金榜图书
JINBANG BOOKS · SINCE 1997

理工社

全国十二大考研辅导机构指定用书

全国硕士研究生入学统一考试

高等数学名师讲义

GAODENG SHUXUE MINGSHI JIANGYI

主编◎邵峰

★ 积累知识
★ 夯实基础
★ 典型例题
★ 精准把脉

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

金榜图书
JINBANG BOOKS · SINCE 1997

全国十二大考研辅导机构指定用书

全国硕士研究生入学统一考试

高等数学名师讲义

GAODENG SHUXUE MINGSHI JIANGYI

主编◎邵峰

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目（CIP）数据

高等数学名师讲义 / 邵峰主编. —北京：北京理工大学出版社，2013.9
ISBN 978-7-5640-7889-8

Ⅰ.①高… Ⅱ.①邵… Ⅲ.①高等数学—研究生—入学考试—自学参考资料 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 149071 号

出版发行 / 北京理工大学出版社有限责任公司
社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编 / 100081
电　　话 / (010)68914775（总编室）
　　　　　82562903（教材售后服务热线）
　　　　　68948351（其他图书服务热线）
网　　址 / http://www.bitpress.com.cn
经　　销 / 全国各地新华书店
印　　刷 / 保定市中画美凯印刷有限公司
开　　本 / 787 毫米×1092 毫米　1/16
印　　张 / 17.75　　责任编辑 / 王玲玲
字　　数 / 400 千字　　文稿编辑 / 王玲玲
版　　次 / 2013 年 9 月第 1 版　2013 年 9 月第 1 次印刷　　责任校对 / 王玲玲
定　　价 / 38.00 元　　责任印制 / 边心超

前言

为了让广大考生复习数学更加得法与充分，我们特编写了本套考研数学名师讲义系列丛书：《高等数学名师讲义》、《概率论与数理统计名师讲义》与《线性代数名师讲义》。

下面介绍本系列辅导讲义的特点：

一、基本知识框架与配套习题

基本知识框架是以启航考研辅导数学班讲义为蓝本，重新优化结构、充实内容，使基本知识讲解全面、到位、规范，方便考生学习；内容紧扣《数学考试大纲》和近年来的命题趋势：考查重心回归课本，回归基本知识点和基本解题方法；配套习题注重基本，注重考研实战，没有题海战术或硬套题型战术，目的是不浪费同学们的时间。

二、例题与习题的内在分类

有很多辅导书把题细分为很多题型，让考生硬套题型，把数学分死了。而考研题是很灵活的，题目形式稍微变动，硬套题型的考生就不会做了。可见硬套题型是很害人的。针对这一问题，我们的书是按照数学解题的特点只把题目分为两大类。一类是基本题，是数学题的基础。我们强调其解题方法中的基本方法(即课本上的方法)，是具有普遍意义、以无招胜有招、以不变应万变的方法。而一题一法的玄妙技巧、特殊方法不具有普遍意义，是很害人的，我们的书坚决不涉及。另一类是非基本题，是数学题的难点。我们的书把非基本题看作是基本题的简单变形或综合，即基本题的衍生题，就是我们常说的：这道题转了一个弯，那道题转了两个弯，……。从这个意义上说，题都是基本题。希望考生在做题时多用这样的观念来看题。

三、解题的基本方向：基本方法与化归法

很多考生可能一直有这样一个疑问：为什么课本上的内容很简单，而试卷上的考题那么难？因为求解数学题一般有两种方向。一种方向，是直接的解题方法，即针对题目本身寻找新的解题方法，是硬碰硬的解题方向，一般比较难办到。本书不采用这一解题方向。另一方向，是间接的解题方法，即利用化归思想将题目逐步化归为基本题，从而利用基本方法解决问题。这种化归法是一种能力——利用基本方法解决复杂问题的能力。这正是考试要考查的能力。正如四两拨千斤，是用“四两”把“千斤”化解、转化掉了。“拨”是化解、转化，而不是硬碰硬。从这个意义上说，解题方法都是基本方法。这一点，外面的书没有做到，而本书正做到了这一点。希望考生在做题时多用化归观念来寻找解题方法，学会“拨”题。当一道题做不好时，请想想课本上的基本方法。

本系列辅导讲义是专门为考研学生量身编写的，针对性很强。希望能给考研路上的学生指明复习方向，节省时间。祝大家考研成功！

由于编者水平有限，加之时间仓促，书中难免有错误和疏漏之处，恳请读者和同行专家批评指正！

编 者
2013 年 8 月

目录

第一章　函数 极限 连续

■ 考试要求

1. 理解函数的概念，掌握函数的表示方法，会建立应用问题的函数关系.

2. 理解复合函数及分段函数的概念，了解反函数及隐函数的概念.

3. 掌握基本初等函数的性质及其图形，了解初等函数的概念.

4. 理解函数极限的概念和性质，理解函数左、右极限的概念，以及函数极限存在与左、右极限之间的关系.

5. 掌握极限的四则运算法则和复合函数的极限运算法则，掌握利用两个重要极限求极限的方法.

6. 理解无穷小、无穷大的概念，掌握无穷小的比较方法，会用等价无穷小求极限.

7. 掌握用洛必达法则求未定式极限的方法.

8. 掌握极限存在的两个准则，会利用极限存在的两个准则求极限.

9. 理解函数连续性的概念(含左、右连续)，会判断函数间断点的类型.

10. 了解连续函数的性质和初等函数的连续性，理解闭区间上连续函数的性质(有界性、最值、介值定理、零点定理)，并会应用这些性质.

第一节　函　数

一、函数的定义

设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的数集. 如果对于每个数 $x \in D$，变量 y 按照一定法则，总有唯一确定的数值 y 和它对应，则称 y 是 x 的函数，记为 $y = f(x)$.

注：(1) 定义域 D 是给定的，对任一个 $x \in D$ 的值，只有唯一的 y 的值与之对应；

(2) 函数的两个要素：定义域和对应关系(预先给定的)；

(3) 同一个函数的判定：定义域相同且定义域内点的函数值相等；

(4) 函数只与定义域和对应关系有关，而与用什么字母表示无关.

二、初等函数

(一) 基本初等函数

1. 常数函数 $y = C, x \in (-\infty, +\infty)$；

2. 幂函数 $y = x^u$，定义域与 u 有关；

3. 指数函数 $y = a^x (a > 0, a \neq 1), x \in (-\infty, +\infty)$；

4. 对数函数 $y = \log_a x (a > 0, a \neq 1), x \in (0, +\infty)$；

5. 三角函数 $y = \sin x, \cos x, \tan x, \cot x, \sec x, \csc x$；

6. 反三角函数 $y = \arcsin x, \arccos x, \arctan x, \operatorname{arccot} x$.

注：掌握基本初等函数性质和图形.

(二) 初等函数

由基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合，并且在定义域内具有统一的解析表达式的函数称为初等函数.

三、函数的类型

(一) 显函数：由解析式 $y=f(x)$ 所确定的函数.

1. 用一个解析式子表示的函数. 如：$y=x^2+2x+3$.

2. 分段函数：在定义域内不能用同一个式子表示的函数.

常见的分段函数

(1) 绝对值函数 $y=|x|=\begin{cases} x, & x\geqslant 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$;

(2) 符号函数 $y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases} 1, & x>0 \\ 0, & x=0; \\ -1, & x<0 \end{cases}$

(3) 取整函数 $y=[x]$，表示不超过 x 的最大整数.

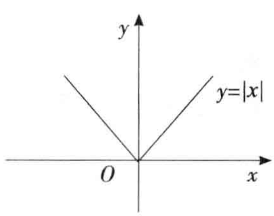

图 1-1

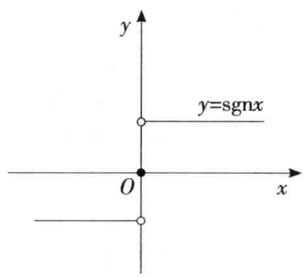

图 1-2

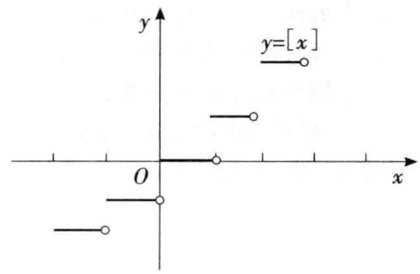

图 1-3

(二) 隐函数：如果在方程 $F(x,y)=0$ 中，当 x 取某区间内的任一值时，相应地总有满足这一方程的唯一的 y 值存在，那么就说方程 $F(x,y)=0$ 在该区间内确定了一个隐函数 $y=y(x)$.

(三) 由参数方程所确定的函数：由参数方程 $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$ 可以确定函数 $y=y(x)$.

(四) 变上限积分函数：$y=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$.

(五) 级数表示函数：$y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

例 1 设函数 $f(x)=\begin{cases} 1, & 0\leqslant x\leqslant 1 \\ x^2, & 1<x\leqslant 2 \end{cases}$，求 $f(x-1)$.

解：$f(x-1)=\begin{cases} 1, & 1\leqslant x\leqslant 2. \\ (x-1)^2, & 2<x\leqslant 3. \end{cases}$

例 2 设 $g(x)=\begin{cases} 2-x, & x\leqslant 0 \\ x+2, & x>0 \end{cases}$，$f(x)=\begin{cases} x^2, & x<0 \\ -x, & x\geqslant 0 \end{cases}$，求 $g(f(x))$.

解：$g(f(x))=\begin{cases} 2-f(x), f(x)\leqslant 0 \\ f(x)+2, f(x)>0 \end{cases}=\begin{cases} 2-(-x), x\geqslant 0 \\ 2+x^2, x<0 \end{cases}$.

例 3 已知函数 $f(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$,求 $f(x+1)+f(x)+f(x-1)$.

解: $f(x+1)=\begin{cases}1, & -1\leqslant x<0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$,$f(x-1)=\begin{cases}1, & 1\leqslant x<2\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$.

所以 $f(x+1)+f(x)+f(x-1)=\begin{cases}1, & -1\leqslant x<2\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$.

例 4 设函数 $f(x)=\begin{cases}1/2, & -1<x<0\\ 1/4, & 0\leqslant x<2\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$,则 $f(\sqrt{x})+f(-\sqrt{x})=$ ________.

解: $f(\sqrt{x})=\begin{cases}1/4, & 0\leqslant x<4\\ 0, & x\geqslant 4\end{cases}$,$f(-\sqrt{x})=\begin{cases}1/4, & x=0\\ 1/2, & 0<x<1\\ 0, & x\geqslant 1\end{cases}$,

所以 $f(\sqrt{x})+f(-\sqrt{x})=\begin{cases}1/2, & x=0\\ 3/4, & 0<x<1\\ 1/4, & 1\leqslant x<4\\ 0, & x\geqslant 4\end{cases}$.

第二节 函数的极限

一、函数极限的概念与性质

(一) 函数极限的定义

1. 定义 设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 的某个去心邻域内有定义,若对 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$,当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,恒有 $|f(x)-a|<\varepsilon$,则称函数 $y=f(x)$ 在 $x\to x_0$ 的极限为 a,记为 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$.

注:(1) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 与 $f(x)$ 在 x_0 点是否有定义及有定义时 $f(x_0)$ 的大小无关.

(2) 极限是函数的局部性质,只与很邻近值有关.

(3) 直观解释 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$:当 x 无限趋近 x_0 时,函数 $f(x)$ 无限趋近于常数 a.

2. 右极限 $f(x_0^+)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=a$

$\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$ 当 $0<x-x_0<\delta$ 时,恒有 $|f(x)-a|<\varepsilon$.

左极限 $f(x_0^-)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=a$

$\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$ 当 $-\delta<x-x_0<0$ 时,恒有 $|f(x)-a|<\varepsilon$.

极限存在充要条件:$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=a$.

3. 定义 设函数 $y=f(x)$ 在 $|x|>E>0$ 内有定义,若对 $\forall\varepsilon>0,\exists M>0$,使得当 $|x|>M$ 时,恒有 $|f(x)-a|<\varepsilon$,则称 $y=f(x)$ 在 $x\to\infty$ 的极限为 a,记为 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=a$.

注:(1) 直观解释 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=a$:当 $|x|$ 无限增大时,函数 $f(x)$ 无限趋近常数 a.

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$,则 $\lim\limits_{x\to\infty}|f(x)|=|A|$,反之不成立.

4. $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=a\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists M>0$,当 $x>M$ 时,恒有 $|f(x)-a|<\varepsilon$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=a \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists M>0$，当 $x<-M$ 时，恒有 $|f(x)-a|<\varepsilon$.

极限存在的充要条件：$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=a \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=a$.

（二）函数极限的性质

1. 局部有界性：若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$，则存在 x_0 的去心邻域，使 $f(x)$ 在此邻域内有界.

注：若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$，则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 的任一邻域内均无界.

2. 保号性：设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$，

(1) 若 $a>0$，则存在 $\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$f(x)>0$；

(2) 若 $a<0$，则存在 $\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$f(x)<0$.

例 5　(1) $\lim\limits_{x\to\infty} e^x$；$\lim\limits_{x\to0} e^{\frac{1}{x}}$；$\lim\limits_{x\to1} e^{\frac{1}{x-1}}$.　　(2) $\lim\limits_{x\to0^+}\ln x$；$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x$.

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$；$\lim\limits_{x\to0}\sin\dfrac{1}{x}$；$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\tan x$.　　(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$.

(5) $\lim\limits_{n\to\infty} x^n$（$n$ 为自然数）；$\lim\limits_{x\to0^+} x^p$；$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{|x|}{x}$；$\lim\limits_{x\to0}[x]$.

解：(1) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$，$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{e^{-x}}=0$，所以 $\lim\limits_{x\to\infty} e^x$ 不存在.

同理可得：$\lim\limits_{x\to0} e^{\frac{1}{x}}$ 不存在；　$\lim\limits_{x\to1} e^{\frac{1}{x-1}}$ 不存在.

(2) $\lim\limits_{x\to0^+}\ln x=-\infty$；$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$.

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$ 和 $\lim\limits_{x\to0}\sin\dfrac{1}{x}$ 振荡不存在. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\tan x=\infty$.

(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\dfrac{\pi}{2}$，所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 不存在.

(5) $\lim\limits_{n\to\infty} x^n=\begin{cases}0, & |x|<1\\ \infty, & |x|>1\\ \text{不存在}, & x=-1\\ 1, & x=1\end{cases}$；$\lim\limits_{x\to0^+} x^p=\begin{cases}0, & p>0\\ 1, & p=0\\ \infty, & p<0\end{cases}$；　$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{|x|}{x}$ 不存在.

$\lim\limits_{x\to0^+}[x]=0$，$\lim\limits_{x\to0^-}[x]=-1$，所以 $\lim\limits_{x\to0}[x]$ 不存在.

二、求极限的方法

（一）极限的四则运算法则和复合函数的极限运算法则

1. 极限的四则运算法则　设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 都存在，则

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\pm g(x))=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$；

(2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$；

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$（$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\neq0$）.

注：(1) 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 不存在，则 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]$ 不存在.

(2) 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A\neq0$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 不存在，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x)$ 不存在.

2. 复合函数的极限运算法则

设$\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$，$\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$，则$\lim\limits_{x\to x_0}f(\varphi(x))=\lim\limits_{u\to a}f(u)=A$.

例 6 $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)^2\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}$ 是(　　).

(A)0.　　(B)$-\infty$.　　(C)$+\infty$　　(D)不存在但不是∞.

解：因 $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^x=+\infty$，$\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^x=0$，故要分别考察左右极限.

$$\lim_{x\to 1^+}(x-1)^2\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}\xlongequal{t=\frac{1}{x-1}}\lim_{t\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^t}{t^2}=+\infty.\ \lim_{x\to 1^-}(x-1)^2\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}\xlongequal{t=\frac{1}{x-1}}\lim_{t\to-\infty}\frac{\mathrm{e}^t}{t^2}=0.$$

故选(D).

例 7 (1) $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)=-1+\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x\sin x}=-1+\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^2}$$
$$=-1+\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{2x}=-1.$$

(2) $$\lim_{x\to 0}\frac{x\sqrt{1+\cos x}}{2\sin x+x\cos x}=\lim_{x\to 0}\sqrt{1+\cos x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x}{2\sin x+x\cdot\cos x}$$
$$=\sqrt{2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{2\cdot\frac{\sin x}{x}+\cos x}=\frac{\sqrt{2}}{3}.$$

(3) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin^2x}-\sqrt{\cos x}}{\tan^2x}=\lim_{x\to 0}\frac{1+\sin^2x-\cos x}{x^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\sin^2x}+\sqrt{\cos x}}$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1+\sin^2x-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left[\frac{1-\cos x}{x^2}+\frac{\sin^2x}{x^2}\right]=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{3}{4}.$$

(4) $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{4}{x}}}+2[x+1]\right).$$

解：$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{4}{x}}}+2[x+1]\right)=2+\lim_{x\to 0^+}\frac{2+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{4}{x}}}=2+\lim_{x\to 0^+}\frac{(2+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}})/\mathrm{e}^{\frac{4}{x}}}{(1+\mathrm{e}^{\frac{4}{x}})/\mathrm{e}^{\frac{4}{x}}}=2,$$

$$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{2+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{4}{x}}}+2[x+1]\right)=\lim_{x\to 0^-}\frac{2+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{4}{x}}}=2,$$

所以 $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{4}{x}}}+2[x+1]\right)=2.$$

例 8 $$\lim_{x\to\infty}\frac{\mathrm{e}^x-\frac{2}{\pi}x\arctan x}{x+\mathrm{e}^x}.$$

解：$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x-\frac{2}{\pi}x\arctan x}{x+\mathrm{e}^x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+x}-\frac{\frac{2}{\pi}x\arctan x}{x+\mathrm{e}^x}\right)$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+x}-\frac{2}{\pi}\lim_{x\to+\infty}\frac{x\arctan x}{x+\mathrm{e}^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+x}-\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x+\mathrm{e}^x}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}-\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+\mathrm{e}^x}=1.$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\mathrm{e}^x-\frac{2}{\pi}x\arctan x}{x+\mathrm{e}^x}=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+x}-\frac{\frac{2}{\pi}x\arctan x}{x+\mathrm{e}^x}\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{e^x+x}-\frac{2}{\pi}\lim_{x\to-\infty}\frac{x\arctan x}{x+e^x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{e^x+x}+\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x+e^x}=1.$$

所以
$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x-\frac{2}{\pi}x\arctan x}{x+e^x}=1.$$

注:在求极限时,凡遇到 $x\to\infty$ 且式中含有 $a^x(a>1)$ 或 $\arctan x$,一定要分别求出 $x\to+\infty$,$x\to-\infty$ 的极限,然后利用极限存在的充要条件确定 $x\to\infty$ 时极限的存在性.

(二) 利用等价无穷小求极限

1. **无穷小的定义**　若 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$,则称 $\alpha(x)$ 为 $x\to x_0$ 时的无穷小.

注:无穷小没有大小之分,只有趋于 0 的速度快慢之分.

2. **无穷小与极限存在之间的关系**

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x)$,其中 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$.

例 9　已知 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{f(x)-1}{x}-\frac{\sin x}{x^2}\right]=2$,求 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

解:$\frac{f(x)-1}{x}-\frac{\sin x}{x^2}=2+\alpha(x)$,$\lim\limits_{x\to 0}\alpha(x)=0$,

$f(x)=1+\frac{\sin x}{x}+(2+\alpha(x))\cdot x$,　$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=2$.

3. **无穷小的运算**　(1) 有限多个无穷小的和、差、积仍然是无穷小;
(2) 无穷小与有界量的乘积仍然是无穷小.

4. **无穷小的比较**　若 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$,$\lim\limits_{x\to x_0}\beta(x)=0$,且 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=l$,

(1) 若 $l\neq 0$,则称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是同阶无穷小;
(2) 若 $l=1$,则称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是等价无穷小,记为 $\alpha(x)\sim\beta(x)$;
(3) 若 $l=0$,则称 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的高阶无穷小,记为 $\alpha(x)=o(\beta(x))$;
(4) 若 $l=\infty$,则称 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的低阶无穷小;
(5) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta^k(x)}=l\neq 0$,则称 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的 k 阶无穷小.

例 10　当 $x\to 0$ 时,$1+x^2-e^{x^2}$ 是 x 的________阶无穷小.

解:$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+x^2-e^{x^2}}{x^n}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x-2xe^{x^2}}{nx^{n-1}}=2\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-e^{x^2}}{nx^{n-2}}=-2\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{nx^{n-2}}=a\neq 0$,则 $n=4$.

所以　当 $x\to 0$ 时,$1+x^2-e^{x^2}$ 是 x 的 4 阶无穷小.

5. **常用等价无穷小**

(1) 当 $x\to 0$ 时,$\sin x\sim x$;$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$;$\ln(1+x)\sim x$;$\arcsin x\sim x$;

$$\arctan x\sim x;e^x-1\sim x;a^x-1\sim x\ln a;(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x.$$

(2) 当 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=1$ 时,则当 $x\to x_0$ 时,有 $\ln f(x)\sim f(x)-1$.

(3) **定理**　$\alpha(x)+o(\alpha(x))\sim\alpha(x)$,其中 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$.

6. **利用等价无穷小求极限**　设当 $x\to x_0$ 时,$\alpha(x)\sim\alpha'(x)$,$\beta(x)\sim\beta'(x)$,则

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)\alpha(x)}{g(x)\beta(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)\alpha'(x)}{g(x)\beta'(x)}.$$

例 11 (1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x\left(\dfrac{1}{\cos x}-1\right)}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cdot\cos x}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}.$$

(2) $\lim\limits_{x\to0}\cot x\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x}{\sin x}\cdot\dfrac{x-\sin x}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{6x}=\frac{1}{6}.$$

(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x+(1-\cos x)}{\ln(1-2x)+(1-e^{x^2})}$.

解 1: 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x}{\ln(1-2x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{-2x}=-\dfrac{1}{2}$.

解 2: 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{\tan x}{x}+\dfrac{1-\cos x}{x}}{\dfrac{\ln(1-2x)}{x}+\dfrac{(1-e^{x^2})}{x}}=\dfrac{\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x}{x}+\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x}}{\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1-2x)}{x}+\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1-e^{x^2})}{x}}=-\dfrac{1}{2}$.

(4) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^x-1}{x\ln(2-x)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{e^{x\ln x}-1}{x\ln(2-x)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x\ln x}{x(1-x)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{1-x}=-1$.

(5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{\ln(1+x^3)}\left[\left(\dfrac{2+\cos x}{3}\right)^x-1\right]=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x\ln\frac{2+\cos x}{3}}-1}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\ln\dfrac{2+\cos x}{3}}{x^3}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{2+\cos x}{3}-1}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{3x^2}=-\frac{1}{6}.$$

例 12 当 $x\to0^+$ 时,与$\sqrt{x}$等价的无穷小量是(　　).

(A) $1-e^{\sqrt{x}}$.　　(B) $\ln\dfrac{1+x}{1-\sqrt{x}}$.　　(C) $\sqrt{1+\sqrt{x}}-1$.　　(D) $1-\cos\sqrt{x}$.

解: (A) $1-e^{\sqrt{x}}\sim-\sqrt{x}$;　(B) $\ln\dfrac{1+x}{1-\sqrt{x}}\sim\dfrac{1+x}{1-\sqrt{x}}-1=\dfrac{x+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\sim x+\sqrt{x}\sim\sqrt{x}$;

(C) $\sqrt{1+\sqrt{x}}-1\sim\dfrac{1}{2}\sqrt{x}$;　(D) $1-\cos\sqrt{x}\sim\dfrac{1}{2}x$.

答案(B).

例 13 设 $f(x)=\int_0^{1-\cos x}\sin t^2\,dt$, $g(x)=\dfrac{x^5}{5}+\dfrac{x^6}{6}$,则当 $x\to0$ 时,$f(x)$ 是 $g(x)$ 的(　　).

(A) 低阶无穷小.　　(B) 高阶无穷小.

(C) 等价无穷小.　　(D) 同阶但不等价.

解: 根据$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$的值进行判断.

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^{1-\cos x}\sin t^2\,dt}{\dfrac{x^5}{5}+\dfrac{x^6}{6}}=\lim_{x\to0}\frac{[\sin(1-\cos x)^2]\sin x}{x^4+x^5}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)^2}{x^3+x^4}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{4}x^4}{x^3+x^4}=0.$$

答案(B).

例 14　设当 $x \to 0$ 时，$(1-\cos x)\ln(1+x^2)$ 是比 $x\sin x^n$ 高阶的无穷小，而 $x\sin x^n$ 是比 $e^{x^2}-1$ 高阶的无穷小，求正整数 n.

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)\ln(1+x^2)}{x\cdot\sin x^n}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2x^2}{x^{n+1}}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}x^{3-n}=0\Rightarrow 3-n>0\Rightarrow n<3.$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin x^n}{e^{x^2}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^{n+1}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}x^{n-1}=0$，则 $n-1>0$.

综上所述　$n=2$.

7. **无穷大的定义**　当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时，$|f(x)|$ 无限增大，则称 $f(x)$ 在 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）为无穷大，记为 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$.

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty\Leftrightarrow$ 对任意 $M>0$，存在 $\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$|f(x)|>M$.

注：(1) 无穷大是极限不存在的一种形式.

(2) 无穷大与无穷小之间的关系：在自变量的同一变化过程中，若 $f(x)$ 为无穷大，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 必为无穷小；反之，若 $f(x)$ 为无穷小，且 $f(x)\neq 0$，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 必为无穷大.

(3) 无穷大没有大小之分，只有趋于无穷大的快慢之分.

(4) 无穷大的四则运算.

(a) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=+\infty$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=+\infty$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]=+\infty$.

(b) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=-\infty$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=-\infty$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]=-\infty$.

(c) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\infty$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)g(x)]=\infty$.

(d) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$，$g(x)$ 在 x_0 的某个去心邻域内有界，则 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]=\infty$.

(e) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\neq 0$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\infty$.

(f) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=+\infty$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\infty$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x))$ 未知.

(g) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\infty$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x))$ 未知.

例 15　当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)=x\sin x$ 是（　　）.

(A) 无穷小.　　　　(B) 无穷大.

(C) 有界但不是无穷小.　　　　(D) 无界，但不是无穷大.

解：令 $x_n=2n\pi$ 则 $f(x_n)=0$，从而 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=0$.

又令　$x_n=2n\pi+\dfrac{\pi}{2}$，则　$f(x_n)=2n\pi+\dfrac{\pi}{2}$，从而 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=+\infty$，

说明 $f(x)$ 不是有界量，也不是 $x\to+\infty$ 时的无穷大量. 故选(D).

注：当 $x\to 0$ 时，$f(x)=\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$ 如何？

例 16　设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=+\infty$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=+\infty$，$\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=\infty$，则下列命题中不正确的是（　　）.

(A) $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x))=+\infty$.　　　　(B) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)h(x)=\infty$.

(C) $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)-g(x))=+\infty$.　　　　(D) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)g(x)=+\infty$.

解:两个正无穷大量之和与之积均是正无穷大量,即(A),(D) 正确. 选(C).

(三) 利用洛必达法则求未定式极限的方法

法则 Ⅰ$\left(\frac{0}{0}\right)$:设函数 $f(x)$,$g(x)$ 满足条件:① $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$,$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$;

②$f(x)$,$g(x)$ 在 x_0 的去心邻域内可导,且 $g'(x)\neq 0$;

③ $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在(或 ∞).

则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

法则 Ⅱ$\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$:设函数 $f(x)$,$g(x)$满足条件:① $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$,$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\infty$;

②$f(x)$,$g(x)$在 x_0 的去心邻域内可导,且 $g'(x)\neq 0$;

③ $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在(或 ∞).

则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

注:(1) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$($A$ 是数或 ∞),则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=A$. 反之不成立.

(2) 若当 $x\to 0$ 时,存在形如 $\sin\dfrac{1}{x}$ 或 $\cos\dfrac{1}{x}$ 的因式,或者当 $x\to\infty$ 时,存在 $\sin x$ 或 $\cos x$ 的因式,一般不能用洛必达法则.

例 17 (1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+x-e^x}{\cos^2 x\sin^2 x}+\dfrac{\sin x}{x}\right)=1+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x-e^x}{\cos^2 x\sin^2 x}$

$$=1+\lim_{x\to 0}\frac{1+x-e^x}{x^2}=1+\lim_{x\to 0}\frac{1-e^x}{2x}=1+\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{-x}{x}=\frac{1}{2}.$$

(2) $$\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)[x-\ln(1+\tan x)]}{\sin^4 x}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+\tan x)}{2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\dfrac{\sec^2 x}{1+\tan x}}{4x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+\tan x-\sec^2 x}{4x}=\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}+\frac{1-\sec^2 x}{x}\right)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{-\tan^2 x}{x}=\frac{1}{4}.$$

(3) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}-\dfrac{1}{2\sqrt{1-x}}}{2x}=\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x}=\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}-\frac{1}{2\sqrt{1+x}}\right)=-\frac{1}{4}.$$

(4) $$\lim_{x\to 0}\frac{3\sin x+x^2\cos\dfrac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{3\sin x+x^2\cos\dfrac{1}{x}}{x}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(3\frac{\sin x}{x}+x\cdot\cos\frac{1}{x}\right)=\frac{3}{2}.$$

注:本题洛必达法则失效.

(四) 其它未定式: $0\cdot\infty,\infty-\infty,0^0,\infty^0,1^\infty$

例 18　(1) $\lim\limits_{x\to0^+}x\cdot\ln x=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln x}{\dfrac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{x^2}}=0.$

(2) $\lim\limits_{x\to-\infty}x^2e^x=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{e^{-x}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x}{-e^{-x}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2}{e^{-x}}=0.$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}[(1+\dfrac{1}{x})^x-e]x=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{x\ln(1+\frac{1}{x})}-e}{\dfrac{1}{x}}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{e^{\frac{\ln(1+t)}{t}}-e}{t}=e\lim\limits_{t\to0}\dfrac{e^{\frac{\ln(1+t)}{t}-1}-1}{t}$

$$=e\lim_{t\to0}\frac{\dfrac{\ln(1+t)}{t}-1}{t}=e\lim_{t\to0}\frac{\ln(1+t)-t}{t^2}=e\lim_{t\to0}\frac{\dfrac{1}{1+t}-1}{2t}=-\frac{e}{2}.$$

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}[(x-3)e^{-\frac{2}{x}}-x]=\lim\limits_{t\to0}\left[\dfrac{(1-3t)-e^{2t}}{te^{2t}}\right]=\lim\limits_{t\to0}\left[\dfrac{(1-3t)-e^{2t}}{t}\right]$

$$=\lim_{t\to0}(-3-2e^{2t})=-5.$$

(5) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\arctan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\exp\left\{\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x^2}\ln\dfrac{\arctan x}{x}\right\}=\exp\left\{\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x^2}\left(\dfrac{\arctan x}{x}-1\right)\right\}$

$$=\exp\left\{\lim_{x\to0}\left(\frac{\arctan x-x}{x^3}\right)\right\}=e^{-\frac{1}{3}}.$$

(6) $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+2^x+3^x)^{\frac{1}{x+\sin x}}=\exp\left\{\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+2^x+3^x)}{x+\sin x}\right\}=\exp\left\{\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+2^x+3^x)/x}{(x+\sin x)/x}\right\}$

$$=\exp\left\{\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+2^x+3^x)}{x}\right\}=\exp\left\{\lim_{x\to+\infty}\frac{2^x\ln2+3^x\ln3}{1+2^x+3^x}\right\}=3.$$

(7) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[x]{x}-1)^{\frac{1}{\ln x}}=\exp\left\{\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(e^{\frac{\ln x}{x}}-1)}{\ln x}\right\}=\exp\left\{\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{1}{e^{\frac{\ln x}{x}}-1}e^{\frac{\ln x}{x}}\dfrac{1-\ln x}{x^2}}{\dfrac{1}{x}}\right\}$

$$=\exp\left\{\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\ln x}{\ln x}\right\}=\frac{1}{e}.$$

例 19　(1) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{\pi x}+\dfrac{1}{\sin\pi x}-\dfrac{1}{\pi(1-x)}\right)=\dfrac{1}{\pi}+\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\pi(1-x)-\sin\pi x}{\pi(1-x)\sin\pi x}$

$$=\frac{1}{\pi}+\lim_{t\to0}\frac{\pi t-\sin\pi t}{\pi t\sin\pi t}=\frac{1}{\pi}+\lim_{t\to0}\frac{\pi t-\sin\pi t}{\pi^2t^2}=\frac{1}{\pi}+\lim_{t\to0}\frac{\pi-\pi\cos\pi t}{2\pi^2t}$$

$$=\frac{1}{\pi}+\lim_{t\to0}\frac{\pi^2\sin\pi t}{2\pi^2}=\frac{1}{\pi}.$$

注:(a) 当 $x\to\infty$ 时,令 $t=\dfrac{1}{x}$,则 $t\to0$;如果 $x\to+\infty$ 或 $x\to-\infty$,t 如何?

(b) 当 $x\to x_0$ 时,令 $x-x_0=t$,则 $t\to0$;如果 $x\to x_0^+$ 或 $x\to x_0^-$,t 如何?

(2) 设 $g(x)=\begin{cases}2-x, & x\leqslant0\\ 2+x, & x>0\end{cases}$,$f(x)=\begin{cases}x^2, & x<0\\ -x, & x\geqslant0\end{cases}$,求 $\lim\limits_{x\to0}g(f(x))$.

解法 1: 先求出 $g(f(x))=\begin{cases}2+x^2, & x\leqslant0\\ 2+x, & x>0\end{cases}$,因此　$\lim\limits_{x\to0}g(f(x))=2.$

解法 2: 不必先求出 $g(f(x))$.

$\lim\limits_{x\to0^+}g(f(x))=\lim\limits_{u\to0^-}g(u)=\lim\limits_{u\to0^-}(2-u)=2$，$\lim\limits_{x\to0^-}g(f(x))=\lim\limits_{u\to0^+}g(u)=\lim\limits_{u\to0^-}(2+u)=2$，

因此 $\lim\limits_{x\to0}g(f(x))=2$.

注：解法二比解法一好.

> 求函数极限的解题思路
>
> 1. 把求未定式的极限化为$\frac{0}{0}$型或$\frac{\infty}{\infty}$型；
> 2. 化简(代数变形、等价无穷小、代换、非零极限因子)，最后化成简单函数的$\frac{0}{0}$或$\frac{\infty}{\infty}$；
> 3. 分子、分母同除无穷小或无穷大使分母极限存在且非零，用四则运算；
> 4. 用洛必达法则.

三、极限值已知求其中的未知常数

定理：若$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=m$，且$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$，则有$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$.

例 20 (1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{e^x-a}(\cos x-b)=5$，求 a,b 的值.

解：由$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{e^x-a}(\cos x-b)=5$得，$\lim\limits_{x\to0}(e^x-a)=1-a=0$， 解得 $a=1$.

当 $a=1$ 时，$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{e^x-1}(\cos x-b)=\lim\limits_{x\to0}(\cos x-b)=1-b=5$，$b=-4$.

(2) 设当 $x\to0$ 时，$e^x-(ax^2+bx+1)$ 是比 x^2 高阶的无穷小，求 a,b 的值.

解 1：根据题意$\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-(ax^2+bx+1)}{x^2}=0$.

$\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-(ax^2+bx+1)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-2ax-b}{2x}$，有$\lim\limits_{x\to0}(e^x-2ax-b)=1-b=0$，$\Rightarrow b=1$.

所以 $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1-2ax}{2x}=\lim\limits_{x\to0}[\frac{e^x-1}{2x}-a]=\frac{1}{2}-a$. 从而有$\frac{1}{2}-a=0$，即 $a=\frac{1}{2}$.

解 2：根据泰勒公式 $e^x=1+x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$，

从而
$$e^x-(ax^2+bx+1)=1+x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)-(ax^2+bx+1)$$
$$=(1-b)x+(\frac{1}{2}-a)x^2+o(x^2).$$

由题设可得 $1-b=0$，$\frac{1}{2}-a=0$， 从而可得 $a=\frac{1}{2}$，$b=1$.

(3) 当 $x\to0$ 时，$f(x)=x-\sin ax$ 与 $g(x)=x^2\ln(1-bx)$ 是等价无穷小，则(　　)

(A) $a=1,b=-\frac{1}{6}$.　　(B) $a=1,b=\frac{1}{6}$.

(C) $a=-1,b=-\frac{1}{6}$.　　(D) $a=-1,b=\frac{1}{6}$.

解法 1：由于 $f(x)=x-\sin ax$ 与 $g(x)=x^2\ln(1-bx)$ 为等价无穷小，则有

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to0}\frac{x-\sin ax}{x^2\ln(1-bx)}=\lim_{x\to0}\frac{x-\sin ax}{x^2(-bx)}=\lim_{x\to0}\frac{1-a\cos ax}{-3bx^2}$$

故有 $\lim\limits_{x\to 0}1-a\cos ax=0$，所以 $a=1$.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{-3bx^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2/2}{-3bx^2}=-\dfrac{1}{6b}$，有 $-\dfrac{1}{6b}=1$ 得 $b=-\dfrac{1}{6}$.　答案选(A)

解法 2：根据泰勒公式得　$f(x)=x-\sin ax=(1-a)x+\dfrac{a^3}{6}x^3+o(x^3)$，

$$g(x)=x^2\ln(1-bx)=x^2[-bx+o(x)]=-bx^3+o(x^3).$$

因为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是等价无穷小，所以 $1-a=0,\dfrac{1}{6}a^3=-b$. 即 $a=1,b=-\dfrac{1}{6}$.

答案选(A).

第三节　数列的极限

一、数列极限的概念及性质

（一）数列极限的定义

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a\Leftrightarrow$ 对于 $\forall\varepsilon>0$，$\exists$ 一个正整数 N，当 $n>N$ 时，恒有 $|x_n-a|<\varepsilon$.

直观解释：当 n 无限增大时，对应的 x_n 无限接近于某个确定的常数 a.

注：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a\Leftrightarrow\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n+1}=a$.

（二）数列极限的性质

1. 有界性：若数列收敛，则数列一定有界.

2. 保号性：设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，

(1) 若 $a>0$，则存在正整数 $N>0$，当 $n>N$ 时，$x_n>0$；

(2) 若 $a<0$，则存在正整数 $N>0$，当 $n>N$ 时，$x_n<0$.

二、求数列极限的方法

（一）利用准则求极限

1. 夹逼定理(数列)：若存在 N，当 $n>N$ 时，$y_n\leqslant x_n\leqslant z_n$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$，

　　则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

2. 夹逼定理(函数)：当 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$，有 $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$ 成立，且 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=a$，$\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=a$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$.

例 21　(1) 设 $x_n\leqslant a\leqslant y_n$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n-x_n)=0$，则 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$（　　）.

(A) 都收敛于 a.　　(B) 都收敛，但不一定都收敛于 a.

(C) 可能收敛，也可能发散.　　(D) 都发散.

解：由 $x_n\leqslant a\leqslant y_n$ 得 $0\leqslant y_n-a\leqslant y_n-x_n$.

由 $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n-x_n)=0$ 以及夹逼定理得 $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n-a)=0$.

因此　$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$. 由此得　$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$. 选(A).

(2) 设 $x_n\leqslant z_n\leqslant y_n$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n-x_n)=0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}z_n$（　　）.

(A) 存在且等于零.　　(B) 存在但不一定等于零.