



俄罗斯数学精品译丛

“十二五”国家重点图书

Matrix Theory (II)

矩阵论 (下)

[俄] 甘特马赫尔 著 柯召 郑元禄 译



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

014010557

0151.21

70

V2

俄罗斯数学精品译丛

“十二五”国家重点图书

● [俄] 甘特马赫尔 著 ● 柯召 郑元禄 译

Matrix Theory 矩阵论 (下) (II)



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS



北航

C1696980

0151.21

70

V2

内容简介

本书是根据苏联国立技术理论出版社于1953年出版的甘特马赫尔所著的《矩阵论》来译出的,本书分上、下两册,下册为原书第二部分,包括:复对称、反对称与正交矩阵、奇异矩阵束、非负元素所构成的矩阵、特征值的正则性的各种判定与局部化、矩阵论对于线性微分方程组研究的应用、路斯—胡尔维茨问题及其相邻近的问题、特征数与奇异数的不等式等内容。

本书可供高等院校本科生、研究生、数学及物理科学研究人员和工程师参考之用。

图书在版编目(CIP)数据

矩阵论. 下/(俄罗斯)甘特马赫尔著;柯召,郑元禄
译. —哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2013. 6

ISBN 978-7-5603-3901-6

I. ①矩… II. ①甘… ②柯… ③郑… III. ①矩阵论 IV. ①O151.21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 314767 号

书名:Теория матриц

作者:Гантмахер Ф. Р.

Лицензиат должен указать следующую ссылку на авторское право на каждом экземпляре Переводного произведения опубликованного на территории Китая:

Гантмахер Ф. Р. «Теория матриц»

Copyright © FIZMATLIT PUBLISHERS RUSSIA 2010, ISBN 5-9221-0524-8

本作品中文专有出版权由中华版权代理中心代理取得,由哈尔滨工业大学出版社独家出版

版权登记号 黑版贸审字 08-2012-003 号

策划编辑 刘培杰 张永芹

责任编辑 张永芹 齐新宇

封面设计 孙茵艾

出版发行 哈尔滨工业大学出版社

社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006

传 真 0451-86414749

网 址 <http://hitpress.hit.edu.cn>

印 刷 哈尔滨工业大学印刷厂

开 本 787mm×1092mm 1/16 印张 17.5 字数 370 千字

版 次 2013 年 6 月第 1 版 2013 年 6 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978-7-5603-3901-6

定 价 48.00 元

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)



哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室
已出版(即将出版)图书目录



书 名	出 版 时 间	定 价	编 号
新编中学数学解题方法全书(高中版)上卷	2007-09	38.00	7
新编中学数学解题方法全书(高中版)中卷	2007-09	48.00	8
新编中学数学解题方法全书(高中版)下卷(一)	2007-09	42.00	17
新编中学数学解题方法全书(高中版)下卷(二)	2007-09	38.00	18
新编中学数学解题方法全书(高中版)下卷(三)	2010-06	58.00	73
新编中学数学解题方法全书(初中版)上卷	2008-01	28.00	29
新编中学数学解题方法全书(初中版)中卷	2010-07	38.00	75
新编平面解析几何解题方法全书(专题讲座卷)	2010-01	18.00	61

数学眼光透视	2008-01	38.00	24
数学思想领悟	2008-01	38.00	25
数学应用展现	2008-01	38.00	26
数学建模导引	2008-01	28.00	23
数学方法溯源	2008-01	38.00	27
数学史话览胜	2008-01	28.00	28

从毕达哥拉斯到怀尔斯	2007-10	48.00	9
从迪利克雷到维斯卡尔迪	2008-01	48.00	21
从哥德巴赫到陈景润	2008-05	98.00	35
从庞加莱到佩雷尔曼	2011-08	138.00	136
从比勃巴赫到德·布朗斯	即将出版		

数学解题中的物理方法	2011-06	28.00	114
数学解题的特殊方法	2011-06	48.00	115
中学数学计算技巧	2012-01	48.00	116
三角形中的角格点问题	2013-01	88.00	207
中学数学证明方法	2012-01	58.00	117
数学趣题巧解	2012-03	28.00	128
含参数的方程和不等式	2012-09	28.00	213

数学奥林匹克与数学文化(第一辑)	2006-05	48.00	4
数学奥林匹克与数学文化(第二辑)(竞赛卷)	2008-01	48.00	19
数学奥林匹克与数学文化(第二辑)(文化卷)	2008-07	58.00	34
数学奥林匹克与数学文化(第三辑)(竞赛卷)	2010-01	48.00	59
数学奥林匹克与数学文化(第四辑)(竞赛卷)	2011-08	58.00	87



哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室

已出版(即将出版)图书目录



书 名	出 版 时 间	定 价	编 号
发展空间想象力	2010-01	38.00	57
走向国际数学奥林匹克的平面几何试题诠释(上、下)(第1版)	2007-01	68.00	11,12
走向国际数学奥林匹克的平面几何试题诠释(上、下)(第2版)	2010-02	98.00	63,64
平面几何证明方法全书	2007-08	35.00	1
平面几何证明方法全书习题解答(第1版)	2005-10	18.00	2
平面几何证明方法全书习题解答(第2版)	2006-12	18.00	10
平面几何天天练上卷·基础篇(直线型)	2013-01	58.00	208
平面几何天天练中卷·基础篇(涉及圆)	2013-01	28.00	234
平面几何天天练下卷·提高篇	2013-01	58.00	237
最新世界各国数学奥林匹克中的平面几何试题	2007-09	38.00	14
数学竞赛平面几何典型题及新颖解	2010-07	48.00	74
初等数学复习及研究(平面几何)	2008-09	58.00	38
初等数学复习及研究(立体几何)	2010-06	38.00	71
初等数学复习及研究(平面几何)习题解答	2009-01	48.00	42
世界著名平面几何经典著作钩沉——几何作图专题卷(上)	2009-06	48.00	49
世界著名平面几何经典著作钩沉——几何作图专题卷(下)	2011-01	88.00	80
世界著名平面几何经典著作钩沉(民国平面几何老课本)	2011-03	38.00	113
世界著名数论经典著作钩沉(算术卷)	2012-01	28.00	125
世界著名数学经典著作钩沉——立体几何卷	2011-02	28.00	88
世界著名三角学经典著作钩沉(平面三角卷Ⅰ)	2010-06	28.00	69
世界著名三角学经典著作钩沉(平面三角卷Ⅱ)	2011-01	28.00	78
世界著名初等数论经典著作钩沉(理论和实用算术卷)	2011-07	38.00	126
几何学教程(平面几何卷)	2011-03	68.00	90
几何学教程(立体几何卷)	2011-07	68.00	130
几何变换与几何证题	2010-06	88.00	70
几何瑰宝——平面几何500名题暨1000条定理(上、下)	2010-07	138.00	76,77
三角形的解法与应用	2012-07	18.00	183
近代的三角形几何学	2012-07	48.00	184
一般折线几何学	即将出版	58.00	203
三角形的五心	2009-06	28.00	51
三角形趣谈	2012-08	28.00	212
俄罗斯平面几何问题集	2009-08	88.00	55
俄罗斯平面几何5000题	2011-03	58.00	89
俄罗斯初等数学万题选——三角卷	2012-11	38.00	222
计算方法与几何证题	2011-06	28.00	129



哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室
已出版(即将出版)图书目录



书 名	出 版 时 间	定 价	编 号
463 个俄罗斯几何老问题	2012-01	28.00	152
近代欧氏几何学	2012-03	48.00	162
罗巴切夫斯基几何学及几何基础概要	2012-07	28.00	188
超越吉米多维奇——数列的极限	2009-11	48.00	58
Barban Davenport Halberstam 均值和	2009-01	40.00	33
初等数论难题集(第一卷)	2009-05	68.00	44
初等数论难题集(第二卷)(上、下)	2011-02	128.00	82,83
谈谈素数	2011-03	18.00	91
平方和	2011-03	18.00	92
数论概貌	2011-03	18.00	93
代数数论	2011-03	48.00	94
初等数论的知识与问题	2011-02	28.00	95
超越数论基础	2011-03	28.00	96
数论初等教程	2011-03	28.00	97
数论基础	2011-03	18.00	98
解析数论基础	2012-08	28.00	216
数论入门	2011-03	38.00	99
数论开篇	2012-07	28.00	194
解析数论引论	2011-03	48.00	100
无穷分析引论(上)	2013-04	88.00	247
无穷分析引论(下)	2013-04	98.00	245
数学分析中的一个新方法及其应用	2013-01	38.00	231
数学分析例选:通过范例学技巧	2013-01	88.00	243
三角级数论(上册)	2013-01	38.00	232
三角级数论(下册)	2013-01	48.00	233
基础数论	2011-03	28.00	101
超越数	2011-03	18.00	109
三角和方法	2011-03	18.00	112
谈谈不定方程	2011-05	28.00	119
整数论	2011-05	38.00	120
随机过程(Ⅰ)	2012-12	78.00	224
随机过程(Ⅱ)	2013-01	68.00	235
整数的性质	2012-11	38.00	192
初等数论 100 例	2011-05	18.00	122
初等数论经典例题	2012-07	18.00	204
最新世界各国数学奥林匹克中的初等数论试题(上、下)	2012-01	138.00	144,145
算术探索	2011-12	158.00	148



哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室

已出版(即将出版)图书目录



书 名	出 版 时 间	定 价	编 号
初等数论(Ⅰ)	2012-01	18.00	156
初等数论(Ⅱ)	2012-01	18.00	157
初等数论(Ⅲ)	2012-01	28.00	158
组合数学浅谈	2012-03	28.00	159
同余理论	2012-05	38.00	163
丢番图方程引论	2012-03	48.00	172
平面几何与数论中未解决的新老问题	2013-01	68.00	229
历届IMO试题集(1959—2005)	2006-05	58.00	5
历届CMO试题集	2008-09	28.00	40
历届加拿大数学奥林匹克试题集	2012-08	38.00	215
历届美国数学奥林匹克试题集:多解推广加强	2012-08	38.00	209
历届国际大学生数学竞赛试题集(1994—2010)	2012-01	28.00	143
全国大学生数学夏令营数学竞赛试题及解答	2007-03	28.00	15
全国大学生数学竞赛辅导教程	2012-07	28.00	189
历届美国大学生数学竞赛试题集	2009-03	88.00	43
前苏联大学生数学奥林匹克竞赛题解(上编)	2012-04	28.00	169
前苏联大学生数学奥林匹克竞赛题解(下编)	2012-04	38.00	170

整函数	2012-08	18.00	161
俄罗斯初等数学问题集	2012-05	38.00	177
俄罗斯函数问题集	2011-03	38.00	103
俄罗斯组合分析问题集	2011-01	48.00	79
博弈论精粹	2008-03	58.00	30
多项式和无理数	2008-01	68.00	22
模糊数据统计学	2008-03	48.00	31
模糊分析与特殊泛函空间	2013-01	68.00	241
受控理论与解析不等式	2012-05	78.00	165
解析不等式新论	2009-06	68.00	48
反问题的计算方法及应用	2011-11	28.00	147
建立不等式的方法	2011-03	98.00	104
数学奥林匹克不等式研究	2009-08	68.00	56
不等式研究(第二辑)	2012-02	68.00	153
初等数学研究(Ⅰ)	2008-09	68.00	37
初等数学研究(Ⅱ)(上、下)	2009-05	118.00	46,47
中国初等数学研究 2009卷(第1辑)	2009-05	20.00	45
中国初等数学研究 2010卷(第2辑)	2010-05	30.00	68
中国初等数学研究 2011卷(第3辑)	2011-07	60.00	127
中国初等数学研究 2012卷(第4辑)	2012-07	48.00	190



哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室

已出版(即将出版)图书目录



书 名	出 版 时 间	定 价	编 号
数阵及其应用	2012-02	28.00	164
绝对值方程一折边与组合图形的解析研究	2012-07	48.00	186
不等式的秘密(第一卷)	2012-02	28.00	154
初等不等式的证明方法	2010-06	38.00	123
数学奥林匹克不等式散论	2010-06	38.00	124
数学奥林匹克不等式欣赏	2011-09	38.00	138
数学奥林匹克超级题库(初中卷上)	2010-01	58.00	66
数学奥林匹克不等式证明方法和技巧(上、下)	2011-08	158.00	134,135
近代拓扑学研究	2013-04	38.00	239
500个最新世界著名数学智力趣题	2008-06	48.00	3
新编640个世界著名数学智力趣题	2013-02	88.00	242
400个最新世界著名数学最值问题	2008-09	48.00	36
500个世界著名数学征解问题	2009-06	48.00	52
400个中国最佳初等数学征解老问题	2010-01	48.00	60
500个俄罗斯数学经典老题	2011-01	28.00	81
1000个国外中学物理好题	2012-04	48.00	174
300个日本高考数学题	2012-05	38.00	142
500个前苏联早期高考数学试题及解答	2012-05	28.00	185

数学 我爱你	2008-01	28.00	20
精神的圣徒 别样的人生——60位中国数学家成长的历程	2008-09	48.00	39
数学史概论	2009-06	78.00	50
斐波那契数列	2010-02	28.00	65
数学拼盘和斐波那契魔方	2010-07	38.00	72
斐波那契数列欣赏	2011-01	28.00	160
数学的创造	2011-02	48.00	85
数学中的美	2011-02	38.00	84

最新全国及各省市高考数学试卷解法研究及点拨评析	2009-02	38.00	41
高考数学的理论与实践	2009-08	38.00	53
中考数学专题总复习	2007-04	28.00	6
向量法巧解数学高考题	2009-08	28.00	54
新编中学数学解题方法全书(高考复习卷)	2010-01	48.00	67
新编中学数学解题方法全书(高考真题卷)	2010-01	38.00	62
新编中学数学解题方法全书(高考精华卷)	2011-03	68.00	118



哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室

已出版(即将出版)图书目录



书 名	出 版 时 间	定 价	编 号
高考数学核心题型解题方法与技巧	2010-01	28.00	86
数学解题——靠数学思想给力(上)	2011-07	38.00	131
数学解题——靠数学思想给力(中)	2011-07	48.00	132
数学解题——靠数学思想给力(下)	2011-07	38.00	133
我怎样解题	2013-01	48.00	227
2011年全国及各省市高考数学试题审题要津与解法研究	2011-10	48.00	139
全国中考数学压轴题审题要津与解法研究	2013-04	78.00	248
新课标高考数学——五年试题分章详解(2007~2011)(上、下)	2011-10	78.00	140,141
30分钟拿下高考数学选择题、填空题	2012-01	48.00	146
高考数学压轴题解题诀窍(上)	2012-02	78.00	166
高考数学压轴题解题诀窍(下)	2012-03	28.00	167
格点和面积	2012-07	18.00	191
射影几何趣谈	2012-04	28.00	175
斯潘纳尔引理——从一道加拿大数学奥林匹克试题谈起	2012-12	18.00	228
李普希兹条件——从几道近年高考数学试题谈起	2012-10	18.00	221
拉格朗日中值定理——从一道北京高考试题的解法谈起	2012-10	18.00	197
闵可夫斯基定理——从一道清华大学自主招生试题谈起	2012-10	18.00	198
哈尔测度——从一道冬令营试题的背景谈起	2012-08	28.00	202
切比雪夫逼近问题——从一道中国台北数学奥林匹克试题谈起	2013-04	38.00	238
伯恩斯坦多项式与贝齐尔曲面——从一道全国高中数学联赛试题谈起	2013-03	38.00	236
卡塔兰猜想——从一道普特南竞赛试题谈起	即将出版		
麦卡锡函数和阿克曼函数——从一道前南斯拉夫数学奥林匹克试题谈起	2012-08	18.00	201
贝蒂定理与拉姆贝克莫斯尔定理——从一个拣石子游戏谈起	2012-08	18.00	217
皮亚诺曲线和豪斯道夫分球定理——从无限集谈起	2012-08	18.00	211
平面凸图形与凸多面体	2012-10	28.00	218
斯坦因豪斯问题——从一道二十五省市自治区中学数学竞赛试题谈起	2012-07	18.00	196
纽结理论中的亚历山大多项式与琼斯多项式——从一道北京市高一数学竞赛试题谈起	2012-07	28.00	195
原则与策略——从波利亚“解题表”谈起	2013-04	38.00	244
转化与化归——从三大尺规作图不能问题谈起	2012-08	28.00	214



哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室

已出版(即将出版)图书目录



书 名	出 版 时 间	定 价	编 号
代数几何中的贝祖定理——从一道 IMO 试题的解法谈起	2012-07	18.00	193
成功连贯理论与约当块理论——从一道比利时数学竞赛试题谈起	2012-04	18.00	180
磨光变换与范·德·瓦尔登猜想——从一道环球城市竞赛试题谈起	即将出版		
素数判定与大数分解	2012-08	18.00	199
置换多项式及其应用	2012-10	18.00	220
许瓦兹引理——从一道西德 1981 年数学奥林匹克试题谈起	即将出版		
椭圆函数与模函数——从一道美国加州大学洛杉矶分校 (UCLA) 博士资格考题谈起	2012-10	38.00	219
差分方程的拉格朗日方法——从一道 2011 年全国高考理科试题的解法谈起	2012-08	28.00	200
拉姆塞定理——从王诗成院士的一个问题谈起	即将出版		
力学在几何中的一些应用	2013-01	38.00	240
高斯散度定理、斯托克斯定理和平面格林定理——从一道国际大学生数学竞赛试题谈起	即将出版		
康托洛维奇不等式——从一道全国高中联赛试题谈起	即将出版		
西格尔引理——从一道第 18 届 IMO 试题的解法谈起	即将出版		
罗斯定理——从一道前苏联数学竞赛试题谈起	即将出版		
拉克斯定理和阿廷定理——从一道 IMO 试题的解法谈起	2013-04	58.00	246
毕卡大定理——从一道美国大学数学竞赛试题谈起	即将出版		
贝齐尔曲线——从一道全国高中联赛试题谈起	即将出版		
拉格朗日乘子定理——从一道 2005 年全国高中联赛试题谈起	即将出版		
雅可比定理——从一道日本数学奥林匹克试题谈起	2013-04	48.00	249
李天岩-约克定理——从一道波兰数学竞赛试题谈起	即将出版		
整系数多项式因式分解的一般方法——从克朗耐克算法谈起	即将出版		
布劳维不动点定理——从一道美国数学奥林匹克试题谈起	即将出版		
压缩不动点定理——从一道高考数学试题的解法谈起	即将出版		
伯恩赛德定理——从一道英国数学奥林匹克试题谈起	即将出版		
布查特-莫斯特定理——从一道上海市初中竞赛试题谈起	即将出版		
数论中的同余数问题——从一道普特南竞赛试题谈起	即将出版		
范·德蒙行列式——从一道美国数学奥林匹克试题谈起	即将出版		



哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室

已出版(即将出版)图书目录



书 名	出 版 时 间	定 价	编 号
中国剩余定理——从一道美国数学奥林匹克试题的解法谈起	即将出版		
牛顿程序与方程求根——从一道全国高考试题解法谈起	即将出版		
库默尔定理——从一道 IMO 预选试题谈起	即将出版		
卢丁定理——从一道冬令营试题的解法谈起	即将出版		
沃斯滕霍姆定理——从一道 IMO 预选试题谈起	即将出版		
卡尔松不等式——从一道莫斯科数学奥林匹克试题谈起	即将出版		
信息论中的香农熵——从一道近年高考压轴题谈起	即将出版		
约当不等式——从一道希望杯竞赛试题谈起	即将出版		
拉比诺维奇定理	即将出版		
刘维尔定理——从一道《美国数学月刊》征解问题的解法谈起	即将出版		
卡塔兰恒等式与级数求和——从一道 IMO 试题的解法谈起	即将出版		
勒让德猜想与素数分布——从一道爱尔兰竞赛试题谈起	即将出版		
天平称重与信息论——从一道基辅市数学奥林匹克试题谈起	即将出版		
艾思特曼定理——从一道 CMO 试题的解法谈起	即将出版		
一个爱尔特希问题——从一道西德数学奥林匹克试题谈起	即将出版		
有限群中的爱丁格尔问题——从一道北京市初中二年级数学竞赛试题谈起	即将出版		
贝克码与编码理论——从一道全国高中联赛试题谈起	即将出版		

中等数学英语阅读文选	2006-12	38.00	13
统计学专业英语	2007-03	28.00	16
统计学专业英语(第二版)	2012-07	48.00	176
幻方和魔方(第一卷)	2012-05	68.00	173
尘封的经典——初等数学经典文献选读(第一卷)	2012-07	48.00	205
尘封的经典——初等数学经典文献选读(第二卷)	2012-07	38.00	206

实变函数论	2012-06	78.00	181
非光滑优化及其变分分析	2013-01	48.00	230
初等微分拓扑学	2012-07	18.00	182
方程式论	2011-03	38.00	105
初级方程式论	2011-03	28.00	106
Galois 理论	2011-03	18.00	107
古典数学难题与伽罗瓦理论	2012-11	58.00	223
代数方程的根式解及伽罗瓦理论	2011-03	28.00	108



哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室

已出版(即将出版)图书目录



书 名	出 版 时 间	定 价	编 号
线性偏微分方程讲义	2011-03	18.00	110
N 体问题的周期解	2011-03	28.00	111
代数方程式论	2011-05	28.00	121
动力系统的不变量与函数方程	2011-07	48.00	137
基于短语评价的翻译知识获取	2012-02	48.00	168
应用随机过程	2012-04	48.00	187
矩阵论(上)	2013-06	58.00	250
矩阵论(下)	2013-06	48.00	251
三角级数论(哈代)	2013-06	48.00	254
圆锥曲线习题集(上)	2013-06	68.00	255
闵嗣鹤文集	2011-03	98.00	102
吴从炘数学活动三十年(1951~1980)	2010-07	99.00	32

吴振奎高等数学解题真经(概率统计卷)	2012-01	38.00	149
吴振奎高等数学解题真经(微积分卷)	2012-01	68.00	150
吴振奎高等数学解题真经(线性代数卷)	2012-01	58.00	151
高等数学解题全攻略(上卷)	2013-06	58.00	252
高等数学解题全攻略(下卷)	2013-06	58.00	253
钱昌本教你快乐学数学(上)	2011-12	48.00	155
钱昌本教你快乐学数学(下)	2012-03	58.00	171

联系地址:哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室
 网 址:<http://lpj.hit.edu.cn/>
 邮 编:150006
 联系电话:0451-86281378 13904613167
 E-mail:lpj1378@163.com

第 11 章 复对称,反对称与正交的矩阵 //1

§ 1 关于复正交矩阵与 U -矩阵的一些公式 //1

§ 2 复矩阵的极分解式 //5

§ 3 复对称矩阵的范式 //7

§ 4 复反对称矩阵的范式 //9

§ 5 复正交矩阵的范式 //14

第 12 章 奇异矩阵束 //19

§ 1 绪言 //19

§ 2 正则矩阵束 //20

§ 3 奇异矩阵束,化简定理 //23

§ 4 奇异矩阵束的范式 //28

§ 5 矩阵束的最小指标,矩阵束的严格等价性判定 //30

§ 6 奇异二次型束 //32

§ 7 对于微分方程的应用 // 36

第 13 章 非负元素所构成的矩阵 // 40

§ 1 一般的性质 // 40

§ 2 不可分解非负矩阵的谱性质 // 42

§ 3 可分解矩阵 // 52

§ 4 可分解矩阵的范式 // 60

§ 5 本原矩阵与非本原矩阵 // 64

§ 6 随机矩阵 // 68

§ 7 关于有限多个状态的齐次马尔可夫链的极限概率 // 72

§ 8 完全非负矩阵 // 80

§ 9 振荡矩阵 // 85

第 14 章 特征值的正则性的各种判定与局部化 // 93

§ 1 阿达玛正则性判定及其推广 // 93

§ 2 矩阵的范数 // 96

§ 3 阿达玛判定向分块矩阵的推广 // 99

§ 4 费德列尔正则性判定 // 100

§ 5 格尔什戈林圆与其他的局部化区域 // 101

第 15 章 矩阵论对于线性微分方程组研究的应用 // 106

§ 1 有变系数的线性微分方程组的一般的概念 // 106

§ 2 李雅普诺夫变换 // 109

§ 3 可化组 // 111

§ 4 可化组的范式,叶鲁金定理 // 113

§ 5 矩阵积分级数 // 116

§ 6 乘积积分,沃尔泰拉的微积分 // 120

§ 7 复区域上微分方程组的一般性质 // 124

§ 8 复区域上的乘积积分 // 126

§ 9 孤立奇点 // 129

§ 10 正则奇点 // 135

§ 11 可化解析组 // 148

§ 12 多个矩阵的解析函数及其在微分方程组的研究中的应用——伊·阿·拉波—丹尼列夫斯基的工作 // 151

第 16 章 路斯—胡尔维茨问题及其相邻近的问题 //154

- § 1 绪言 //154
- § 2 柯西指标 //156
- § 3 路斯算法 //158
- § 4 特殊情形的例子 //163
- § 5 李雅普诺夫定理 //166
- § 6 路斯—胡尔维茨定理 //170
- § 7 兰道公式 //176
- § 8 路斯—胡尔维茨定理中的特殊情形 //178
- § 9 二次型方法,多项式的不同实根个数的确定 //181
- § 10 有限秩的无限冈恰列夫矩阵 //183
- § 11 用其分子与分母的系数来定出任一有理分式的指标 //186
- § 12 路斯—胡尔维茨定理的第二个证明 //194
- § 13 路斯—胡尔维茨定理的一些补充,列纳尔与希帕尔的稳定性判定 //198
- § 14 胡尔维茨多项式的一些性质,斯蒂尔吉斯定理用连分式表出胡尔维茨多项式 //202
- § 15 稳定性区域,马尔可夫参数 //208
- § 16 与力矩问题的联系 //212
- § 17 胡尔维茨行列式与马尔可夫行列式之间的联系 //215
- § 18 马尔可夫定理与切比雪夫定理 //217
- § 19 广义的路斯—胡尔维茨问题 //224

第 17 章 特征数与奇异数的不等式 //227

- § 1 强数列 //227
- § 2 诺伊曼—霍尔诺不等式 //231
- § 3 魏尔不等式 //234
- § 4 埃尔米特算子特征数之和与乘积的最大、最小性质 //237
- § 5 算子之和与乘积的特征数与奇异数的不等式 //243
- § 6 关于埃尔米特算子之和与乘积的谱问题的其他提法 //245

注解 //252

索引 //259

编辑手记 //261

复对称,反对称与正交的矩阵

第
11
章

在上册第 9 章中关于欧几里得空间中线性算子的研究,已经讨论过实对称,反对称与正交的矩阵,亦即为以下诸关系所确定的实方阵

$$S^T = S, K^T = -K, O^T = O^{-1}$$

(此处 T 表示变矩阵为其转置矩阵). 在复数域中所有这些矩阵都只有线性初等因子且对这些矩阵建立范式,亦即“最简单的”实对称,反对称与正交的矩阵,实正交矩阵相似于所讨论的类型中的任意矩阵.

本章从事于复对称,反对称与正交的矩阵的研究. 要说清楚这些矩阵有怎样的初等因子且对它们来建立范式,这些范式比起对应的实矩阵的范式有显著的更复杂的结构. 首先,第一节中,在复正交, U - 矩阵与实对称、反对称和正交矩阵之间,建立一些有趣味的关系.

§ 1 关于复正交矩阵与 U - 矩阵的一些公式

从以下引理开始.

引理 1 1° 如果矩阵 G 同时是埃尔米特与正交的 ($G^T = \bar{G} = G^{-1}$), 那么它可以表为以下形状

$$G = I e^{iK} \tag{1}$$

其中 I 为实对称对合矩阵, K 是与 I 可交换的实反对称矩阵, 有

$$I = \bar{I} = I^T, I^2 = E, K = \bar{K} = -K^T \tag{2}$$

2° 如果补充这样一个条件, G 是一个正定的埃尔米特矩阵^①, 那么在式(1)中 $I=E$, 因而有

$$G = e^{iK} \quad (3)$$

证明 1° 设

$$G = S + iT \quad (4)$$

其中 S 与 T 为实矩阵. 那么

$$G = S - iT, G^T = S^T + iT^T \quad (5)$$

故由等式 $G = G^T$ 推得: $S = S^T, T = -T^T$, 亦即 S 是对称矩阵而 T 是一个反对称矩阵.

再者, 在复数等式 $GG = E$ 中代入 G 与 $\bar{G}$ 的表示式(4)与式(5), 并分解为两个实数等式, 得出

$$S^2 + T^2 = E, ST = TS \quad (6)$$

这里的第二个等式说明了 S 与 T 是可交换的.

根据上册第9章(§15末尾)的定理12', 可以用同一实正交变换化可交换的正规矩阵 S 与 T 为拟对角矩阵, 故有^②

$$S = O(s_1, s_1, s_2, s_2, \dots, s_q, s_q, s_{2q+1}, \dots, s_n)O^{-1} \quad (O = \bar{O} = O^{T^{-1}}) \quad (7)$$

$$T = O \left[\begin{pmatrix} 0 & t_1 \\ -t_1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & t_2 \\ -t_2 & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & t_q \\ -t_q & 0 \end{pmatrix}; 0, \dots, 0 \right] O^{-1}$$

(数 s_i 与 t_i 都是实数), 因此

$$G = S + iT = O \left[\begin{pmatrix} s_1 & it_1 \\ -it_1 & s_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} s_2 & it_2 \\ -it_2 & s_2 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} s_q & it_q \\ -it_q & s_q \end{pmatrix}; s_{2q+1}, \dots, s_n \right] O^{-1} \quad (8)$$

另一方面, 在等式(6)的第一个式子中代入 S 与 T 的表示式(7), 我们得出

$$s_1^2 - t_1^2 = 1, s_2^2 - t_2^2 = 1, \dots, s_q^2 - t_q^2 = 1; s_{2q+1} = \pm 1, \dots, s_n = \pm 1 \quad (9)$$

不难证明, 在 $s^2 - t^2 = 1$ 时, $\begin{pmatrix} s & it \\ -it & s \end{pmatrix}$ 形的矩阵常可表为形状

$$\begin{pmatrix} s & it \\ -it & s \end{pmatrix} = \epsilon e^{i \begin{pmatrix} 0 & \varphi \\ -\varphi & 0 \end{pmatrix}}$$

其中 $|s| = \operatorname{ch} \varphi, \epsilon t = \operatorname{sh} \varphi, \epsilon = \text{符号 } s$

故由式(8)与式(9), 我们得出

$$G = O(\pm e^{i \begin{pmatrix} 0 & \varphi_1 \\ -\varphi_1 & 0 \end{pmatrix}}, \pm e^{i \begin{pmatrix} 0 & \varphi_2 \\ -\varphi_2 & 0 \end{pmatrix}}, \dots, \pm e^{i \begin{pmatrix} 0 & \varphi_q \\ -\varphi_q & 0 \end{pmatrix}}; \pm 1, \dots, \pm 1)O^{-1} \quad (10)$$

① 即 G 为正定埃尔米特型的系数矩阵(参考上册第10章, §9).

② 参考上册第9章(§15末尾)定理12'的注.