义务教育课程标准实验教科书

数学

九年级 上册

自读课本

人民教育出版社

自读课本

义务教育课程标准实验教科书

数　学

九年级　上册

自读课本

人民教育出版社中学数学室　组编

人民教育出版社

主　编　李果民

编　者　李果民　王　烁　朱小凌　杨　靖

　　　　班春虹　言承璎　刘金英

义务教育课程标准实验教科书

数　学

九年级上册

自读课本

人民教育出版社中学数学室　组编

*

人民教育出版社出版发行

网址：http://www.pep.com.cn

人民教育出版社印刷厂印装　全国新华书店经销

*

开本：787 毫米×1 092 毫米　1/16　印张：5.25　字数：110 000

2006 年 1 月第 1 版　　2006 年 4 月第 1 次印刷

ISBN 7－107－19368－6 / G·12458（课）　定价：6.10 元

如发现印、装质量问题，影响阅读，请与出版科联系调换。

（联系地址：北京市海淀区中关村南大街 17 号院 1 号楼　邮编：100081）

目录

第二十一章　二次根式

第二十二章　一元二次方程

第二十三章　旋　　转

第二十四章　圆

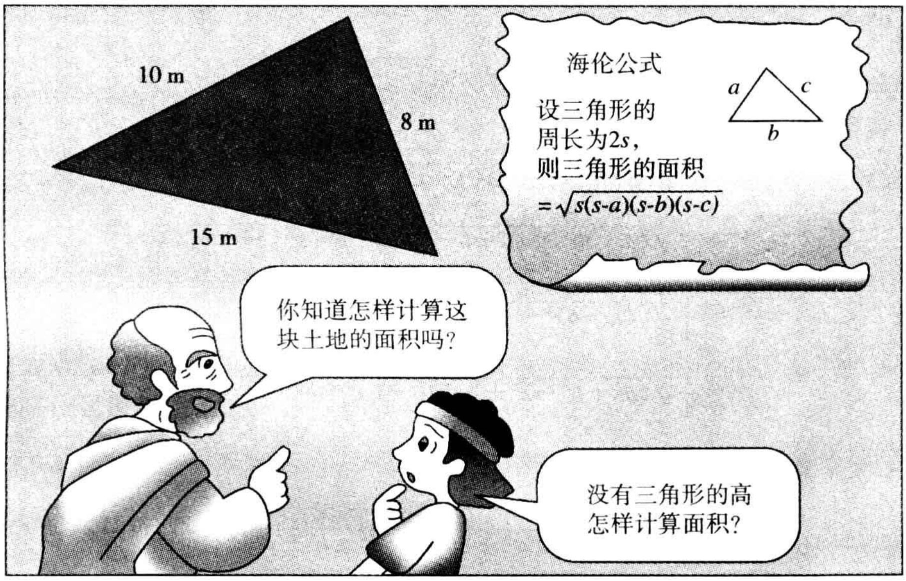
第二十五章　概率初步

第二十一章 二次根式

1 测量大师——海伦

海伦（Heron of Alexandria，约 1 世纪）生于埃及，是古希腊数学家、力学家、机械学家和测量学家，曾在罗马帝国的著名学术研究城市亚历山大教授数学、物理学等．海伦十分重视数学的实际应用，这可以从他的著作《测地术》《几何》《体积求法》中略知一二，其中《测地术》更被古人采用了数百年之久．除此之外，他曾为欧几里得的《原本》作注释及补充．

海伦以解决几何测量问题而闻名．他给出了很多平面图形的面积公式和立体的体积公式，例如：正三边形至正十二边形的面积计算方法．在《测地术》中，他给出了著名的三角形面积公式——海伦公式．



此外，海伦还把他的理论应用于机械设计，并有《机械学》《投石砲》《枪砲设计》等著作，同时他也是水钟、测量仪、起重机等机械设备的设计者．可见他是一位把数学应用于生活的科学家．

已知三角形的三条边长分别是 a、b、c，则三角形的面积为

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\text{，其中 } p=\frac{a+b+c}{2}.$$

这个公式叫做海伦公式（Heron’s Formula）.

海伦公式出现在海伦的《测地术》一书中，因此人们一直将此公式归功于海伦，但也有人认为此公式实际上是阿基米德发现的．海伦用文字在《经纬仪》和《度量》两书中都叙述了这一公式的证明．虽然现在已公认海伦公式是阿基米德发现的，但这个名称已成为习惯用法.

2　海伦公式的证明

设$\triangle ABC$中，a、b、c分别为角A、B、C的对边，h_a为a边上的高，R、r分别为$\triangle ABC$外接圆、内切圆的半径，$p=\frac{1}{2}(a+b+c)$，则有

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}ab\times\sin C=rp$$

$$=2R^2\sin A\sin B\sin C=\frac{abc}{4R}$$

$$=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

其中，$S_{\triangle ABC}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$就是著名的海伦公式，记载于希腊数学家海伦的著作《测地术》中.

海伦公式在解题中有十分重要的应用.

（1）海伦公式的变形

$$S_{\triangle ABC}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)} \quad ①$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{[(a+b)^2-c^2][c^2-(a-b)^2]} \quad ②$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{(a^2+b^2-c^2+2ab)[-(a^2+b^2-c^2-2ab)]} \quad ③$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2} \quad ④$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4}. \quad ⑤$$

（2）海伦公式的证明

证法一：利用勾股定理

分析：先从三角形最基本的计算公式$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ah_a$入手，运用勾股定理推导出海伦公式.

证明：如图21-1，$h_a\perp BC$，根据勾股定理，得

$$\begin{cases} x=a-y, \\ h_a^2=b^2-y^2, \\ h_a^2=c^2-x^2. \end{cases}$$

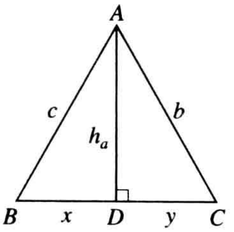


图 21-1

解得

$$x=\frac{a^2+c^2-b^2}{2a}, y=\frac{a^2-c^2+b^2}{2a}.$$

$$h_a=\sqrt{b^2-y^2}=\sqrt{b^2-\frac{(a^2-c^2+b^2)^2}{4a^2}}=\frac{\sqrt{4a^2b^2-(a^2-c^2+b^2)^2}}{2a}.$$

则 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}a\times\frac{\sqrt{4a^2b^2-(a^2-c^2+b^2)^2}}{2a}=\frac{1}{4}\sqrt{4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2}$.

此时 $S_{\triangle ABC}$ 为变形④，故得证.

证法二：利用斯氏定理

分析：在证法一的基础上运用斯氏定理直接求出 h_a. 斯氏定理：如图 21-2，$\triangle ABC$ 边 BC 上任取一点 D，若 $BD=u$，$DC=v$，$AD=t$. 则

$$t^2=\frac{b^2u+cv^2}{a}-uv.$$

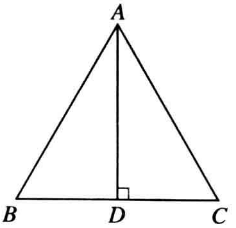


图 21-2

证明：由证法一可知

$$u=\frac{a^2-b^2+c^2}{2a}, v=\frac{a^2+b^2-c^2}{2a}.$$

$\therefore$ $$h_a^2=t^2=\frac{b^2a^2-b^4+b^2c^2+c^2a^2+c^2b^2-c^4}{2a^2}-\frac{a^4-(b^2-c^2)^2}{4a^2},$$

$\therefore$ $$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}a\times\sqrt{\frac{2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4}{2a}}$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4}.$$

此时为 $S_{\triangle ABC}$ 的变形⑤，故得证.

证法三：利用余弦定理

分析：由变形② $S=\frac{1}{4}\sqrt{[(a+b)^2-c^2][c^2-(a-b)^2]}$ 可知，运用余弦定理 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$ 对其进行证明.

证明：要证明 $S=\frac{1}{4}\sqrt{[(a+b)^2-c^2][c^2-(a-b)^2]}$ 则要证：

$$S=\frac{1}{4}\sqrt{[(a+b)^2-(a^2+b^2-2ab\cos C)^2][(a^2+b^2-2ab\cos C)^2-(a-b)^2]}$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{(2ab+2ab\cos C)(2ab-2ab\cos C)}.$$

$$=\frac{1}{2}ab\times\sin C.$$

此时 $S=\frac{1}{2}ab\times\sin C$ 为三角形面积的计算公式，故得证.

证法四：利用恒等式

分析：考虑运用 $S_{\triangle ABC}=rp$，因为有三角形内接圆半径出现，可考虑应用三角函数的恒等式. 恒等式：若 $\angle A+\angle B+\angle C=180°$，那么：

$$\tan\frac{A}{2}\cdot\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{A}{2}\cdot\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{B}{2}\cdot\tan\frac{C}{2}=1.$$

证明：如图 21-3，$\tan\frac{A}{2}=\frac{r}{y}$ ①

$\tan\frac{B}{2}=\frac{r}{z}$ ②

$\tan\frac{C}{2}=\frac{r}{x}$ ③

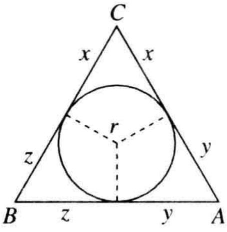


图 21-3

根据恒等式，得

$$\frac{1}{\tan\frac{A}{2}}+\frac{1}{\tan\frac{B}{2}}+\frac{1}{\tan\frac{C}{2}}=\frac{1}{\tan\frac{A}{2}\ \tan\frac{B}{2}\ \tan\frac{C}{2}}.$$

将①②③代入，得

$$\frac{x+y+z}{r}=\frac{xyz}{r^3},$$

∴ $$r^2(x+y+z)=xyz.$$ ④

如图可知

$$a+b-c=(x+z)+(x+y)-(z+y)=2x,$$

∴ $$x=\frac{a+b-c}{2}.$$

同理得

$$y=\frac{b+c-a}{2},\ z=\frac{a+c-b}{2}.$$

代入④，得

$$r^2\cdot\frac{a+b+c}{2}=\frac{(a+b-c)(b+c-a)(a+c-b)}{8}.$$

两边同乘以$\frac{a+b+c}{2}$，得

$$r^2\cdot\frac{(a+b+c)^2}{4}=\frac{(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(a+c-b)}{16},$$

两边开方，得

$$r\cdot\frac{a+b+c}{2}=\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(a+c-b)}.$$

左边 $r\cdot\frac{a+b+c}{2}=r\cdot p=S_{\triangle ABC}$，右边为海伦公式变形①，故得证.

证法五：利用半角定理

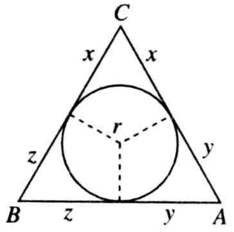


图 21-4

半角定理：$\tan\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{(p-c)(p-b)}{p(p-a)}}$，

$$\tan\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-c)(p-a)}{p(p-b)}},$$

$$\tan\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}.$$

证明：如图 21-4，根据 $\tan\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{(p-c)(p-b)}{p(p-a)}}=\dfrac{r}{y}$，

∴ $$r=\sqrt{\frac{(p-c)(p-b)}{p(p-a)}}\times y. \quad ①$$

同理 $$r=\sqrt{\frac{(p-c)(p-a)}{p(p-b)}}\times z, \quad ②$$

$$r=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}\times x. \quad ③$$

①×②×③，得

$$r^3=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p^3}}\times xyz.$$

∵ 由证法一，$$x=\frac{b+a-c}{2}=\frac{b+a+c}{2}-c=p-c,$$

$$y=\frac{b-a+c}{2}=\frac{b+a+c}{2}-a=p-a,$$

$$z=\frac{a-b+c}{2}=\frac{b+a+c}{2}-b=p-b,$$

∴ $$r^3=\sqrt{\frac{[(p-a)(p-b)(p-c)]^3}{p^3}},$$

∴ $$r=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}.$$

∴ $S_{\triangle ABC}=r\cdot p=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

故得证.

3 海伦公式的推广

由于在实际应用中，往往需要计算四边形的面积，所以要对海伦公式进行推广．由于三角形内接于圆，所以猜想海伦公式的推广为：对任意内接于圆的四边形 $ABCD$，设 $p=\dfrac{a+b+c+d}{2}$，则

$$S_{四边形}=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}.$$

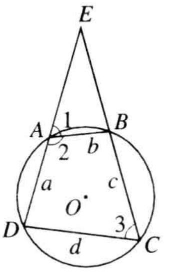


图 21-5

现根据猜想进行证明.

证明：如图 21-5，延长 DA，CB 交于点 E. 设 $EA=e$　$EB=f$.

∵　$\angle 1+\angle 2=180°$，$\angle 2+\angle 3=180°$，

∴　$\angle 1=\angle 3$，

∴　$\triangle EAB\backsim\triangle ECD$.

∴　$\dfrac{f}{a+e}=\dfrac{e}{f+c}=\dfrac{b}{d}$，　$\dfrac{S_{\triangle EAB}}{S_{四边形ABCD}}=\dfrac{b^2}{d^2-b^2}$.

解得　$e=\dfrac{b(ab+cd)}{d^2-b^2}$，　①

$f=\dfrac{b(ad+bc)}{d^2-b^2}$.　②

由于　$S_{四边形ABCD}=\dfrac{d^2-b^2}{b^2}S_{\triangle EAB}$，

将①、②和 $b=\dfrac{b(d^2+b^2)}{d^2-b^2}$ 代入公式变形④，得

$$S_{四边形ABCD}=\frac{d^2-b^2}{4b^2}\sqrt{4e^2b^2-(e^2+b^2-f^2)^2}$$

$$=\frac{d^2-b^2}{4b^2}\sqrt{4\frac{b^4(ab+cd)^2(d^2-b^2)^2}{(d^2-b^2)^4}-\left[\left(\frac{b^2(ab+cd)^2}{(d^2-b^2)^2}+\frac{b^2(d^2-b^2)^2}{(d^2-b^2)^2}-\frac{b^2(ad+bc)^2}{(d^2-b^2)^2}\right)\right]^2}$$

$$=\frac{d^2-b^2}{4b^2}\sqrt{\frac{b^4}{(d^2-b^2)^4}\{4(ab+cd)^2(d^2-b^2)^2-[(ab+cd)^2+(d^2-b^2)^2-(ad+bc)^2]^2\}}$$

$$=\frac{1}{4(d^2-b^2)}\sqrt{4(ab+cd)^2(d^2-b^2)^2-[\{ab+cd\}^2+\{d^2-b^2\}^2-\{ad+bc\}^2]^2}$$

$$=\frac{1}{4(d^2-b^2)}\sqrt{4(ab+cd)^2(d^2-b^2)^2-(a^2b^2+c^2d^2+d^4+b^4-2d^2b^2-a^2d^2-b^2c^2)}$$

$$=\frac{1}{4(d^2-b^2)}\sqrt{4(ab+cd)^2(d^2-b^2)^2-[b^2(a^2+b^2-d^2-c^2)+d^2(d^2-b^2-a^2+c^2)}$$

$$=\frac{1}{4(d^2-b^2)}\sqrt{(d^2-b^2)^2[4(ab+cd)^2-(c^2+d^2-b^2-a^2)^2]}$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{(2ab+2cd+c^2+d^2-b^2-a^2)(2ab+2cd-d^2+b^2+a^2-c^2)}$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{[(a+c)^2-(b-d)^2][(b+d)^2-(a-c)^2]}$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c-d)(a+b+d-c)(a+d+c-b)(b+d+c-a)}$$

$$=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

所以，海伦公式的推广得证.

4 海伦公式的推广的应用

海伦公式的推广在实际解题中有着广泛的应用，特别是在有关圆内接四边形的各种综合题中，直接运用海伦公式的推广往往事半功倍.

例 如图 21-6，四边形 $ABCD$ 内接于圆 O 中，$S_{ABCD}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$，$AD=1$，$AB=1$，$CD=2$. 求：四边形可能为等腰梯形.

解：设 $BC=x$，由海伦公式的推广，得

$$\frac{1}{4}\sqrt{(1+1+2-x)(1+1+x-2)(2+x+1-1)(2+x+1-1)}=\frac{3\sqrt{3}}{4},$$

$$(4-x)(2+x)^2=27,$$

$$x^4-12x^2-16x+27=0,$$

$$x^2(x^2-1)-11x(x-1)-27(x-1)=0,$$

$$(x-1)(x^3+x^2-11x-27)=0,$$

$$x=1\text{ 或 }x^3+x^2-11x-27=0,$$

当 $x=1$ 时，$AD=BC=1$.

所以四边形可能为等腰梯形.

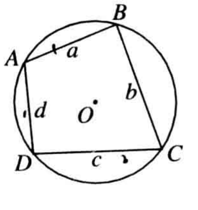


图 21-6

5 南宋数学家——秦九韶

秦九韶（约 1202—1261）字道古，父亲在南宋朝廷里当一名不大的官，他跟随父亲居住在杭州，因而有机会向太史学习天文、历法，又跟隐士学习数学. 1244 年，秦九韶因母丧在家守孝，在此期间他把历年积累下来的数学研究成果加以整理，于淳佑七年（1247 年）九月，写出《数书九章》十八卷.

《数书九章》是一部划时代的数学巨著. 全书共 81 道题，分为九大类：大衍类、天时类、田域类、测望类、赋役类、钱谷类、营建类、军旅类、市易类. 全书实用性强，所设问题复杂，解题步骤详细. 其中对“大衍求一术”（一次同余式解法）和“正负开方术”（高次方程的数值解法）等有十分深入的研究. 一次同余式问题最早出现在成书于 4、5 世纪的《孙子算经》“物不知数”中，但对此问题给以理论上的说明，则是由秦九韶做出的. 西方直到 18、19 世纪时，才由瑞士数学家欧拉（Euler，1707—1783）、高斯（Gauss，1777—1855）获得与“大衍求一术”相同的定理. 而高次方程的数值解法是秦九韶在贾宪、刘益的基础上推广而来的. 英国数学家霍纳（Horner，1786—1837）在 1819 年才发表与“正负开方术”一样的霍纳法.

宋代是中国古代数学的鼎盛时期，是中国古代数学的颠峰. 宋朝涌现出许多杰出的数

学家，出现了大批有份量的数学著作．宋代抽象的数学成就极高，在希腊文明与西方之间的空白地带鹤立鸡群．宋代的代数学充分发挥了绝对化的方法，把汉代方程解法的组合变换式发展到了奇妙的境界，而西方的方程学在几个世纪之后才出现．数学家秦九韶在《数书九章》中将“增乘开方法”加以推广，论述了高次方程的数值解法，并且列举了 20 多个取材于实践的高次方程的解法（最高为十次方程）．在西方，直到 16 世纪意大利人菲洛才提出三次方程的解法．另外，秦九韶还对一次同余式理论进行过研究并推广了孙子定理，他的“大衍求一术”将孙子定理的方法从较小的数和较少的同余式个数推广到一般解法．秦九韶还得出了与希腊海伦公式等价的由三角形三边求面积的公式．

6　你了解中国的广播电视塔吗

到 1996 年初，中国超过 200 米的广播电视塔已有 12 座．其中天津广播电视塔，简称“天塔”，高 415.2 米，为亚洲第三、世界第四高塔；上海东方明珠广播电视塔高 468 米，为亚洲第一，世界第三高塔．

那么为什么要把电视塔建得如此之高呢？这是因为电视塔越高，电视节目信号传播的区域就越广．大家都知道，电视塔越高，从塔顶发射出的电磁波传播得越远，从而能收看到电视节目的区域就越广．如果电视塔高为 h km，电视节目信号的传播半径为 r km，则两者之间存在关系 $r=\sqrt{2Rh}$，其中 R 是地球半径，$R\approx 6\ 400$ km，现有两座高分别为 400 m、450 m 的电视塔，问它们的传播半径的比为多少？

我们设两个电视塔的传播半径分别为 r_1、r_2，因为 $r=\sqrt{2Rh}$，400 m＝0.4 km，450 m＝0.45 km，所以

$$\frac{r_1}{r_2}=\frac{\sqrt{2Rh_1}}{\sqrt{2Rh_2}}=\frac{\sqrt{h_1}}{\sqrt{h_2}}=\frac{\sqrt{0.4}}{\sqrt{0.45}}=\frac{\sqrt{40}}{\sqrt{45}}=\frac{2\sqrt{10}}{3\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

天津广播电视塔，简称“天塔”，高 415.2 米，为亚洲第三、世界第四高塔．天塔自水中兀起，景观为天下所独有．塔身挺拔俊秀，一揽九河风流；塔楼飘忽云间，俯瞰人间繁华．更有天塔湖一池碧水，北立喷泉，因歌而起舞，南耸群峰，瀑落而霞飞．云天溶洞，奇石嶙峋，险径通幽，堪称津门首景，旅游胜地．天塔游览区大厅内遍植修竹，向人们展示绿色生命之美；榕树、溶洞、迭层岩，使游人倍感与自然的融合．塔楼上的太空旋厅、时光隧道，以其独特的、梦幻般的设计构思，使游人如置身九天．而塔上设置的多种科幻游艺项目，更使游人在观光览胜的同时，凭添了几多乐趣．

天津“天塔”

7　你能看出一个无理数的整数部分与小数部分吗

大家都知道像小数6.5的整数部分是6，小数部分为0.5．那么无理数是无限不循环小数，我们能否说出这样的特殊小数的整数部分与小数部分？

例如：无理数$\sqrt{6}+1$，因为$4<6<9$，所以$2<\sqrt{6}<3$，于是$3<\sqrt{6}+1<4$，可得$\sqrt{6}+1$的整数部分为3，小数部分为$\sqrt{6}+1-3=\sqrt{6}-2$．

8　怎样化简有"特别说明"的二次根式

有"特别说明"的二次根式的化简，常见于教材的习题、中考试题和竞赛试题中，解答这类问题通常分三步进行．第一步是运用公式$a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2$把被开方数化为一个代数式的平方；第二步是根据"特别说明"得到这些代数式是正数还是负数（是非正数还是非负数）；第三步是根据公式

$$\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases}a(a>0),\\0(a=0),\\-a(a<0)\end{cases}$$

进行化简．下面举例说明．

（1）以不等式形式给出"特别说明"

例1　化简：$|1-x|-\sqrt{x^2-6x+9}(1.5<x<2.5)$．

解：∵　$|1-x|-\sqrt{x^2-6x+9}=|1-x|-\sqrt{(x-3)^2}$，

又∵　$1.5<x<2.5$，故$x>1$，$x<3$，$1-x<0$，$x-3<0$．

∴　原式$=|1-x|-\sqrt{(x-3)^2}=-(1-x)-[-(x-3)]=2x-4$．

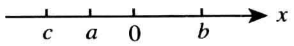
例2　化简：$\sqrt{a+2\sqrt{a-1}}-\sqrt{a-1}(a\geqslant 1)$．

解：∵　$a\geqslant 1$，∴　$a-1\geqslant 0$．

∴
$$\begin{aligned}\text{原式}&=\sqrt{a-1+2\sqrt{a-1}+1}-\sqrt{a-1}\\&=\sqrt{(\sqrt{a-1})^2+2\sqrt{a-1}+1}-\sqrt{a-1}\\&=\sqrt{(\sqrt{a-1}+1)^2}-\sqrt{a-1}\\&=\sqrt{a-1}+1-\sqrt{a-1}=1\end{aligned}$$

（2）在数轴上给出"特别说明"

例3　已知实数a，b，c在数轴上的位置如图：



求代数式 $\sqrt{a^2}-|a+c|+\sqrt{(c-b)^2}-|-b|$ 的值.

解：由已知，得 $c<a<0<b$.

∴ $a+c<0$，$c-b<0$.

∴ 原式 $=-a-[-(a+c)]+[-(c-b)]-b$

$=-a+a+c-c+b-b=0$.

（3）以方程形式给出的“特别说明”

例 4 已知 $x^2-3x+1=0$，求代数式 $\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}-2}$ 的值.

解：由 $x^2-3x+1=0$，知 $x\neq0$. 故 $x-3+\frac{1}{x}=0$，即 $x+\frac{1}{x}=3$，则

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\sqrt{x^2+2\cdot x\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-4}\\&=\sqrt{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4}\\&=\sqrt{3^2-4}\\&=\sqrt{5}.\end{aligned}$$