普通高等教育农业部“十二五”规划教材
全国高等农林院校“十二五”规划教材

线性代数与概率论

YU GAILÜLUN

◆ 郑大川 吴瑞武 主编 ◆

中国农业出版社

普通高等教育农业部“十二五”规划教材
全国高等农林院校“十二五”规划教材

线性代数与概率论

郑大川　吴瑞武　主编

中国农业出版社

图书在版编目（CIP）数据

线性代数与概率论 / 郑大川，吴瑞武主编．—北京：中国农业出版社，2011.12

普通高等教育农业部“十二五”规划教材 全国高等农林院校“十二五”规划教材

ISBN 978-7-109-16373-7

Ⅰ.①线… Ⅱ.①郑…②吴… Ⅲ.①线性代数-高等学校-教材②概率论-高等学校-教材 Ⅳ.①O151.2②O211

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2011）第 268883 号

中国农业出版社出版

（北京市朝阳区农展馆北路 2 号）

（邮政编码 100125）

策划编辑 朱 雷 魏明龙

文字编辑 魏明龙

北京通州皇家印刷厂印刷 新华书店北京发行所发行

2012 年 1 月第 1 版 2012 年 1 月北京第 1 次印刷

开本：787mm×1092mm 1/16 印张：12

字数：278 千字

定价：20.00 元

前　言

线性代数和概率论是工科专业十分重要的基础课，传统的教材一直是作为两门课程在开设。随着高等教育的大众化和课程改革的发展，传统教材已渐渐不能适应教学需要。本教材按照教育部非数学类专业数学基础课程教学指导委员会制定的《工科类本科数学基础课程教学基本要求》，兼顾农林院校特点，参考高等学校工科类本科专业线性代数和概率论课程的教学大纲和考研大纲编写而成。全书分为上下两篇，上篇为线性代数内容，包括行列式、矩阵与向量、矩阵与线性方程组、二次型与线性变换等内容，以矩阵贯穿始终；下篇为概率论内容，包括概率论的基本概念、随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律和中心极限定理等内容。

本教材在编写时对内容顺序进行了调整，尽量使内容安排趋于合理，符合学生认知规律。力求理论体系完整、结构简明、条理清晰。突出基本概念、基本原理，强调对学生应用能力的培养。认真贯彻少而精的原则，尽量减少繁琐而又难以起到启发思维作用的逻辑证明，将主要篇幅用于较简单的典型情况，因而降低了难度，又无损于基本内容。精选了例题和习题，使例题和习题不仅配合教学内容，而且能让学生在学习中获得分析问题、解决问题的思想方法。本教材设计教学学时为 80 学时，上下篇各 40 学时，在教学中可根据情况增减。

本教材由云南农业大学郑大川、吴瑞武担任主编，云南农业大学赵军、刘雯、杨建红，深圳职业技术学院梁兵担任副主编，云南农业大学艾世猛、杨如艳、高鑫、左珊珊、夏梓祥、吴奇、吴兴纯、邱靖，云南省机电职业技术学院黄永林参加编写。

非常感谢云南农业大学教务处对本教材的出版给予的关心和大力支持。

由于编者的水平有限，错误和不足在所难免，期待读者批评和指正。

编　者

2011 年 10 月

目　　录

前言

上篇　线性代数 …… 1

第一章　行列式 …… 3

第一节　行列式的概念 …… 3
一、行列式的引入和行列式的概念 …… 3
二、全排列和逆序数 …… 6
三、n 阶行列式的计算 …… 7
四、特殊行列式的计算 …… 7
五、课堂练习 …… 9
第二节　行列式的性质及计算 …… 9
一、行列式的性质 …… 9
二、利用行列式性质计算行列式 …… 11
三、课堂练习 …… 12
第三节　行列式展开式及应用 …… 13
一、行列式按行(列)展开 …… 13
二、范德蒙行列式 …… 16
三、利用克拉默(Cramer)法则解线性方程组 …… 18
四、课堂练习 …… 20
第一章练习题 …… 20

第二章　矩阵与向量 …… 24

第一节　矩阵 …… 24
一、矩阵的基本概念 …… 24
二、一些特殊的矩阵 …… 25
三、矩阵的基本运算 …… 26
四、课堂练习 …… 29
第二节　矩阵的运算 …… 29
一、方阵的行列式 …… 29

二、矩阵的逆 …… 30
三、矩阵的分块运算 …… 32
四、矩阵的秩 …… 35
五、课堂练习 …… 36
第三节　向量 …… 36
一、n 维向量 …… 36
二、向量组的线性相关性 …… 38
三、向量组的秩 …… 41
四、课堂练习 …… 44
第二章练习题 …… 44

第三章　矩阵与线性方程组 …… 46

第一节　矩阵的初等变换 …… 46
一、初等变换 …… 46
二、初等矩阵 …… 46
三、初等变换的应用 …… 49
四、课堂练习 …… 53
第二节　利用矩阵求解线性方程组 …… 53
一、齐次与非齐次线性方程组 …… 53
二、求解线性方程组 …… 54
三、方程组的解的结构 …… 58
四、课堂练习 …… 64
第三节　解空间和正交化 …… 65
一、解空间 …… 65
二、向量的正交化过程 …… 65
三、课堂练习 …… 68
第三章练习题 …… 69

第四章　二次型和线性变换 …… 71

第一节　基本概念 …… 71
一、特征值和特征向量 …… 71
二、特征值和特征向量的性质 …… 72
三、相似矩阵 …… 73
四、对称矩阵 A 对角化的过程 …… 75
五、课堂练习 …… 76
第二节　二次型及其标准形 …… 77
一、二次型 …… 77
二、利用正交变换将二次型转化为标准形 …… 78
三、正交变换的应用 …… 80
四、正定二次型 …… 80
五、课堂练习 …… 81
第三节　线性空间 …… 81

一、线性空间的定义 …… 81
二、线性空间的基本性质 …… 82
三、维数、基与坐标 …… 83
四、常用空间的标准基 …… 84
五、基变换与坐标变换 …… 85
六、课堂练习 …… 86
第四节 线性变换 …… 86
一、线性变换的基本概念 …… 86
二、线性变换的矩阵表示 …… 88
三、线性变换在不同基下的矩阵表示 …… 90
四、课堂练习 …… 91
第四章练习题 …… 91

下篇 概率论 …… 93

第一章 概率论的基本概念 …… 95

第一节 随机试验与随机事件 …… 95
一、必然现象与随机现象 …… 95
二、随机试验 …… 95
三、样本空间、样本点 …… 96
四、随机事件 …… 97
五、事件的关系与运算 …… 97
六、课堂练习 …… 99
第二节 古典概型与几何概型 …… 99
一、随机事件的频率 …… 100
二、概率的统计定义 …… 101
三、古典概型的概念 …… 101
四、排列与组合 …… 102
五、几何概型 …… 105
六、课堂练习 …… 106
第三节 概率的公理化定义及公式 …… 106
一、概率的公理化定义 …… 106
二、概率的性质 …… 107
三、条件概率 …… 108
四、乘法定理 …… 110
五、全概率公式 …… 111
六、贝叶斯公式 …… 112
七、课堂练习 …… 113
第四节 事件的独立性和伯努利概型 …… 113
一、两个随机事件的独立性 …… 113
二、多个随机事件的独立性 …… 114
三、伯努利概型 …… 115

四、课堂练习 …… 116
第一章练习题 …… 116

第二章　随机变量及其分布 …… 118

第一节　一维随机变量及其分布 …… 118
一、一维离散型随机变量和一维连续型随机变量的定义 …… 118
二、常见一维离散型随机变量的分布律及分布函数 …… 119
三、常见一维连续型随机变量的概率密度函数及分布函数 …… 122
四、随机变量函数的分布 …… 127
五、课堂练习 …… 130
第二节　二维随机变量及其分布 …… 131
一、二维离散型随机变量和二维连续型随机变量的定义 …… 131
二、二维离散型随机变量的联合分布律、边缘分布和条件分布 …… 131
三、二维连续型随机变量的概率密度函数和联合分布函数 …… 134
四、课堂练习 …… 136
第三节　二维随机变量函数的分布 …… 137
一、$Z=X+Y$ 的分布 …… 137
二、$Z=XY$ 的分布 …… 138
三、课堂练习 …… 140
第二章练习题 …… 140

第三章　随机变量的数字特征 …… 144

第一节　一维随机变量的数字特征 …… 144
一、数学期望 …… 144
二、方差 …… 146
三、常见分布的数学期望和方差 …… 147
四、课堂练习 …… 149
第二节　二维随机变量的数字特征 …… 149
一、数学期望和方差 …… 149
二、协方差与相关系数 …… 150
三、矩和协方差矩阵 …… 153
四、课堂练习 …… 154
第三章练习题 …… 154

第四章　大数定律及中心极限定理 …… 157

第一节　大数定律 …… 157
一、切比雪夫大数定律 …… 157
二、伯努利大数定律 …… 158
三、辛钦大数定律 …… 159
四、课堂练习 …… 160
第二节　中心极限定理 …… 160

一、独立同分布的中心极限定理 …… 160
二、棣莫佛-拉普拉斯中心极限定理 …… 161
三、中心极限定理的应用 …… 162
四、课堂练习 …… 163
第四章练习题 …… 164

附录 …… 165

附表 1　二项分布表 …… 165
附表 2　泊松分布表 …… 175
附表 3　标准正态分布表 …… 177

主要参考文献 …… 178

上　篇

线性代数

第一章

行 列 式

行列式是研究线性方程组的一个重要工具．早在 18 世纪，为了寻求含有 n 个未知数 n 个方程的线性方程组的一般解的公式，莱布尼茨和克拉默首先引进了行列式的概念，随后它被广泛地用于数学、工程技术及经济学等众多领域．本章主要介绍 n 阶行列式的定义、性质、计算方法以及利用行列式求解 n 元线性方程组的克拉默(Cramer)法则．

第一节　行列式的概念

一、行列式的引入和行列式的概念

1. 二阶行列式的引入

在线性代数中，将含有两个未知量的二元线性方程组一般形式写为

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2, \end{cases}$$

用加减消元法容易求出未知量 x_1，x_2 的值，当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，有

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}, \\ x_2=\dfrac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}. \end{cases}$$

注意到 x_1，x_2 表达式中分母 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 是方程组中未知量的四个系数确定的，把这四个数按它们在方程组中的位置，排成二行二列(横排称行，竖排称列)的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix}.$$

将表达式 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 称为该数表确定的二阶行列式，记为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

上述表达式可用对角线法则记忆：将左上角到右下角的连线称为主对角线，右上角到左下角的连线称为副对角线，于是二阶行列式便是主对角线上的两元素之积与副对角线上两元素之积的差．

由于该行列式中的元素就是二元线性方程组中未知量的系数，所以又称它为二元线性方

程组的系数行列式，并用字母 D 表示，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

如果将 D 中第 1 列的元素 a_{11}，a_{21} 和第 2 列的元素 a_{12}，a_{22} 分别换成常数项 b_1，b_2，则可得到行列式 D_1，D_2，这里

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}，D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

按以上运算规则，$D_1=b_1a_{22}-b_2a_{12}$，$D_2=a_{11}b_2-b_1a_{21}$，于是二元线性方程组的解的公式又可写为

$$x_1=\frac{D_1}{D}，x_2=\frac{D_2}{D}.$$

例 1 求解二元线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1-x_2=8, \\ 3x_1+2x_2=5. \end{cases}$$

解 $D=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=4+3=7$，$D_1=\begin{vmatrix} 8 & -1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}=16+5=21$，

$D_2=\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}=10-24=-14$，

于是得到

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{21}{7}=3，x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{-14}{7}=-2.$$

2. 三阶行列式的引入

含有三个未知量三个方程式的线性方程组的一般形式为

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3. \end{cases}$$

利用加减消元法可求出未知量 x_1，x_2，x_3 的值，当

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}\neq 0$$

时，有

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-a_{13}a_{22}b_3-a_{12}b_2a_{33}-b_1a_{23}a_{32}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}}, \\ x_2=\dfrac{a_{11}b_2a_{33}+b_1a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}b_3-a_{13}b_2a_{31}-b_1a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}b_3}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}}, \\ x_3=\dfrac{a_{11}a_{22}b_3+a_{12}b_2a_{31}+b_1a_{21}a_{32}-b_1a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}b_3-a_{11}b_2a_{32}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}}. \end{cases}$$

为了便于记忆，称记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

为三阶行列式，且定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

上面三阶行列式定义表示的是行列式中的元素按一定规律运算所得的 6 项乘积的代数和．式中每项均为不同行不同列的三个元素的乘积再冠以正负号，其规律遵循图 1.1 所示的对角线法则：图中有三条实线看做是平行于主对角线的连线，三条虚线看做是平行于副对角线的连线，实线上三元素的乘积冠以正号，虚线上三元素的乘积冠以负号．

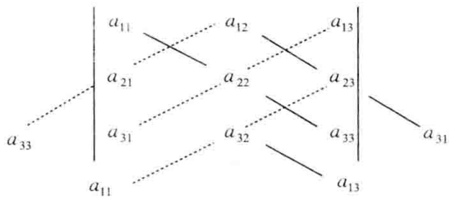

图 1.1

该行列式中的元素是三元线性方程组中未知量的系数，所以称它为三元线性方程组的系数行列式，也用字母 D 表示．将 D 中第 1 列、第 2 列、第 3 列的元素分别换成常数项 b_1，b_2，b_3 就可以得到另外三个三阶行列式 D_1，D_2，D_3，这里

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\ D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\ D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix},$$

于是三元线性方程组的解的公式又可写为

$$x_1 = \frac{D_1}{D},\ x_2 = \frac{D_2}{D},\ x_3 = \frac{D_3}{D}.$$

例 2 求解方程

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & x \\ 3 & 6 & x^2 \end{vmatrix} = 0.$$

解 计算方程左端的三阶行列

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & x \\ 3 & 6 & x^2 \end{vmatrix} = 3x^2 + 6x + 12 - 4x^2 - 6x - 9 = 3 - x^2,$$

$$3 - x^2 = 0 \Rightarrow x_1 = -\sqrt{3},\ x_2 = \sqrt{3}.$$

3. n 阶行列式的概念

对角线法则只适用于二阶和三阶行列式，为研究四阶和更高阶行列式，下面给出 n 阶行列式的概念．

定义 1 由排成 n 行 n 列的 n^2 个数 $a_{ij}(i, j = 1, 2, \cdots, n)$ 构成的记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式．数 a_{ij} 称为行列式的元素．元素 a_{ij} 的第一个下标 i 称为行标，表明该元素位于该行列式的第 i 行，第二个下标 j 称为列标，表明该元素位于该行列式的第 j 列．n 阶行列式表示的是行列式中所有可能的不同行不同列的 n 个元素的乘积再冠以正负号所得的 $n!$ 个数的代数和．

为了确定不同行不同列的 n 个元素的乘积的符号，先介绍有关全排列的知识．

二、全排列和逆序数

1. 全排列

定义 2 把 n 个不同的数(元素)排成一列，称为这 n 个数(元素)的全排列(简称排列).

例如：123，231，321，312，132，213 均为数 1、2、3 构成的全排列．

显然，对于 n 个不同的元素，它的全排列共有 $n!$ 个．

一般地，将 n 个不同元素 p_1，p_2，…，p_n 的任一全排列记为 $p_{i_1}p_{i_2}\cdots p_{i_n}$，其中 i_1 是 1，2，…，n 中的某一个数，i_2 是余下的 $n-1$ 个数中的某一个数，….

2. 逆序数

对于 n 个不同的元素，规定各元素之间有一个标准次序(例如，n 个不同的自然数，可规定由小到大为标准次序). 本书中，若无特殊说明，元素间排列的标准次序均规定为由小到大．例如，12345 为数 1、2、3、4、5 的全排列的标准次序排列．

定义 3 在一个由 n 个不同元素构成的全排列 p_1，p_2，…，p_n 中，如果有某个较大的数 p_i 排在较小的数 p_j 的前面，就称 p_i 与 p_j 构成了一个逆序．排列 p_1，p_2，…，p_n 中所有逆序的总数称为这个排列的逆序数，记为 $\tau(p_1p_2\cdots p_n)$.

定义 4 逆序数为奇数的排列称为奇排列，逆序数为偶数的排列称为偶排列．

例 3 判断排列 35241 的奇偶性．

解 在排列 35241 中，3 的前面无比它大的数，故 3 的逆序数为 0；5 的前面无比它大的数，故 5 的逆序数为 0；2 的前面比它大的数有 2 个，故 2 的逆序数为 2；4 的前面比它大的数有 1 个，故 4 的逆序数为 1；1 的前面比它大的数有 4 个，故 1 的逆序数为 4. 所以

$$\tau(35241)=0+0+2+1+4=7,$$

排列 35241 为奇排列．

3. 对换

定义 5 在排列 $p_1p_2\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n$ 中，如果只将 p_i 与 p_j 两元素的位置互换，得到一个新的排列 $p_1p_2\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n$，这样的变换称为一次对换．

定理 1 一个排列中的任意两个元素对换，将改变该排列的奇偶性．

证明 先证明相邻两个元素对换的情形．

设排列 $a_1a_2\cdots a_labb_1b_2\cdots b_m$ 经对换 a 与 b 的位置，得到排列

$$a_1a_2\cdots a_lbab_1b_2\cdots b_m.$$

显然，$a_1a_2\cdots a_l$ 以及 $b_1b_2\cdots b_m$ 的逆序数经过对换并没有改变，而 a，b 两元素的逆序数改变为：

当 $a>b$ 时，经对换后 a 的逆序数不变而 b 的逆序数减少 1；当 $a<b$ 时，经对换后 a 的逆序数增加 1 而 b 的逆序数不变．于是有

$$\tau(a_1\cdots a_lbab_1\cdots b_m)=\tau(a_1\cdots a_labb_1\cdots b_m)\pm1,$$

所以，经一次相邻对换，排列改变奇偶性．

再证一般对换的情形．

排列 $a_1a_2\cdots a_lab_1b_2\cdots b_mbc_1c_2\cdots c_n$ 经过 a 与 b 的对换，得到新的排列

$$a_1a_2\cdots a_lbb_1b_2\cdots b_mac_1c_2\cdots c_n.$$

将排列 $a_1a_2\cdots a_lbb_1b_2\cdots b_mac_1c_2\cdots c_n$ 看作排列 $a_1a_2\cdots a_lab_1b_2\cdots b_mbc_1c_2\cdots c_n$ 中 a 与 b_1 对换，得到新排列

$$a_1a_2\cdots a_lb_1ab_2\cdots b_mbc_1c_2\cdots c_n,$$

再将 a 与 b_2 对换，得到新排列 $a_1a_2\cdots a_lb_1b_2a\cdots b_mbc_1c_2\cdots c_n$，这样的对换反复做 $m+1$ 次，得到排列

$$a_1a_2\cdots a_lb_1b_2\cdots b_mbac_1c_2\cdots c_n.$$

将此排列中 b 与 b_m 对换，得到新排列 $a_1a_2\cdots a_lb_1b_2\cdots bb_mac_1c_2\cdots c_n$，再将 b 与 b_{m-1} 作对换，得到新排列 $a_1a_2\cdots a_lb_1b_2\cdots bb_{m-1}b_mac_1c_2\cdots c_n$，这样的对换反复做 m 次，就可得到排列

$$a_1a_2\cdots a_lbb_1b_2\cdots b_mac_1c_2\cdots c_n.$$

经过 $2m+1$ 次相邻对换，排列 $a_1a_2\cdots a_lab_1b_2\cdots b_mbc_1c_2\cdots c_n$ 变为排列

$$a_1a_2\cdots a_lbb_1b_2\cdots b_mac_1c_2\cdots c_n.$$

根据相邻对换的情形及 $2m+1$ 是奇数，得到这两个排列的奇偶性相反．

推论 奇排列变为标准排列的对换次数为奇数，偶排列变为标准排列的对换次数为偶数．

三、n 阶行列式的计算

定义 6 n 阶行列式 D 的值为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}.$$

这里记号 $\sum$ 为连加求和号，$(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 称为行列式的一般项，它是取自不同行不同列的 n 个元素的乘积．各项的符号是：当这一项中各元素的行标按自然数顺序排列后，如果列标的排列 $p_1p_2\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n$ 为偶排列，取正号；列标的排列为奇排列，则取负号．行列式的值是 $n!$ 个一般项的代数和．

n 阶行列式还可简记为 $\det(a_{ij})$，即 $D=\det(a_{ij})$，其中 a_{ij} 为行列式 D 的元素．

注意：当 $n=1$ 时，一阶行列式 $|a|=a$，注意不要与绝对值记号相混淆（$|a|=\sqrt{a^2}$）．

四、特殊行列式的计算

例 4 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_1 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \lambda_{n-1} & \cdots & 0 & 0 \\ \lambda_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

的值.(这种对角线以外元素全为零的行列式被称为对角形行列式)

解 由行列式的定义，和式 $\sum(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 中,只有当

$$p_1=n,\ p_2=n-1,\ \cdots,\ p_{n-1}=2,\ p_n=1$$

时，才能满足 $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}\neq0$. 所以

$$D=(-1)^{\tau(n(n-1)\cdots321)}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n,$$

这里，$\tau(n(n-1)\cdots321)=\dfrac{n(n-1)}{2}$.

例 5 证明

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

证明 由于当 $j>i$ 时，$a_{ij}=0$，故 D 中可能不为 0 的元素 a_{ip_t} 的下标应满足

$$p_t\leqslant i(t=1,\ 2,\ \cdots,\ i),$$

即

$$p_1\leqslant1,\ p_2\leqslant2,\ \cdots,\ p_n\leqslant n.$$

在所有排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 中，能满足上述关系的排列只有一个自然排列 $12\cdots n$，其逆序数为 0，D 中不为 0 的项只有唯一的一项 $(-1)^{\tau}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$. 符号为 $(-1)^0=1$，所以

$$D=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

这种对角线以上的元素均为零的行列式被称为下三角形行列式.

同理可得如下一些相关的结论：

(1) 上三角形行列式(对角线下方元素全为零的行列式)：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-2} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

(2) 下三角形行列式(对角线上方元素全为零的行列式)：

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{n1},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$