。可用低於 r 之方乘之和之項顯之。即如次。

$$(n+1)^{r+1} = n^{r+1} + (r+1)n^r + \frac{(r+1)r}{1.2}n^{r-1} + \dots + 1,$$

$$n^{r+1} = (n-1)^{r+1} + (r+1)(n-1)^r + \frac{(r+1)r}{1.2}(n-1)^{r-1} + \dots + 1,$$

.....

$$3^{r+1} = 2^{r+1} + (r+1)2^r + \frac{(r+1)r}{1.2}2^{r-1} + \dots + 1,$$

$$2^{r+1} = 1^{r+1} + (r+1)1^r + \frac{(r+1)r}{1.2}1^{r-1} + \dots + 1.$$

由加法

$$(n+1)^{r+1} - (n+1) = (r+1)S_n^r + \frac{(r+1)r}{1.2}S_n^{r-1} + \dots + (r+1)S_n^1$$

但 $S_n^r = 1^r + 2^r + \dots + n^r$, $S_n^{r-1} = 1^{r-1} + 2^{r-1} + \dots + n^{r-1}$.

[推論] 用同法可得如 $a, a+b, a+2b, \dots$ 之等差級數之各項之 r 方乘之和如

$$(a+nb)^{r+1} - a^{r+1} - nb^{r+1} = (r+1)bS_n^r + \frac{(r+1)r}{1.2}b^2S_n^{r-1} + \dots + (r+1)b^rS_n^1,$$