全国普通高等院校计算机专业精品规划教材

离散数学

（第 2 版）

朱保平　叶有培　编著
金　忠　张　琨

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

离散数学

（第2版）

朱保平　叶有培　金　忠　张　琨　编著

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书对2006年北京理工大学出版社出版的《离散数学》中的内容进行了较多的调整与更新，并在相关章节增加了典型例题及解答，在语言文字方面做了进一步加工处理，同时修正了原教材中的部分疏漏之处。

本书介绍了离散数学的基本理论及方法，主要有命题演算基础、命题演算的推理理论、谓词演算基础、谓词演算的推理理论、递归函数论、集合论、关系、函数与集合的势、图、树与有序树、群与环、格与布尔代数等内容。

本书可作为高等院校计算机科学与技术及相关专业的教材，也可作为教师、研究生或软件技术人员的参考书。

图书在版编目（CIP）数据

离散数学/朱保平等编著. —2版. —北京：北京理工大学出版社，2014.2
ISBN 978-7-5640-8668-8

Ⅰ.①离…　Ⅱ.①朱…　Ⅲ.①离散数学-高等学校-教材　Ⅳ.①O158

中国版本图书馆CIP数据核字（2014）第025456号

出版发行/北京理工大学出版社有限责任公司
社　　址/北京市海淀区中关村南大街5号
邮　　编/100081
电　　话/（010）68914775（办公室）
　　　　　82562903（教材售后服务热线）
　　　　　68948351（其他图书服务热线）
网　　址/http：//www.bitpress.com.cn
经　　销/全国各地新华书店
印　　刷/北京泽宇印刷有限公司
开　　本/787毫米×1092毫米　1/16
印　　张/15
字　　数/347千字
版　　次/2014年2月第2版　2014年2月第1次印刷
定　　价/33.00元

责任编辑/王俊洁
文案编辑/侯瑞娜
责任校对/周瑞红
责任印制/马振武

图书出现印装质量问题，请拨打售后服务热线，本社负责调换

前　言

“离散数学”是计算机科学的重要理论基础课程，它不仅是计算机科学的核心课程，而且已成为电子信息类专业的热门选修课。离散数学与计算机科学有着十分密切的关系，无论是数字计算机雏形的图灵机，还是数字电路的布尔代数以及作为程序设计工具的语言、关系数据库、知识表示、人工智能等领域均离不开离散数学。同时两者的相互渗透推动了离散数学的发展，因此学好离散数学对于计算机科学与理论的研究有着重要的作用。

本书对 2006 年北京理工大学出版社出版的《离散数学》中的内容进行了较多的调整与更新，并在相关章节增加了典型例题及解答。在语言文字方面做了进一步的加工处理，同时订正了原教材中的部分疏漏之处。

本书主要分成两大部分：前半部分主要讲述了数理逻辑的基本理论及基本方法，包括命题演算基础及其推理理论、谓词演算基础及其推理理论和递归函数论等内容；后半部分主要讲述了离散数学的基本理论及基本方法，包括集合论、关系、函数与集合的势、图、树与有序树、群与环、格与布尔代数等内容。

本书第 1 ~ 5 章、第 9 ~ 10 章由朱保平修订，第 6 ~ 8 章、第 11 ~ 12 章由金忠修订。《离散数学》（第 1 版）由朱保平、叶有培、张琨编著。

由于作者水平有限，书中难免存在疏漏和不足之处，恳请读者批评指正。

编　者

CONTENTS 目录

第 1 章　命题演算基础 …… 1

1.1　命题和联结词 …… 1

1.1.1　命题 …… 1

1.1.2　联结词 …… 2

1.1.3　合式公式 …… 5

1.2　真假性 …… 6

1.2.1　解释 …… 6

1.2.2　等价公式 …… 6

1.2.3　联结词的完备集 …… 8

1.2.4　对偶式和内否式 …… 9

1.3　范式及其应用 …… 10

1.3.1　范式 …… 10

1.3.2　主范式 …… 12

1.3.3　范式的应用 …… 14

1.4　典型例题及解答 …… 15

第 2 章　命题演算的推理理论 …… 18

2.1　命题演算的公理系统 …… 18

2.1.1　公理系统的组成部分 …… 19

2.1.2　公理系统的推理过程 …… 20

2.2　若干重要的导出规则 …… 21

2.2.1　关于分离规则的讨论 …… 21

2.2.2　关于公理和定理的导出规则 …… 22

2.3　命题演算的假设推理系统 …… 23

2.3.1　假设推理系统的组成 …… 23

2.3.2　假设推理系统的推理过程 …… 24

2.3.3　额外假设推理法 …… 25

2.4　命题演算的归结推理法 …… 27

2.4.1　归结证明过程 …… 27

2.4.2　归结证明举例 …… 28

2.5　典型例题及解答 …… 29

第 3 章　谓词演算基础 …… 33

3.1 个体和谓词 …… 33
3.1.1 个体 …… 33
3.1.2 谓词 …… 34
3.2 函数项和量词 …… 36
3.2.1 函数项 …… 36
3.2.2 量词 …… 36
3.3 自由变元和约束变元 …… 38
3.3.1 自由出现和约束出现 …… 38
3.3.2 改名和代入 …… 38
3.4 永真性和可满足性 …… 40
3.4.1 真假性 …… 40
3.4.2 同真假性、永真性和可满足性 …… 41
3.4.3 范式 …… 45
3.5 唯一性量词和摹状词 …… 46
3.5.1 唯一性量词 …… 46
3.5.2 摹状词 …… 47
3.6 典型例题及解答 …… 47
第4章 谓词演算的推理理论 …… 51
4.1 谓词演算的永真推理系统 …… 51
4.1.1 公理系统的组成部分 …… 51
4.1.2 公理系统的推理过程 …… 53
4.2 谓词演算的假设推理系统 …… 54
4.2.1 假设推理系统的组成及证明方法 …… 54
4.2.2 定理的推导过程 …… 55
4.3 谓词演算的归结推理系统 …… 56
4.3.1 置换 …… 57
4.3.2 归结反演系统 …… 57
4.3.3 霍恩子句逻辑程序 …… 60
4.4 典型例题及解答 …… 62
第5章 递归函数论 …… 66
5.1 数论函数和数论谓词 …… 66
5.1.1 数论函数 …… 66
5.1.2 数论谓词和特征函数 …… 67
5.2 函数的构造 …… 69
5.2.1 迭置法 …… 69
5.2.2 算子法 …… 70
5.2.3 原始递归函数 …… 71
第6章 集合 …… 74
6.1 集合的基本概念 …… 74
6.1.1 集合的定义 …… 74

6.1.2　集合的表示 …… 75
6.1.3　集合的包含关系 …… 76
6.1.4　集合的特点 …… 76
6.2　集合的基本运算 …… 77
6.2.1　集合的并、交、差 …… 77
6.2.2　集合的对称差 …… 79
6.2.3　文氏图 …… 79
6.2.4　集合的幂集合 …… 81
6.2.5　多个集合的并与交 …… 81
6.3　全集和集合的补 …… 82
6.3.1　全集和集合的补 …… 82
6.3.2　基本运算定理 …… 83
6.4　自然数与自然数集 …… 84
6.4.1　后继 …… 84
6.4.2　自然数、自然数集 …… 84
6.4.3　皮亚诺公理假设 …… 85
6.4.4　自然数集的性质 …… 86
6.4.5　集合的归纳定义 …… 87
6.5　包含与排斥原理 …… 87
6.6　典型例题及解答 …… 90
第7章　关系 …… 94
7.1　集合的笛卡儿积集 …… 94
7.1.1　有序二元组 …… 94
7.1.2　笛卡尔积集 …… 94
7.1.3　有序 n 元组、n 个集合的笛卡儿积集 …… 95
7.2　二元关系的基本概念 …… 96
7.2.1　二元关系 …… 96
7.2.2　二元关系的表示 …… 96
7.2.3　二元关系的交、并、差、对称差 …… 97
7.2.4　二元关系的逆与复合 …… 97
7.3　二元关系的性质 …… 99
7.3.1　自反性、反自反性、对称性、反对称性、传递性 …… 99
7.3.2　关于二元关系性质的判定定理 …… 100
7.4　二元关系的闭包运算 …… 102
7.4.1　自反闭包、对称闭包、传递闭包 …… 102
7.4.2　闭包的判定定理 …… 103
7.5　等价关系和集合的划分 …… 106
7.5.1　等价关系与等价类 …… 106
7.5.2　商集合 …… 107
7.5.3　集合的划分 …… 108

7.6　偏序关系和格 …… 109
7.7　典型例题及解答 …… 112
第8章　函数与集合的势 …… 118
8.1　函数的基本概念 …… 118
8.2　函数的复合和可逆函数 …… 120
8.3　无限集 …… 124
8.4　集合势大小的比较 …… 127
8.5　鸽巢原理 …… 128
8.6　典型例题及解答 …… 129
第9章　图 …… 135
9.1　图的基本概念 …… 135
9.2　图中的通路、图的连通性和图的矩阵表示 …… 138
9.3　带权图与带权图中的最短通路 …… 141
9.4　欧拉图 …… 143
9.5　哈密尔顿图 …… 146
9.6　二部图 …… 149
9.7　平面图与平面图的着色 …… 150
9.8　典型例题及解答 …… 154
第10章　树与有序树 …… 160
10.1　树的基本概念 …… 160
10.2　连通图的生成树和带权连通图的最小生成树 …… 161
10.3　有序树 …… 164
10.4　前缀码和最优二分树 …… 166
10.5　典型例题及解答 …… 169
第11章　群和环 …… 172
11.1　代数运算的基本概念 …… 172
11.1.1　代数运算 …… 172
11.1.2　交换律、结合律 …… 173
11.1.3　n 元运算 …… 175
11.2　代数系统和半群 …… 175
11.3　群的基本概念 …… 178
11.4　群的几个等价定义 …… 184
11.5　变换群和置换群 …… 186
11.6　循环群 …… 190
11.7　子群，子集生成的子群 …… 191
11.8　子群的陪集 …… 194
11.9　正规子群、商群 …… 198
11.10　环和域 …… 202
11.11　典型例题及解答 …… 204
第12章　格与布尔代数 …… 210

12.1 格定义的代数系统 …… 210
12.2 格的代数定义 …… 212
12.3 一些特殊的格 …… 215
12.4 有限布尔代数的唯一性 …… 218
12.5 布尔函数和布尔表达式 …… 221
12.6 典型例题及解答 …… 224

第1章 命题演算基础

1.1 命题和联结词

1.1.1 命题

定义 1：凡是可以判断真假的陈述句称为命题。

命题具有两个特征：首先，命题应是一个陈述句，感叹句、疑问句、祈使句等均不是命题；其次，这个陈述句所表达的内容可决定真或假，且真假不可兼，即它应有真假性。

如果一个命题取为真，则说该命题的值为真，用 T 表示真；如果一个命题取为假，则说该命题的值为假，用 F 表示假。

下面举例说明命题的概念：

（1）微博是一种网络应用服务。

它是陈述句，可决定其真值为 T，所以为命题。

（2）2012 年 12 月 21 日是玛雅人所说的世界末日。

它是陈述句，可决定其真值为 F，所以为命题。

（3）课堂上请保持安静！

它不是陈述句，不是命题。

（4）我正在说谎。

悖论，虽为陈述句，但不能判断其真值，不是命题。

（5）宇宙中存在外星人。

虽然至今还不知道宇宙中是否有外星人，但宇宙中是否有外星人是客观存在的，且要么有、要么没有，它的真值是客观存在的，而且是唯一的，因此它是命题。

（6）微信是一种智能手机应用程序吗？

疑问句，不是陈述句，不是命题。

命题具有两种类型：原子命题和复合命题。

定义 2：不可剖开或分解为更简单命题的命题称为原子命题。

如“2 为质数”“雪是白的”等就是原子命题。

定义 3：由成分命题利用联结词构成的命题称为复合命题。

如“1+1=3”且“雪是白的”；“如果1+1=3，则雪是黑的”等就是复合命题，其中语句中的“且”“如果……，则……”等称为联结词。

注意，有些命题看似复合命题，但实际上为原子命题。

如语句“TOM 和 MARY 是夫妻”就不能分解为“TOM 是夫妻”和“MARY 是夫妻”，因为某一个人不能成为夫妻，故应把它理解为原子命题。

数理逻辑是研究前提和结论间的形式关系，而不研究具体的内容。为此采用数学方法将命题符号化（也称为形式化方法）十分重要，约定用大写字母表示命题。

例如

P 表示“1+1=3”；

Q 表示“雪是黑的”。

定义4：如果当 P 表示任何命题时，P 称为命题变元。

注意，命题变元和命题是两个不同的概念。

命题指具体的陈述句有确定的真值。

命题变元没有确定的真值，只有代以具体的命题时才能确定它的真值。换言之，命题变元是以真假为变域的变元，用 P，Q，R 等表示命题变元。

1.1.2 联结词

下面介绍五个常用的联结词：

$\neg$、$\wedge$、$\vee$、$\rightarrow$、$\leftrightarrow$。

一、否定词（$\neg$）

否定词“$\neg$”是一个一元联结词，利用该联结词可由成分命题构成复合命题 $\neg P$，读为非 P。

日常语句中的“非”“不”和“并非”等表示逻辑非。

非 P 的真假与 P 的真假关系定义如下：

$\neg P$ 为真当且仅当 P 为假。

其真值表如图1.1所示。

P	$\neg P$
T	F
F	T

图1.1　逻辑非的真值表

例1：P 表示今天是星期天。

$\neg P$ 表示今天不是星期天。

二、合取词（$\wedge$）

合取词“$\wedge$”是一个二元联结词，利用该联结词可将成分命题 P 和 Q 构成复合命题 $P\wedge Q$，读为 P 合取 Q。其中 $P\wedge Q$ 称为合取式，P，Q 称为 $P\wedge Q$ 的合取项。

日常语言中的“且”“与”等均表示为合取。

P 合取 Q 的真假和 P，Q 的真假关系定义如下：

$P\wedge Q$ 为真当且仅当 P 和 Q 均真。

其真值表如图1.2所示。

P	Q	$P\wedge Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

图1.2　合取词的真值表

例2：1+1=2且雪是白的。

解：令 P 表示“1+1=2”，

Q 表示“雪是白的”。

则原句译为：$P\wedge Q$。

例 3：你喜欢微博，但我喜欢微信。

解：令P 表示“你喜欢微博”，

Q 表示“我喜欢微信”，

则原句译为：$P \wedge Q$。

三、析取词（$\vee$）

析取词“$\vee$”是一个二元联结词，利用成分命题 P 和 Q 可构成复合命题 $P \vee Q$，读为 P 析取 Q。其中 $P \vee Q$ 称为析取式，P 和 Q 称为 $P \vee Q$ 的析取项。

日常语言中的“或”等可用析取词来表示。

P 析取 Q 的真假和 P，Q 的真假关系定义如下：

$P \vee Q$ 为假当且仅当 P 和 Q 均假。

其真值表如图 1.3 所示。

P	Q	$P \vee Q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

图 1.3　析取词的真值表

例 4：今天下雨或下雪。

解：令P 表示“今天下雨”，

Q 表示“今天下雪”，

则原句译为：$P \vee Q$。

例 5：MARY 明天或后天去巴厘岛是不对的。

解：令P 表示“MARY 明天去巴厘岛”，

Q 表示“MARY 后天去巴厘岛”，

则原句译为：$\neg(P \vee Q)$。

注意，语言中“或”在现实生活中有可兼性和不可兼性，在数理逻辑中规定只有唯一的一种意思，即可兼的“或”。

四、蕴含词（$\to$）

蕴含词“$\to$”是一个二元联结词，利用成分命题 P 和 Q 可构成复合命题，读为 P 蕴含 Q，其中 $P \to Q$ 称为蕴含式，P 称为蕴含前件，Q 称为蕴含件，蕴含词也可用“$\supset$”表示。

日常语言中的“如果……，则……”等可用蕴含词来表示。

P 蕴含 Q 的真假和 P，Q 的真假关系定义如下：

$P \to Q$ 为假当且仅当 P 真 Q 假。

其真值表如图 1.4 所示。

P	Q	$P \to Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

图 1.4　蕴含词的真值表

例 6：如果 $1+1=3$，则雪是黑的。

解：令P 表示“$1+1=3$”，

Q 表示“雪是黑的”，

则原句译为：$P \to Q$。

例 7：只有努力学习、认真复习，才能取得好成绩。

解：令P 表示“努力学习”，

Q 表示“认真复习”，

R 表示“取得好成绩”，

则原句译为：$R \to (P \wedge Q)$。

注意，该语句不能译为$(P \wedge Q) \to R$，翻译时一定要考虑条件的必要性和充分性。

从真值表可看出，当蕴含前件 P 取为 F 时，不管其后件 Q 取 T 或 F，蕴含式 $P \to Q$ 总取

真，故复合命题“如果 1 + 1 = 3，则雪是黑的”之值为 T。也就是说，在形式推理中只要前件为假，就可推出任何命题，而此推理过程是正确的。

五、等价词（$\leftrightarrow$）

等价词“$\leftrightarrow$”是一个二元联结词，利用成分命题 P 和 Q 可构成复合命题 $P\leftrightarrow Q$，读为 P 等价于 Q，其中 $P\leftrightarrow Q$ 称为等价式。

日常语言中的“当且仅当”等可用等价词来表示。

P 等价于 Q 的真假和 P，Q 的真假关系定义如下：

$P\leftrightarrow Q$ 为真当且仅当 P 和 Q 均真或均假。

其真值表如图 1.5 所示。

P	Q	$P\leftrightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

图 1.5　等价词的真值表

例 8：1 + 1 = 3 当且仅当雪是黑的。

解：令 P 表示“1 + 1 = 3”，

Q 表示“雪是黑的”，

则原句译为：$P\leftrightarrow Q$。

上面介绍了五个常用的真值联结词，其实真值联结词还有很多。为了能更好地表达其他真值联结词，我们引进真值函项的概念，用真值函项的概念可以定义一元、二元甚至 n 元真值联结词。

定义 5：以真假为定义域并以真假为值域的函数称为真值函项。

有了真值函项的概念就可以用它来表达联结词。

一元联结词有一个命题变项 P，它取真和假两种，可定义四个不同的一元联结词 f_0，f_1，f_2，f_3，或称为真值函项。

其真假关系可用图 1.6 表示。

P	$f_0(P)$	$f_1(P)$	$f_2(P)$	$f_3(P)$
T	T	T	F	F
F	T	F	T	F

图 1.6　一元联结词的真值表

从图可看出：

$f_0(P)$表示永真；

$f_1(P)$表示恒等；

$f_2(P)$表示否定，即$\neg P$；

$f_3(P)$表示永假联结词。

同理，二元联结词有 16 个，如图 1.7 所示。

P	Q	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
T	T	T	F	T	T	T	F	F	F	T	T	T	T	F	F	F	F
T	F	T	T	F	T	T	F	T	T	F	F	T	F	T	F	F	F
F	T	T	T	T	F	T	T	F	T	F	T	F	F	F	T	F	F
F	F	T	T	T	T	F	T	T	F	T	F	F	F	F	F	T	F

图 1.7　二元联结词的真值表

从图 1.7 中可以看出：

f_4 为析取：$\vee$

f_{11}为合取：$\wedge$

f_2 为蕴含：$\rightarrow$

f_8 为等价：$\leftrightarrow$

f_1 为与非：$P \uparrow Q = \neg(P \wedge Q)$

f_{14}为或非：$P \downarrow Q = \neg(P \vee Q)$

f_7 为异或：$P \oplus Q = \neg(P \leftrightarrow Q)$

1.1.3　合式公式

有了命题变元和联结词的概念，就可以利用括号来讨论命题演算的合式公式，其中括号可用来区别联结词的运算优先次序。

合式公式为如下定义的式子，简称为公式：

（1）任何命题变元均是公式；

（2）如果 P 为公式，则$\neg P$ 为公式；

（3）如果 P，Q 为公式，则（$P \vee Q$），（$P \wedge Q$），（$P \rightarrow Q$），（$P \leftrightarrow Q$）为公式；

（4）当且仅当经过有限次使用（1）、（2）、（3）所组成的符号串才是公式，否则不为公式。

例如，P，（$P \wedge Q$），（（$P \wedge Q$）$\vee R$）为公式，（（$P \wedge Q$）$\vee$，$P \leftrightarrow Q$）不为公式。

但为了方便起见，我们采用省略一些括号，保留一些括号的方式来描述合式公式。

如：（（$P \wedge Q$）$\vee R$）省写为（$P \wedge Q$）$\vee R$ 等。

定义 6：若公式 α 中有 n 个不同的命题变元，就说 α 为 n 元公式。

如：$((P \wedge Q) \vee R) \rightarrow (P \vee Q)$ 中含有 P，Q，R 三个命题变元，因此它为三元公式。

下面举一些例子说明怎样把命题符号化成公式。注意，在语句符号化时，一定要分解至原子命题，而不能把某个复合命题直接用命题变元 P 来表示，如此不能完整表达语句的意思，也不便于计算机处理相关语句及其产生的知识。

例 9：如果只有懂得希腊文才能了解柏拉图，那么我不了解柏拉图。

解：令P 表示“我懂得希腊文”，

　　Q 表示“我了解柏拉图”，

则原句译为$(Q \rightarrow P) \rightarrow \neg Q$。

例 10：锲而不舍，金石可镂；锲而舍之，朽木不折。

解：令P 表示“你锲”，

　　Q 表示“你舍”，

　　R 表示“金石可镂”，

　　S 表示“朽木可折”，

则原句译为：$((P \wedge \neg Q) \rightarrow R) \wedge ((P \wedge Q) \rightarrow \neg S)$。

例 11：已知三个命题：

　　P：今晚我在家上网，

　　Q：今晚我去球场看足球比赛，

　　R：今晚我在家上网或去球场看足球比赛。

试问 $P \vee Q$ 和 R 是否表达同一命题？请用真值表说明之。

解：$P \vee Q$ 和 R 不表达同一命题。可由如图 1.8 的真值表说明之。

P	Q	R	$P \vee Q$
T	T	F	T
T	F	T	T
F	T	T	T
F	F	F	F

图 1.8　R 和 $P \vee Q$ 的真值表

实际上 R 应表示为：$R=(P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\wedge Q)$。

1.2 真假性

1.2.1 解释

定义 1：设 n 元公式 α 中所有不同的命题变元为 P_1，P_2，P_3，…，P_n。

如果对每个命题变元均给予一个确定的值，则称对公式 α 给了一个完全解释；

如果仅对部分变元给予确定的值，则称对公式 α 给了一个部分解释。

一般地讲，完全解释能确定一个公式的真值，而部分解释不一定能确定公式的真值，公式的真假与未给予确定值的变元有关。

如：公式 $\alpha=(P\wedge Q)\rightarrow R$。

在完全解释（P，Q，R）=（T，F，T）下，公式 α 的值为 T；

对于部分解释（P，Q，R）=（T，T，×）下（注 × 表示相应的变元未给予确定的值），公式 α 的值跟 R 有关。但在某些特殊情况下，部分解释也能确定一个公式的值。

如上述公式在部分解释（P，Q，R）=（T，F，×）下，α 取为真。

由于每个命题变元有两个取值 T 和 F，因此 n 元公式 α 有 2^n 个完全解释。

定义 2：对于任何公式 α，凡使得 α 取真值的解释，不管是完全解释还是部分解释，均称为 α 的成真解释。

定义 3：对于任何公式 α，凡使得 α 取假值的解释，不管是完全解释还是部分解释，均称为 α 的成假解释。

例如，公式 $\alpha=(P\wedge Q)\rightarrow R$ 的成真解释为：（P，Q，R）=（T，F，T）；成假解释为：（P，Q，R）=（T，T，F）。

定义 4：如果一个公式的所有完全解释均为成真解释，则称该公式为永真公式，或称为重言式；如果一个公式的所有完全解释均为成假解释，则称该公式为永假公式，或称为矛盾式。

定义 5：如果一个公式存在成真解释，则称该公式为可满足公式；

如果一个公式存在成假解释，则称该公式为非永真公式。

由上定义可知：

$P\wedge Q$ 为可满足公式，也为非永真公式；

$P\wedge\neg P$ 为永假公式；$P\vee\neg P$ 为永真公式。

1.2.2 等价公式

定义 6：给定两个公式 α 和 β，设 P_1，P_2，…，P_n 为 α 和 β 的所有命题变元，那么 α 和 β 有 2^n 个解释，如果对每个解释 α 和 β 永取相同的真假值，则称 α 和 β 是逻辑等价的，记为 $\alpha=\beta$。

一、几组重要的等价公式

（1）双重否定律。

$\neg\neg P = P$

（2）结合律。

$(P \wedge Q) \wedge R = P \wedge (Q \wedge R)$

$(P \vee Q) \vee R = P \vee (Q \vee R)$

（3）分配律。

$P \wedge (Q \vee R) = (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$

$P \vee (Q \wedge R) = (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$

（4）交换律。

$P \vee Q = Q \vee P$

$P \wedge Q = Q \wedge P$

（5）等幂律。

$P \vee P = P$

$P \wedge P = P$

$P \rightarrow P = T$

$P \leftrightarrow P = T$

（6）等值公式。

$P \rightarrow Q = \neg P \vee Q$

$$
\begin{aligned}
P \leftrightarrow Q &= (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P) \\
&= (\neg P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q) \\
&= (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)
\end{aligned}
$$

$\neg(P \wedge Q) = \neg P \vee \neg Q$

$\neg(P \vee Q) = \neg P \wedge \neg Q$

（7）部分解释。

$P \wedge T = P \qquad P \wedge F = F$

$P \vee T = T \qquad P \vee F = P$

$T \rightarrow P = P \qquad F \rightarrow P = T$

$P \rightarrow T = T \qquad P \rightarrow F = \neg P$

$T \leftrightarrow P = P \qquad F \leftrightarrow P = \neg P$

（8）吸收律。

$P \vee (P \wedge Q) = P$

$P \wedge (P \vee Q) = P$

二、成真解释和成假解释的求解方法

（1）否定深入：即把否定词一直深入至命题变元上。

（2）部分解释：选定某个出现次数最多的变元对它作真或假的两种解释，从而得公式。

（3）化简。

（4）依次类推，直至产生公式的所有解释。

例 1：试判定公式$\neg(P \wedge Q) \rightarrow ((\neg Q \leftrightarrow P) \leftrightarrow \neg R)$的永真性和可满足性。

解：否定深入：

原式 = $(\neg P \vee \neg Q) \rightarrow ((\neg Q \leftrightarrow P) \leftrightarrow \neg R)$

对 P 进行解释并化简：

$P = T$ 时，原式 = $(\neg T \vee \neg Q) \rightarrow ((\neg Q \leftrightarrow T) \leftrightarrow \neg R)$

$= (F \vee \neg Q) \rightarrow (\neg Q \leftrightarrow \neg R)$

$= \neg Q \rightarrow (\neg Q \leftrightarrow \neg R)$

$Q = T$ 时，原式 $= \neg T \rightarrow (\neg T \leftrightarrow \neg R)$

$= F \rightarrow (F \leftrightarrow \neg R)$

$= F \rightarrow R$

$= T$

$Q = F$ 时，原式 $= \neg F \rightarrow (\neg F \leftrightarrow \neg R)$

$= T \rightarrow (T \leftrightarrow \neg R)$

$= T \leftrightarrow \neg R$

$= \neg R$

$R = T$ 时，原式 $= F$

$R = F$ 时，原式 $= T$

$P = F$ 时，同理可解。

由上可知，公式存在一个成真解释 $(P, Q, R) = (T, T, \times)$；

公式存在一个成假解释 $(P, Q, R) = (T, F, T)$。

故公式可满足但非永真。

1.2.3 联结词的完备集

如前所述，一元联结词有 4 个，二元联结词有 16 个，可知联结词的个数有很多，不可能一一讨论，为此需要讨论它们是否均是独立的。换句话说，这些联结词是否能相互表示？答案是肯定的。

定义 7：设 S 是联结词的集合，如果对任何命题演算公式均可以由 S 中的联结词表示出来的公式与之等价，则说 S 是联结词的完备集。

由联结词的定义知，联结词集合 $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ 是完备的。

定理 1：联结词的集合 $\{\neg, \wedge, \vee\}$ 是完备的。

证明：因为 $P \rightarrow Q = \neg P \vee Q$

$P \leftrightarrow Q = (\neg P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q)$

所以 $\{\neg, \wedge, \vee\}$ 可以表示集合 $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$。

又因为 $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ 是完备的，即任何公式 α 均可以由集合 $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ 中联结词表达出来的公式与之等价，所以任何公式 α 均可以由集合 $\{\neg, \wedge, \vee\}$ 中的联结词表达出来的公式与之等价。

故集合 $\{\neg, \wedge, \vee\}$ 是完备的。

同理可证，集合 $\{\neg, \wedge\}$、$\{\neg, \vee\}$、$\{\neg, \rightarrow\}$ 是完备的。

定理 2：联结词集合 $\{\uparrow\}$ 是完备的（其中 $P \uparrow Q = \neg(P \wedge Q)$）。

证明：因为 $\neg P = P \uparrow P$

$P \wedge Q = (P \uparrow Q) \uparrow (P \uparrow Q)$