奥赛与数学基础能力训练

AOSAI YU SHUXUE JICHU NENGLI XUNLIAN

初三分册

主 编/谭祖春 卢秀军

东北师范大学出版社

AOSAI YU SHUXUE JICHU NENGLI XUNLIAN

■东北师范大学出版社
长　春

奥赛与数学基础能力训练

初三分册

■谭祖春　卢秀军　主编

图书在版编目(CIP)数据

奥赛与数学基础能力训练. 初三分册/谭祖春,卢秀军主编. —3 版. —长春:东北师范大学出版社,2003.5
ISBN 7-5602-3415-1

Ⅰ.奥...　Ⅱ.①谭...②卢...　Ⅲ.数学课—初中—教学参考资料　Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 041044 号

□封面设计:张　然
□总　策　划:三编室　□责任校对:姜　虹
□责任编辑:刘忠谊　□责任印制:张允豪

东北师范大学出版社出版发行
长春市人民大街 5268 号(130024)
电话:0431—5695744　5688470
传真:0431—5695744　5695734
网址:http://www.nnup.com
电子函件:sdcbs@mail.jl.cn
东北师范大学出版社激光照排中心制版
磐石印刷有限责任公司印刷
2003 年 5 月第 3 版　2003 年 5 月第 10 次印刷
幅面尺寸:148 mm×210 mm　印张:9　字数:270 千
印数:36 200 — 40 000 册

定价 10.00 元

奥赛与数学基础能力训练

初三分册

主　编　谭祖春　卢秀军

副主编　叶红玉　刘文博

编　者　成艳清　张　亮　唐大友

成艳玲　袁小娟　李金英

金学哲　常学锋　王林辉

庄树前　高市

前　言

素质教育是教育发展的主流。对学生进行综合素质和能力的培养，是建立新世纪创造型人才队伍的需要，而数学竞赛便是国内外公认的进行数学能力训练的一种有益的智力活动，是早期发现、超前培养青少年优秀分子的极好办法。因此人们愈来愈关注数学竞赛；广大青少年数学爱好者跃跃欲试，准备在各级各类数学竞赛中大显身手。同时，全国不少地区也都进行各种形式的辅导，以帮助青少年崭露头角。几年来，我们在数学竞赛教学与研究的过程中，积累了许多经验，取得一些可喜的成果。在此基础上，我们紧扣初中数学大纲，重新修订了这套《奥赛与数学基础能力训练》丛书。这套书分初一、初二、初三分册，基本上概括了初中数学的重要基础知识、基本技能和基本方法，对初中数学竞赛范围内的知识作了系统归纳，特别着重对学生数学思维能力、数学思想方法、解题方法和解题能力的训练。

“同步”是这套书的一大特点，即编写时注意了初中数学教学内容与初中数学竞赛大纲的衔接，对于问题的阐述、解释与解答，均以初中学生的学力为基准，做到简捷、清楚、详略得当。

“新”是这套书的另一大特点，体现在：首先是对课堂所学知识的深刻理解，总结提高，从而有利于学生对初中阶段的学习内容进行复习整理、融会贯通和灵活运用。其次是帮助学生扩大视野，激发学习兴趣，提高数学修养，同时加强理论与实际的结合，利用所学知

识解决问题，加强应用意识和发展创造能力。

“**广**”是这套书的第三大特点，体现在：一取材广，二题型广，三适用范围广．本套书的例题和习题取材于全国各省、市、地区的数学竞赛试题，题型丰富，启发性强。题的难易程度适当，有教材中的基本题，有“＊”号题，有思考题，还有各类竞赛题，所以适合大多数学生学习选用。

“**实用**”是这套书的第四大特点，每一分册都分为若干专题，在每一个专题里，又根据需要分成若干小节，且每一个专题都具有相对的独立性和整体上的统一性，这样既便于老师根据实际情况备课选用，又便于学生在自学中自由选读。另外，每册书后都附有数学竞赛模拟试题及各章节的参考答案，供读者自我检测和评价。

总之，修订后，本丛书内容更新，题型更丰富，实战性更强，既是同学们参加全国初中数学竞赛的辅导材料，也是同学们初中数学总复习的良师益友，尤其对提高同学们中考B卷最后几题的得分能力大有裨益。我们深信这一点。

编　者

目　　录

第一讲　反　证　法

数学命题的证明，根据实际情况，可分为直接证法和间接证法．反证法就是一种最常见的间接证明方法．反证法不仅有利于数学竞赛题的解决，而且对思维能力的提高大有裨益．本讲拟对反证法的有关知识及其应用作一探讨．

一、基础知识

1．反证法

当一些命题不易从正面直接证明时，我们往往采用反证法．

所谓反证法，就是首先假设所要证明的结论不成立，然后再在这个假定条件下进行一系列的正确的逻辑推理，直至得出一个矛盾的结论来，并据此否定原先的假设，从而确认所要证明的结论成立．这里所说的矛盾，具有多重含义，可以是与题目中所给的已知条件相矛盾，也可以是与数学中已知的定理、公理和定义相矛盾，还可以是与日常生活中的事实相矛盾，甚至还可以是从两个不同角度进行推理所得出的结论之间相互矛盾(即自相矛盾)．

2．反证法的种类及关键所在

反证法的出发点在于假设所要证明的结论不成立．如果假设后只有一种情形，就称为简单归谬法；如果假设后有多种情形，则须分别在各种情形下一一推出矛盾，从而说明原结论成立，此时称为“穷举归谬法”．

反证法的主要手段是从求证的结论的反面出发，导出矛盾的结果．因此，如何导出矛盾，就成了使用反证法的关键所在．

二、例题解析

实践证明，反证法在解数学竞赛题中有奇效．那么，什么样的数学命题可以采用反证法呢？下面，我们通过例题作一归纳．

1．存在性命题

当结论以“至少……”、“至多……”、“必有……”等形式出现时，可采用反

证法.

例 1 若 a,b,c 为实数,设 $A=a^2-2b+\frac{1}{2}\pi$,$B=b^2-2c+\frac{1}{3}\pi$,$C=c^2-2a+\frac{1}{6}\pi$. 证明:A,B,C 中至少有一个的值大于 0.

分析:结论中含有"至少有"的字眼,故可考虑采用反证法,其结论反面为"A,B,C 都不大于 0".

证明:假设 $A\leqslant 0,B\leqslant 0,C\leqslant 0$,则 $A+B+C\leqslant 0$ ①

但 $A+B+C=\left(a^2-2b+\frac{1}{2}\pi\right)+\left(b^2-2c+\frac{1}{3}\pi\right)+\left(c^2-2a+\frac{1}{6}\pi\right)=(a^2-2a+1)+(b^2-2b+1)+(c^2-2c+1)+\pi-3=(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2+\pi-3$. 由于对任何实数 a,b,c,都有 $(a-1)^2\geqslant 0,(b-1)^2\geqslant 0,(c-1)^2\geqslant 0$,所以 $A+B+C\geqslant\pi-3>0$,这与①矛盾.

因此,A,B,C 中至少有一个大于 0.

例 2 证明:对任意正整数 k,$2k-1$ 和 $2k+1$ 两数中至少有一个不能等于两整数的平方和.

分析:采用反证法. 其结论反面为"存在某个正整数 k,使 $2k-1$ 和 $2k+1$ 均能表示成两个整数的平方和".

不妨设 $2k-1=a^2+b^2$,$2k+1=c^2+d^2$,

两式相减,得 $(c^2+d^2)-(a^2+b^2)=2$. ①

因 $2k-1$ 为奇数,故 a 与 b 必为一奇一偶,不妨设 $a=2m_1$,$b=2m_2+1$,则

$$a^2+b^2=(2m_1)^2+(2m_2+1)^2=$$
$$4(m_1^{\ 2}+m_2^{\ 2}+m_2)+1=$$
$$4m+1 \qquad ②$$

其中 $m=m_1^{\ 2}+m_2^{\ 2}+m_2$,

同理 $c^2+d^2=4P+1$. ③

将②,③代入①,得

$$4(P-m)=2,P-m=\frac{1}{2},$$

即:整数 $=\frac{1}{2}$,这是不可能的.

所以,不存在正整数 k,使 $2k-1$,$2k+1$ 同时表示为两个整数的平方和.

例 3 把地图上直线距离最近的城市连结起来,又任意两城市距离不相等. 试证:每一个城市至多与其余五个城市相连.

分析:采用反证法,其结论的反面为"至少有一城市与其余六个城市相连".

不妨设城市 A 与六个城市 $A_1, A_2, \cdots, A_6$ 用线段 AA_1, $AA_2, \cdots, AA_6$ 连结(如图 1 - 1). 连结 A_1A_2,由已知条件知:$AA_1 < A_1A_2$, $AA_2 < A_1A_2$,即 A_1A_2 为 $\triangle A_1AA_2$ 中的最大边,从而 $\angle A_1AA_2 > 60°$.

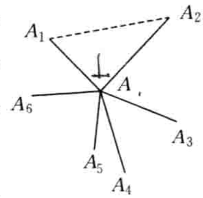

图 1 - 1

同理可证:$\angle A_2AA_3 > 60°$, $\angle A_3AA_4 > 60°$, $\cdots$, $\angle A_6AA_1 > 60°$.

因此,$\angle A_1AA_2 + \angle A_2AA_3 + \cdots + \angle A_6AA_1 > 360°$ ①

但由图可知,$\angle A_1AA_2 + \angle A_2AA_3 + \cdots + \angle A_6AA_1$ 为一周角,即 $360°$,与①矛盾.

所以原命题成立.

例 4 已知:如图 1 - 2,$\triangle ABC$ 的面积为 S,$\triangle ADE$,$\triangle BEF$,$\triangle DCF$ 的面积分别为 S_1, S_2, S_3. 求证:在 S_1, S_2, S_3 中至少有一个不大于 $\frac{1}{4}S$.

分析:采用反证法,其结论的反面为"S_1, S_2, S_3 都大于 $\frac{1}{4}S$". 即 $S_1 > \frac{1}{4}S$, $S_2 > \frac{1}{4}S$, $S_3 > \frac{1}{4}S$.

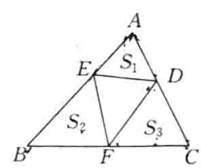

图 1 - 2

易知 $S_1 = \frac{1}{2}AE \cdot \cancel{DE} \cdot \sin A$, $S = \frac{1}{2}AB \cdot AC\sin A$,从而
AD

由 $S_1 > \frac{1}{4}S$,得

$$AE \cdot AD > \frac{1}{4}AB \cdot AC \quad ①$$

同理可得 $$BE \cdot BF > \frac{1}{4}AB \cdot AC \quad ②$$

$$CF \cdot CD > \frac{1}{4}CB \cdot CA \quad ③$$

由①×②×③,得

$$AE \cdot BE \cdot BF \cdot CF \cdot AD \cdot CD > \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot AB^2 \cdot AC^2 \cdot CA^2 \quad ④$$

而 $AE+BE \geqslant 2\sqrt{AE \cdot BE}$,

即 $AE \cdot BE \leqslant \frac{1}{4}(AE+BE)^2 = \frac{1}{4}AB^2$,

即 $AE \cdot BE \leqslant \frac{1}{4}AB^2$ ⑤

同理可得 $BF \cdot CF \leqslant \frac{1}{4}BC^2$ ⑥

$CD \cdot AD \leqslant \frac{1}{4}CA^2$ ⑦

由⑤×⑥×⑦,得

$$AB \cdot BE \cdot BF \cdot CF \cdot AD \cdot CD \leqslant \left(\frac{1}{4}\right)^3 AB^2 \cdot BC^2 \cdot CA^2 \quad ⑧$$

显然④与⑧矛盾.

故在 S_1, S_2, S_3 中至少有一个不大于 $\frac{1}{4}S$.

例 5 若 a,b,c 都为正实数,且方程 $ax^2+bx+c=0$ 有实根,试证:a,b,c 中至少有一个数不小于 $\frac{4}{9}(a+b+c)$.

分析:采用反证法,其结论的反面为"a,b,c 均小于 $\frac{4}{9}(a+b+c)$",即 $a<\frac{4}{9}(a+b+c)$, $b<\frac{4}{9}(a+b+c)$, $c<\frac{4}{9}(a+b+c)$.

由假设可得 $\begin{cases} 5a<4(b+c) & ① \\ 5b<4(a+c) & ② \\ 5c<4(a+b) & ③ \end{cases}$

另由已知条件有:$b^2-4ac \geqslant 0$ ④

若 b 不为 a,b,c 中最大的一个正数,不失一般性,可设 $a \geqslant b$,由④可得

$4c \leqslant \frac{b^2}{a} \leqslant b$,即 $4c \leqslant b$ ⑤

而由①可知 $4c > 5a-4b \geqslant a \geqslant b$,即 $4c > b$,这与⑤矛盾.

若 b 为 a,b,c 中最大的正数,则 $b>a, b>c$. 由②可知 $b<4(a-b)+4c<4c$,即 $b<4c$,从而 $(b-4c)(b-c)<0$,即

$b^2-5bc+4c^2<0$.

故 $b^2<5bc-4c^2$，因 $b^2\geqslant 4ac$，所以 $4ac\leqslant 5bc-4c^2$，即 $4(a+c)<5b$，这与②矛盾.

综上所述，假设不成立，原命题正确.

注：对上述存在性问题，我们都采用了反证法，须要注意的是，在作出与命题结论相反的假设（即结论的反面）时必须正确，否则一切都会徒劳无功. 当结论的反面为单一情形时，假设易找出；但若结论的反面是多种情形或难以表述时，假设就要仔细推敲了. 比如"至少一个"与"一个也没有"，"至少有 n 个"与"至多有 $n-1$ 个"，"至多两个"与"至少三个"，"都是"与"不都是"，"任意"与"存在一个（反面）"等等.

2. 惟一性命题

当结论以"有惟一……"、"只有一个……"、"……共点"、"……共线"等形式出现时，可考虑采用反证法证明.

例 1 求证：方程 $x^3+2y^3-4z^3=0$ 只有一组整数解：$x=y=z=0$.

分析：采用反证法，其结论的反面是"至少有两个"，较易处理.

显然 $x=y=z=0$ 是原方程的一组解，假设除零解外，x_0,y_0,z_0 为方程的另一组解，则 x_0,y_0,z_0 不全为 0，且均为整数，设 $x_0\neq 0$，因 ${x_0}^3+2{y_0}^3-4{z_0}^3=0$，故 ${x_0}^3=-2{y_0}^3+4{z_0}^3$，易知 x_0 必为偶数.

令 $x_0=2x_1$，则 ${y_0}^3=-4{x_1}^3+2{z_0}^3$，于是 y_0 为偶数.

令 $y_0=2y_1$，则 ${z_0}^3=2{x_1}^3+4{y_1}^3$，于是 z_0 也为偶数.

令 $z_0=2z_1$，则 ${x_1}^3+2{y_1}^3-4{z_1}^3=0$，即 $x=x_1,y=y_1,z=z_1$ 为方程的一组整数解.

仿上述讨论得知：x_1,y_1,z_1 也均为偶数，且 $x_2=\frac{1}{2}x_1=\frac{1}{4}x_0$，$y_2=\frac{1}{2}y_1=\frac{1}{4}y_0$，$z_2=\frac{1}{2}z_1=\frac{1}{4}z_0$ 都为偶数且满足方程，如此继续下去，对任何自然数 n，$x_n=\frac{x_0}{2^n}$，$y_n=\frac{y_0}{2^n}$，$z_n=\frac{z_0}{2^n}$ 都为偶数且满足方程.

但 $x_0\neq 0$，故当 n 很大时，$0<\frac{x_0}{2^n}<1$，这与 x_n 为整数（或偶数）矛盾.

综上所述，原方程只有一组整数解 $x=y=z=0$.

例 2 设 a,b,c 是满足 $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 的正数，试证方程组
$$\begin{cases}\sqrt{y-a}+\sqrt{z-a}=1 & ①\\ \sqrt{z-b}+\sqrt{x-b}=1 & ②\\ \sqrt{x-c}+\sqrt{y-c}=1 & ③\end{cases}$$
有惟一的实数解.

分析：采用反证法，但本题必须先证明它有一组解，然后用反证法证明惟一性.

在边长为 1 的正△ABC 内必存在一点 P，它到三边的距离分别为 $\sqrt{a}$，$\sqrt{b}$，$\sqrt{c}$，利用等积法可知 $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，取 $x_1=PA^2$，$y_1=PB^2$，$z_1=PC^2$，则 $x=x_1$，$y=y_1$，$z=z_1$ 即为原方程组的解.

若设 $x=x_2$，$y=y_2$，$z=z_2$ 也为原方程组的解，它与 $x=x_1$，$y=y_1$，$z=z_1$ 中至少有一个对应的数不等，不妨设 $x_2\neq x_1$.

若 $x_2>x_1$，则 $\sqrt{x_2-c}>\sqrt{x_1-c}$，由③知 $\sqrt{y_2-c}<\sqrt{y_1-c}$，于是 $y_2<y_1$；由①知 $z_2>z_1$，再由②知 $x_2<x_1$，自相矛盾，故 $x_2=x_1$，同时可证 $y_2=y_1$，$z_2=z_1$，即原方程组只有惟一的实数解.

在本题中，证明存在一个根时，采用了构造法.

例 3 凸六边形的每一条对角线把它分成面积相等的两部分. 求证：这三条对角线相交于一点（如图 1 - 3）.

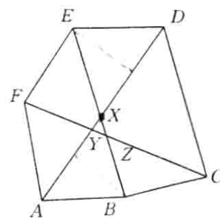

图 1 - 3

分析：假设对角线 AD，BE，CF 不交于一点，而组成一个三角形△XYZ（如图），设该六边形的面积为 S，依题意有：$S_{ABCD}=S_{BCDE}=\frac{S}{2}$，从而 $S_{\triangle ABX}=S_{\triangle DEX}$.

同理 $S_{\triangle BCZ}=S_{\triangle EFZ}$，$S_{\triangle CDY}=S_{\triangle AYF}$.

从而有：$AX\cdot BX=DX\cdot EX$，

$CY\cdot DY=FY\cdot AY$，

$FZ\cdot EZ=BZ\cdot CZ$.

由图知：$(AY+XY)(BZ+ZX)=DX\cdot EX$，

$(CZ+ZY)(DX+XY)=FY\cdot AY$，

$$(FY+YZ)(EX+XZ)=BZ\cdot CZ.$$

把上述三式两端分别相乘，整理得

$$AY\cdot BZ\cdot CZ\cdot DX\cdot EX\cdot FY=(AY+YX)(BZ+ZX)\cdot(CZ+ZY)(DX+XY)\cdot(FY+YZ)(EX+XZ)\qquad(*)$$

而由假设可知：$XY>0$，$YZ>0$，$ZX>0$，从而（$*$）式不成立.

因此对角线 AD、BE、CF 必交于一点.

3. 否定性命题

当结论以“没有……”、“都不……”、“不是……”、“不能……”、“不存在……”等否定形式给出时，由于直接证明一般不易入手，从而可尝试用反证法证明.

例 1　证明：不存在这样的整数，把它的首位数字移到末位之后，得到的新数为原数的 2 倍.

$a\,\boxed{x}\quad N\qquad a\times10^{n-1}+x=N$

$\boxed{x}\,a\qquad 10x+a=2N$

$\Rightarrow 10(N-a\times10^{n-1})+a=2N$

分析：采用反证法.

假设存在这样的整数 N 满足题设条件，不妨设 N 为 n 位数且首位数字为 $a(1\leqslant a\leqslant 9)$，则依题意有

$$10N-a\cdot10^{n}+a=2N,$$

即 $8N=a(10^{n}-1)=a\cdot\underbrace{999\cdots9}_{n\text{个}9}$，

因 $(8,\underbrace{999\cdots9}_{n\text{个}9})=1$，故 $a=8$，$N=\underbrace{99\cdots9}_{n\text{个}9}$，此时 N 的首位数字为 9，即 $a=9$，这与 $a=8$ 矛盾.

所以，这种数是不存在的.

例 2　设 P 为一个三位质数，它的百位上、十位上、个位上的数字分别为 a、b、c. 证明：关于 x 的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 无整数解.

分析：易知 $P=100a+10b+c$，其中 a、b、c 是不大于 9 且不小于 1 的自然数.

假设 x_0 为二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的整数根，

即 $ax_0{}^2+bx_0+c=0$，$\qquad(*)$

则 $ax_0{}^2+bx_0+c=ax_0+bx_0+(P-100a-10b)=0$，

$P=100a+10b-ax_0{}^2-bx_0=$

$(100-x_0^2)a+(10-x_0)b=$

$(10-x_0)[(10+x_0)a+b]$.

注意到(*)式中，$x_0\neq 0$，否则 $c=0$，与 P 为质数矛盾；同时 x_0 也不能为正数，否则由 $a>0,b>0,c>0,x_0>0$，将有 $ax_0{}^2+bx_0+c>0$，这与(*)式矛盾，从而 $x_0<0$.

若 $x_0<0$，由 $ax_0{}^2+bx_0+c=0$，得

$c=-x_0(b+ax_0)$.

其中 $-x_0$，$b+ax_0$ 都为正数(否则 $c<0$)，因而 $c\geqslant -x_0$，即 $1\leqslant -x_0\leqslant 9$，$11\leqslant 10-x_0\leqslant 19$. 这表明 $10-x_0$ 是一个比 1 大比 P 小的整数.

由 $P=(10-x_0)[(10+x_0)a+b]$看出，P 有因数 $10-x_0$，可见 P 为合数，这与 P 为质数矛盾.

综上所述，方程 $ax^2+bx+c=0$ 无整数解.

例 3 试证适合 $xy+yz+zx=1$ 的 x,y 必不能满足 $x+y+z=xyz$.

分析：采用反证法.

假设实数 x,y,z 既能满足 $xy+yz+zx=1$，又满足 $x+y+z=xyz$，则方程组

$$\begin{cases}xy+yz+zx=1, & ① \\ x+y+z=xyz & ②\end{cases}$$

有实数解.

由②得 $(xy-1)z=x+y$，

显然 $xy-1\neq 0$，否则 $x+y=0$，从而可得 $y^2=-1$，与方程组有实数解矛盾.

所以 $z=\dfrac{x+y}{xy-1}$，将 z 代入①，得

$xy+\dfrac{(x+y)^2}{xy-1}=1$.

去分母可得 $x^2y^2+x^2+y^2+1=0$，即 $(x^2+1)(y^2+1)=0$，亦即 $x^2=-1$ 或 $y^2=-1$，同样与方程组有实数解矛盾.

所以原命题是正确的.

例 4 试证：$\triangle ABC$ 内不存在一点 P，使得过 P 点的任一条直线把 $\triangle ABC$ 的面积分成相等的两部分.