大代數学

A TREATISE ON
ALGEBRA

BY

Charles Smith, M. A.

連江陳文譯

查理斯密大代數學

科學會編譯部刊行

查理斯密

大代數學下卷

目錄

查理斯密

大代數學

下卷

第貳拾伍編

級數之和 (Summation of Series)

(315). **級數** 級數之最要者。既舉於前。即等差,等比,調和,三級數。詳於第拾柒編。貳項級數。詳於288章。指數及對數之級數。詳於第貳拾肆編。是也。本編惟舉他種必需之級數。

(316). **記法** 以U_n顯級數之第n項。以S_n顯其n項之和。若級數爲斂級數。則至無窮項之和。可用S_∞顯之。

(317). **公項之差** 求級數之和。雖無一定之法則。然級數之公項U_n(即第n項)多能分爲兩式之差。使一式含有n,一式含有$n-1$,由

是可求其和。

〔例〕 於 $\dfrac{a}{x(x+a)}+\dfrac{a}{(x+a)(x+2a)}+\dfrac{a}{(x+2a)(x+3a)}+\dots$，內其第 n 項即 $\dfrac{a}{(x+\overline{n-1}.a)(x+na)}$ 等於 $\dfrac{1}{x+(n-1)a}-\dfrac{1}{x+na}$. 故此級數可書爲 $\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+a}\right)+\left(\dfrac{1}{x+a}-\dfrac{1}{x+2a}\right)+\left(\dfrac{1}{x+2a}-\dfrac{1}{x+3a}\right)+\dots\dots$ $+\left\{\dfrac{1}{x+(n-1)a}-\dfrac{1}{x+na}\right\}$； 而除首項及末項外。諸項悉消盡。

故 $$S_n=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+na}=\frac{na}{x(x+na)}.$$

例　題

1. 求級數 $\dfrac{1}{1.2}+\dfrac{1}{2.3}+\dfrac{1}{3.4}+\dots\dots\dfrac{1}{n(n+1)}+\dots\dots$ 之 n 項之和

答 $1-\dfrac{1}{n+1}$.

2. 求級數 $\dfrac{1}{\underline{|2}}+\dfrac{2}{\underline{|3}}+\dfrac{3}{\underline{|4}}+\dots\dots+\dfrac{n}{\underline{|n+1}}+\dots\dots$ 之 n 項之和

今 $u_n=\dfrac{1}{\underline{|n}}-\dfrac{1}{\underline{|n+1}}$. 答 $1-\dfrac{1}{\underline{|n+1}}$.

3. 求級數 $\dfrac{1}{3\underline{|1}}+\dfrac{1}{4\underline{|2}}+\dfrac{1}{5\underline{|3}}+\dots\dots+\dfrac{1}{(n+2)\underline{|n}}+\dots$ 至無窮項之和

今 $u_n=\dfrac{1}{\underline{|n+1}}-\dfrac{1}{\underline{|n+2}}$. 答 $\dfrac{1}{2}$.

4. 求級數 $\dfrac{3}{1^2.2^2}+\dfrac{5}{2^2.3^2}+\dfrac{7}{3^2.4^2}+\dots\dots+\dfrac{2n+1}{n^2(n+1)^2}+\dots\dots$ 至無窮項之和 答 1.

5. 求級數 $\frac{1}{1.3}+\frac{2}{1.3.5}+\frac{3}{1.3.5.7}+\ldots+\frac{n}{1.3.5\ldots(2n+1)}$. 之 n 項之和 $\left[2u_n=\frac{1}{1.3.5\ldots(2n-1)}-\frac{1}{1.3.5\ldots(2n-1)(2n+1)}\right]$.

答 $\frac{1}{2}\left\{1-\frac{1}{1.3.5\ldots(2n+1)}\right\}$.

6. 求級數 $\frac{2}{1.3}\frac{1}{3}+\frac{3}{3.5}\cdot\frac{1}{3^2}+\frac{4}{5.6}\cdot\frac{1}{3^3}+\ldots+\frac{n+1}{(2n-1)(2n+1)}\frac{1}{3^n}+\ldots$ 至無窮項之和 $\left[\text{然}\ \frac{n+1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{4}\left(\frac{3}{2n-1}-\frac{1}{2n-1}\right),\right.$

$\left.4u_n=\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{3^{n-1}}-\frac{1}{2n+1}\frac{1}{3^n}\right]$. 答 $\frac{1}{4}$.

7. 求級數 $\frac{1}{2^2-1}+\frac{1}{4^2-1}+\frac{1}{6^2-1}+\frac{1}{8^2-1}+\ldots\ldots$ 至無窮項之和 答 $\frac{1}{2}$.

8. 求級數 $\frac{x}{(1-x)(1-x^2)}+\frac{x^2}{(1-x^2)(1-x^3)}+\frac{x^3}{(1-x^3)(1-x^4)}+\ldots$ 之 n 項之和 答 $\frac{1}{(1-x)^2}-\frac{1}{(1-x)(1-x^{n+1})}$.

(318.) 問題 求次之級數之 n 項之和

$$\{a(a+b)\ldots(a+\overline{r-1}.b)\}+\{(a+b)(a+2b)\ldots(a+rb)\}+\ldots\ldots,$$
$$+\{(a+\overline{n-1}.b)(a+nb)\ldots(a+\overline{n+r-2}.b)\}+\ldots\ldots$$

此級數之性質。(1)各項有 r 因子。(2)任意壹項之諸因子成等差級數。(3)連續諸項之諸第壹因子。成與第壹項諸因子相同之等差級數。

欲考察以同規律所成之級數。宜先於此各項之最後因子之次。更加壹因子。作成新級數。而設此級數之第 n 項為 v_n.

由是 $v_n=\{(a+\overline{n-1}.b)(a+nb)\ldots(a+\overline{n+r-1}.b)\}$.

然 $$v_n-v_{n-1}=\{(a+\overline{n-1}.b)(a+nb)\ldots(a+\overline{n+r-1}.b)\}.$$
$$-\{(a+\overline{n-2}.b)(a+\overline{n-1}.b)\ldots(a+\overline{n+r-2}.b)\}$$
$$=\{(a+\overline{n-1}.b)\ldots(a+\overline{n+r-2}.b)\}\{(a+\overline{n+r-1}.b)-(a+\overline{n-2}.b)\}$$
$$=(r+1)b\{(a+\overline{n-1}.b)\ldots(a+\overline{n+r-2}.b)\}$$

由是 $$v_n-v_{n-1}=(r+1)b\times u_n$$

於是次第變 n 為 $n-1$ 則得次之各式即

$$v_{n-1}-v_{n-2}=(r+1)b\times u_{n-1},$$
$$\ldots\ldots\ldots=\ldots\ldots\ldots$$
$$v_2-v_1=(r+1)b\times u_2,$$

又 $$v_1-v_0=(r+1)b\times u_1$$

但 v_0 為依相同之規律而成者。即在 v_1 前之項也。故

$$v_0=\{(a-b)a(a+b)\ldots\ldots\ldots(a+\overline{r-1}.b)\}$$

又於 v_n, 設 $n=0$, 亦可得 v_0.

由是。依加法 $(v_n-v_0)=(r+1)bS_n$

$$\therefore\quad S_n=(v_n-v_0)\div(r+1)b.$$

例　題

1.　求級數　$1.2+2.3+3.4+\ldots\ldots\ldots+n(n+1)$.

令 $u_n=n(n+1)$, $v_n=n(n+1)(n+2)$, $v_0=0.1.2$, $r=2$.及 $b=1$.

由是　$S_n=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$.

上式乃用公式以求其和。若代以求公式之方法則如次。是爲最單簡之例。

$$n(n+1)=\frac{1}{3}\{n(n+1)(n+2)-(n-1)n(n+1)\},$$

$$(n-1)n=\frac{1}{3}\{(n-1)n(n+1)-(n-2)(n-1)n\},$$

$$\ldots\ldots\ldots=\ldots\ldots\ldots$$

$$1.2=\frac{1}{2}\{1.2.3-0.1.2\}.$$

由是　$S_n=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$.

2.　求級數　$1.2.3+2.3.4+\ldots\ldots\ldots+n(n+1)(n+2)$. 之和。

答　$\frac{1}{2}n(n+1)(n+2)(n+3)$.

3.　求級數 $1.2.3.4+2.3.4.5+\ldots+n(n+1)(n+2)(n+3)$ 之和。

答　$\frac{1}{5}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$.

4.　求級數 $3.5.7+5.7.9+7.9.11+\ldots\ldots\ldots$ 之 n 項之和

令　$u_n=(2n+1)(2n+3)(2n+5)$, $v_n=(2n+1)(2n+3)$

$$(2n+5)(2n+7),$$

$$v_0=1.3.5.7,\ r=3,\quad \text{及}\quad b=2.$$

由是 $S_n=\dfrac{1}{4.2}\{(2n+1)(2n+3)(2n+5)(2n+7)-1.3.5.7\}.$

若級數非如上所述之形狀。然分離其各項。必爲所設之級數。故可用具上式之若干級數之代數和顯之。由是可直書其和於式下。今示其例如

5. 級數 $1.3+2.4+3.5+\ldots\ldots$ 之 n 項之和

今 $$u_n=n(n+2)=n(n+1)+n.$$

而級數 $1.2+2.3+\ldots\ldots\ldots+n(n+1)$ 之和爲

$$\tfrac{1}{3}\{n(n+1)(n+2)-0.1.2\}$$

級數 $1+2+\ldots\ldots\ldots+n$ 之和爲 $\tfrac{1}{2}\{n(n+1)-0.1\}$

由是所求之和爲 $\tfrac{1}{3}n(n+1)(n+2)+\tfrac{1}{2}n(n+1).$

6. 求級數 $2.3.1+3.4.4+4.5.7+\ldots\ldots+(n+1)(n+2)(3n-2)$. 之和。

今 $u_n=(n+1)(n+2)(3n-2)=3n(n+1)(n+2)-2(n+1)(n+2).$

$\therefore\ S_n=\tfrac{3}{4}\{n(n+1)(n+2)(n+3)-0.1.2.3\}-\tfrac{2}{3}\{(n+1)(n+2)(n+3)-1.2.3\}=\tfrac{1}{12}(9n-8)(n+1)(n+2)(n+3)+4.$

(319.) 問題 求以下式爲公項之級數之和。

$$\frac{1}{(a+\overline{n-1}.b)(a+nb)(a+\overline{n+1}.b)\ldots\ldots(a+\overline{n+r-2}.b)}.$$

此級數爲前章之級數各項之反商。而削去

此分母之第壹因子。則得第貳級數。而其公項爲

$$V_n=\frac{1}{(a+nb)(a+\overline{n+1}.b)\ldots(a+\overline{n+r-2}.b)}.$$

然 $$V_n-V_{n-1}=\frac{1}{(a+nb)(a+\overline{n+1}.b)\ldots(a+\overline{n+r-2}.b)}$$

$$-\frac{1}{(a+\overline{n-1}.b)(a+nb)\ldots(a+\overline{n+r-3}.b)}$$

$$=\frac{1}{(a+\overline{n-1}.b)\ldots(a+\overline{n+r-2}.b)}\{(a+\overline{n+1}.b)-(a+\overline{n+r-2}.b)\},$$

$$\therefore\quad V_n-V_{n-1}=-(r-1)b\times u_n.$$

令 n 爲 $n-1$ 則 $V_{n-1}-V_{n-2}=-(r-1)b\times u_{n-1}$,

由是類推 ……………………………

$$V_2-V_1=-(r-1)b\times u_2,$$

$$V_1-V_0=-(r-1)b\times u_1,$$

但 V_0 爲依相同之規律而成者。即在 V_1 前之項也。故

$$V_0=\frac{1}{a(a+b)\ldots\ldots(a+\overline{r-2}.b)}.$$

由加法 $$V_n-V_0=-(r-1)b\times S_n;$$

$$\therefore\quad S_n=(V_0-V_n)\ /\ (r-1)b.$$

例　題

1. 求級數 $\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\ldots\ldots+\frac{1}{(n+1)(n+2)}$ 之和

今 $u_n=\frac{1}{(n+1)(n+2)}$, $v_n=\frac{1}{n+2}$, $v_0=\frac{1}{2}$, $r=2, b=1.$

由是 $S_n=\frac{1}{1.1}\left\{\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right\}=\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}.$

2. 求級數 $\frac{1}{1.2.3.4}+\frac{1}{2.3.4.5}+\cdots\cdots\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$ 之 n 項之和及無窮項之和。

今 $u_n=\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$, $v_n=\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$,

$v_0=\frac{1}{1.2.3}$, $r=4$, 及 $b=1.$

由是 $S_n=\frac{1}{3.1}\left\{\frac{1}{1.2.3}-\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right\}$,

及 $S_\infty=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1.2.3}=\frac{1}{18}.$

3. 求級數 $\frac{1}{3.7.11}+\frac{1}{7.11.15}+\cdots\frac{1}{(4n-1)(4n+3)(4n+7)}$. 之和

答 $S_n=\frac{1}{8}\left\{\frac{1}{3.7}-\frac{1}{(4n+3)(4n+7)}\right\}.$

若級數非如上所述之形狀。然分離其各項。必爲所設之級數。故可用具上式若干級數之代數和顯之。由是可直書其和於式下。今示其例於次

4. 求級數 $\frac{1}{1.3}+\frac{1}{2.4}+\frac{1}{3.5}+\cdots\cdots$ 之和

今 $u_n=\frac{1}{n(n+2)}=\frac{n+1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}.$

而以 $\frac{1}{(n+1)(n+2)}$ 及 $\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ 爲公項之兩級數。具有本款所說之形狀。故已知級數之和。如次

$$S_n=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1.2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)=\frac{3}{4}-\frac{2n+3}{2(n+1)(n+2)}.$$

5. 求級數 $\frac{1}{1.3.5}+\frac{1}{2.4.6}+\ldots\ldots+\frac{1}{n(n+2)(n+4)}$ 之和

$$u_n=\frac{1}{n(n+2)(n+4)}=\frac{(n+1)(n+3)}{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}$$

$$=\frac{n(n+4)+3}{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}$$

$$=\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}+\frac{3}{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}.$$

由是 $S_n=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2.3}-\frac{1}{(n+2)(n+3)}\right\}+\frac{3}{4}\left\{\frac{1}{1.2.3.4}-\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}\right\}.$

(320.) 分項 前記之級數。可用分項分數之方和求其和

例於 $\frac{1}{1.3}+\frac{1}{2.4}+\frac{1}{3.5}+\ldots\ldots+\frac{1}{n(n+2)}$

設 $\frac{1}{n(n+2)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+2}$ 依第廿三編得 $A=\frac{1}{2}$ 及 $B=-\frac{1}{2}.$

由是 $2u_n=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}$ $\therefore$ $2u_1=\frac{1}{1}-\frac{1}{3}$, $2u_2=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}$,

$2u_3=\frac{1}{3}-\frac{1}{5}$,...... $2u_{n-2}=\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n}$, $2u_{n-1}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}$,

$2u_n=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}.$

由加法 $2S_n=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}$ $\therefore$ $S_u=\frac{3}{4}-\frac{2n+3}{2(n+1)(n+2)}.$

(321.) 求級數前 n 個整數之 r 方乘之和

〔第壹〕 求 $1^2+2^2+3^2+\ldots\ldots+n^2$ 之和

$u_n\equiv n^2=n(n+1)-n$ 由是依 318. 章

$$S_n=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)-\frac{1}{2}n(n+1)=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

〔第貳〕 求 $1^3+2^3+3^3+\ldots\ldots+n^3$ 之和

$$u_n\equiv n^3=n(n+1)(n+2)-3n^2-2n$$

$$=n(n+1)(n+2)-3n(n+1)+n.$$ 依 318. 章

$$S_n=\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)-3\times\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)+\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$=\frac{1}{4}n(n+1)\{(n+2)(n+3)-4(n+2)+2\}=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2.$$

$1+2+\ldots\ldots+n=\frac{1}{2}n(n+1).$ $\therefore$ $1^3+2^3+\ldots\ldots+n^3=(1+2+\ldots\ldots+n)^2,$

即前 n 個整數之立方之和等於前 n 個整數之和之平方

〔别法〕 又 $1^3+2^3+\ldots\ldots+n^3$ 之和可用下法得之。

由恒等式 $4n^3=\{n(n+1)\}^2-\{(n-1)n\}^2$ 設 n 依次減 1。

則 $4(n-1)^3=\{(n-1)n\}^2-\{(n-2)(n-1)\}^2,$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$4.2^3=(2\cdot3)^2-(1.2)^2,$$

$$4.1^3=(1.2)^2-(0.1)^3.$$

由加法 $4S_n=n^2(n+1)^2$

〔第三〕 求 $1^r+2^r+3^r+\cdots\cdots+n^r$ 之和

凡前 n 個整數之 r 乘方之和。若 r 為任意之特別值。亦可用與 $r=2$ 及 $r=3$ 之例相同之法求之。

例如求 $1^4+2^4+\cdots\cdots+n^4$ 之和當變其公項如次。

$$n^4\equiv n(n+1)(n+2)(n+3)-6n(n+1)(n+2)+7n(n+1)-n.$$

又 r 方乘之和。依貳項式之定理。可用低於 r 之方乘之和之項顯之。即如次。

$$(n+1)^{r+1}=n^{r+1}+(r+1)n^r+\frac{(r+1)r}{1.2}n^{r-1}+\cdots\cdots\cdots\cdots+1,$$

$$n^{r+1}=(n-1)^{r+1}+(r+1)(n-1)^r+\frac{(r+1)r}{1.2}(n-1)^{r-1}+\cdots\cdots\cdots\cdots+1,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$3^{r+1}=2^{r+1}+(r+1)2^r+\frac{(r+1)r}{1.2}2^{r-1}+\cdots\cdots\cdots\cdots+1,$$

$$2^{r+1}=1^{r+1}+(r+1)1^r+\frac{(r+1)r}{1.2}1^{r-1}+\cdots\cdots\cdots\cdots+1.$$

由加法

$$(n+1)^{r+1}-(n+1)=(r+1)S_n^r+\frac{(r+1)r}{1.2}S_n^{r-1}+\cdots\cdots\cdots+(r+1)S_n^1$$

但 $S_n^r=1^r+2^r+\cdots\cdots+n^r,\qquad S_n^{r-1}=1^{r-1}+2^{r-1}+\cdots\cdots+n^{r-1}.$

〔推論〕 用同法可得如 $a,\ a+b,\ a+2b,\cdots\cdots$ 之等差級數之各項之 r 方乘之和如

$$(a+nb)^{r+1}-a^{r+1}-nb^{r+1}=(r+1)bS_n^r+\frac{(r+1)r}{1.2}b^2S_n^{r-1}+\cdots+(r+1)b^rS_n^1,$$