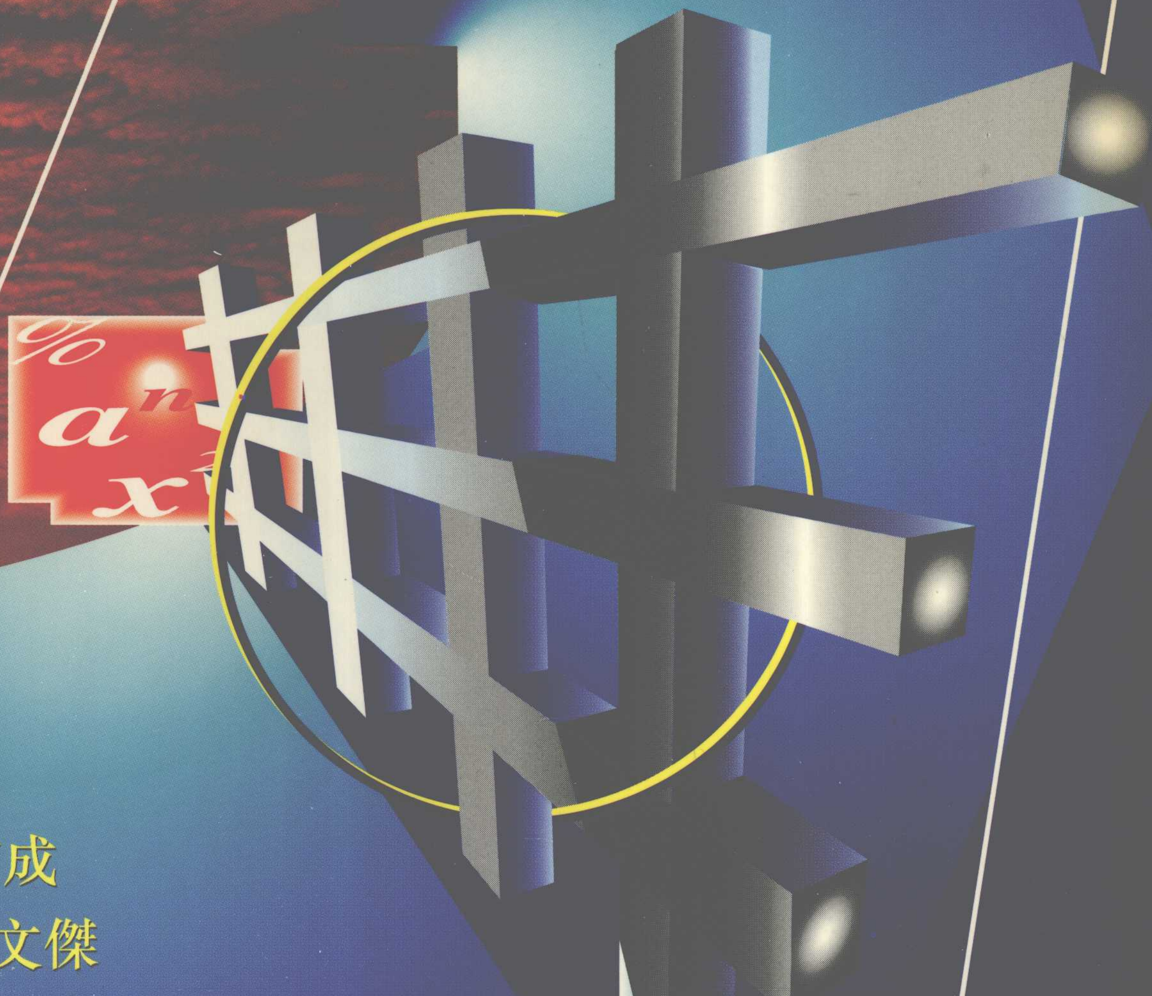
中學適用

今日數學 1B



梁貫成
黎文傑

第 8 章

我們在第 4 章已經學會如何使用量角器、直尺和圓規等工具來作圖。在這一章中，我們將會學習多一些主要使用圓規和直尺的幾何作圖法。

8.1 平分一個角

平分 (*bisect*) 一個角的意思是用一條直綫把這個角分成兩個相等的部份。平分一個角的綫稱為角平分綫 (*angle bisector*)。

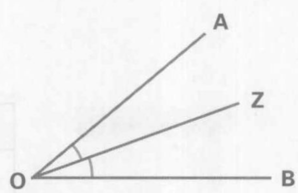


圖 1

在圖 1 中，∠AOZ = ∠BOZ，OZ 是 ∠AOB 的角平分綫。以下說明怎樣在一個已給的角中，作一條角平分綫。

◀ 注意：
OZ 可簡稱為 ∠*AOB* 的「分角綫」。

注意：在這本書裏，圖中橙色的字母和綫只是為了方便解說。當同學作圖時，不需要用這些字母標註所作的圖，或去畫這些綫。

作圖法

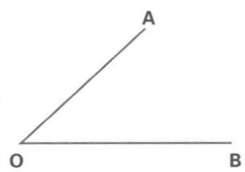
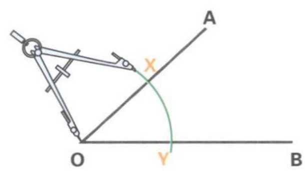
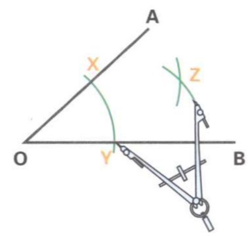
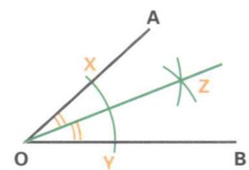
	步驟 1	步驟 2	步驟 3
			
已知 ∠AOB。	以 O 為圓心，取任何適當的長度為半徑，畫一個弧，使它與 OA 相交於 X，與OB 相交於Y 。	以 X 和 Y 為圓心，取一個適當的長度為半徑，畫兩個弧，使這兩個弧相交於 Z 。	連接 OZ，則 ∠AOZ = ∠BOZ。

圖 2

我們怎能肯定 ∠AOZ = ∠BOZ 呢？

參看圖 2 中的步驟 3。連接 X 點和 Z 點，便形成三角形 XOZ；然後連接Y 點和 Z 點，便形成三角形YOZ。結果如圖 3 所示。

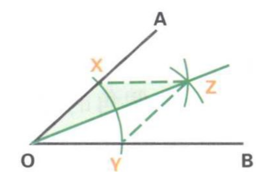


圖 3

XOZ 和 YOZ 這兩個三角形是全等的，

即　　$\triangle XOZ \cong \triangle YOZ$　　(*SSS*)

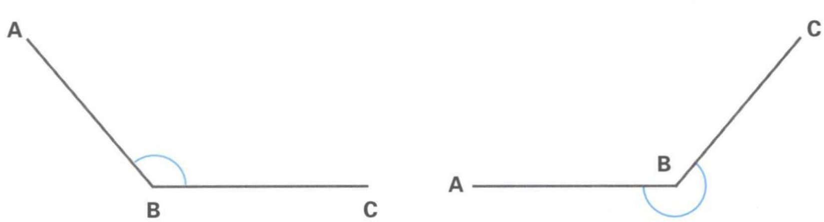
$\therefore$　　$\angle XOZ = \angle YOZ$

因此　　$\underline{\angle AOZ = \angle BOZ}$。

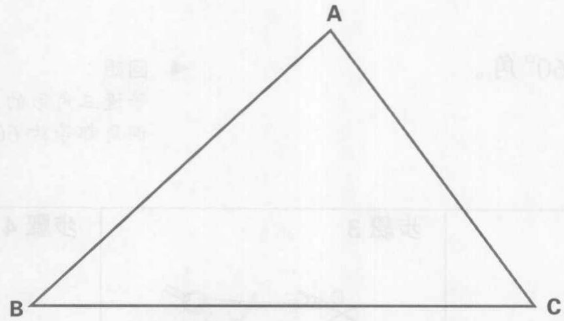
推理步驟：	
$XO = YO$	相等半徑
$OZ = OZ$	公共邊
$ZX = ZY$	相等半徑
$\triangle XOZ \cong \triangle YOZ$	*SSS*

課堂練習

1. 試用圓規和直尺平分以下的角。



2. 試平分以下三角形的每一個角。



問三條角平分綫是否相交於一點？　是 ☐　　否 ☐

8.2 作 90°、60°、45°、30° 的角

A. 作 *90°* 和 *45°* 的角

因為 $90^\circ = \frac{1}{2} \times 180^\circ$，所以平分 180° 角可得 90° 角。同樣道理，平分 90° 角可得 45° 角。

作圖法

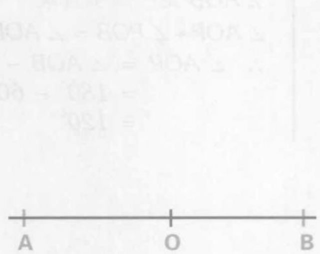
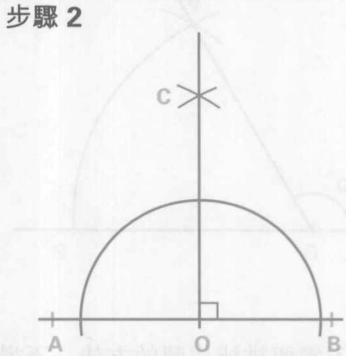
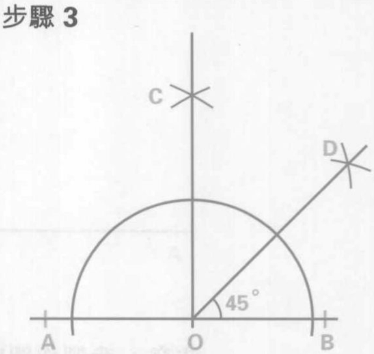
步驟 1	步驟 2	步驟 3
		
畫一個平角 AOB。	平分 ∠AOB，則 ∠AOC = ∠BOC = 90°。	平分 ∠BOC，則 ∠BOD = ∠COD = 45°。

圖 4

注意： 步驟 **1** 和 **2** 亦提供了一個方法去作一條通過 O 而垂直於綫段 AB 的直綫。

B. 作 60° 和 30° 的角

我們可以藉著作一個等邊三角形的角來作 60° 角。

◀ 回想：
等邊三角形的三條邊都相等，而每一個角都等於 60°。

作圖法

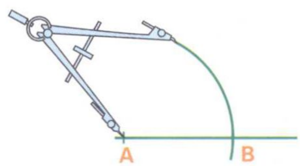
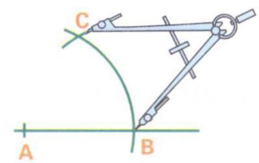
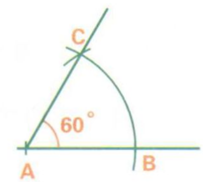
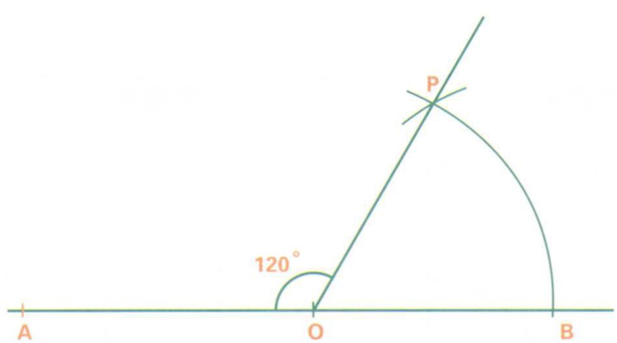
步驟 1	步驟 2	步驟 3	步驟 4
			
畫一條適當長度的綫段 AB 。	以 A 為圓心及 AB 為半徑，畫一個弧。	以 B 為圓心及 AB 為半徑，畫一個弧，使它與第一個弧相交於 C 。	連接 AC，則 ∠CAB = 60° (ABC 是一個等邊三角形)。

圖 5

平分 60° 角便可得 30° 角。這個作圖法留給同學們作為練習。

例一 只用圓規和直尺，作一個120° 的角。

解



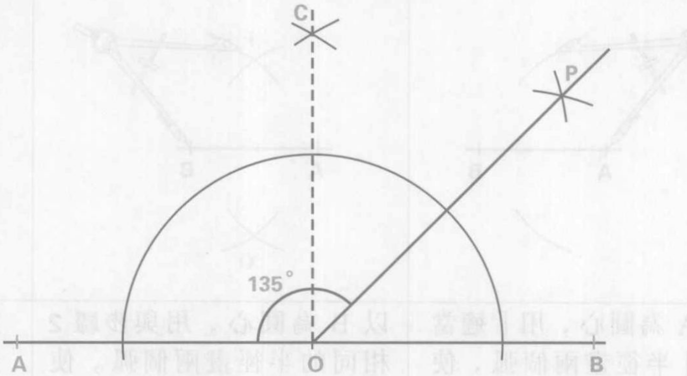
∠POB 是等邊三角形 POB 的一個角，因此 ∠POB = 60°，由於 ∠AOB 是一個平角及 ∠AOP + ∠POB = ∠AOB，

$$\begin{aligned}\therefore\ \angle AOP &= \angle AOB - \angle POB\\ &= 180° - 60°\\ &= 120°\end{aligned}$$

注意： 我們作圖時，並不需要描述作圖的方法。不過，我們應該將作圖時所畫的綫清楚地顯示出來，切勿擦去。

例二 只用圓規和直尺，作一個 $135°$ 的角。

解



OC 是平角 AOB 的角平分綫，而
OP 是∠COB 的角平分綫。
因此 $\angle AOP = \angle AOC + \angle COP$
$= 90° + 45°$
$= 135°$

8.3 作一條綫段的垂直平分綫

在圖 **6** 中，直綫 PQ 平分綫段 AB 於 N 並與 AB 成 $90°$ 角。PQ 稱為綫段 AB 的垂直平分綫 (*perpendicular bisector*)，而 N 點稱為綫段 AB 的中點 (*mid-point*)。

即 $PQ \perp AB$
和 $AN = NB$。

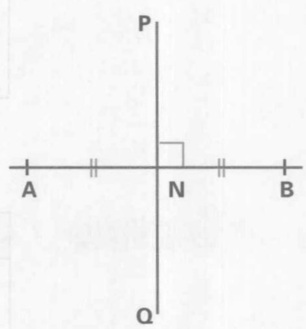


圖 **6**

作圖法

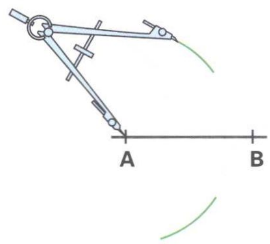
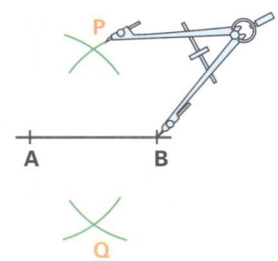
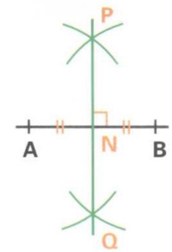
步驟 1	步驟 2	步驟 3	步驟 4
			
已知綫段 AB。	以 A 為圓心，用「適當的」半徑畫兩個弧，使它們分別位於綫段 AB 上、下兩邊的中央部份。	以 B 為圓心，用與**步驟 2** 相同的半徑畫兩個弧，使它們與剛才所畫的兩個弧相交於 P 和 Q 。	連接 P 和 Q 的直綫便是 AB 的垂直平分綫。

圖 7

注意： 在**步驟 2** 中所提及的「適當的」半徑是指比 $\frac{1}{2}$AB 長的半徑。

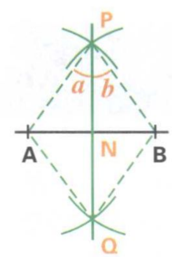


圖 8

讓我們看看為何 PQ 是 AB 的垂直平分綫 (即 $PQ \perp AB$，$AN = NB$)。

如圖 8 所示，連接 AP、AQ、BP 和 BQ。考慮由此形成的三角形 PAQ、PBQ、PAN 和 PBN，並利用圖中所示的記號，我們可得

$$\triangle PAQ \cong \triangle PBQ \qquad (SSS)$$

因此 $\angle a = \angle b$。

推理步驟：	
$PA = PB$	相等半徑
$AQ = BQ$	相等半徑
$PQ = PQ$	公共邊
$\triangle PAQ \cong \triangle PBQ$	SSS

此外 $\triangle PAN \cong \triangle PBN \qquad (SAS)$

因此 $\underline{AN = BN}$

及 $\angle ANP = \angle BNP = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$

$\therefore \underline{PQ \perp AB}$

推理步驟：	
$PA = PB$	相等半徑
$\angle a = \angle b$	已證
$PN = PN$	公共邊
$\triangle PAN \cong \triangle PBN$	SAS

$\angle ANP + \angle BNP = 180^\circ$

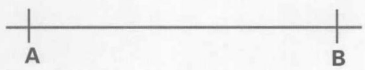
課堂 練習

[第 1–2 題] 在以下每條綫段 AB 中，

(i) 作一條垂直平分綫使 AB 與這條垂直平分綫相交於 N 點，

(ii) 量度 AN 和 BN 的長度。

1.



AN = ________

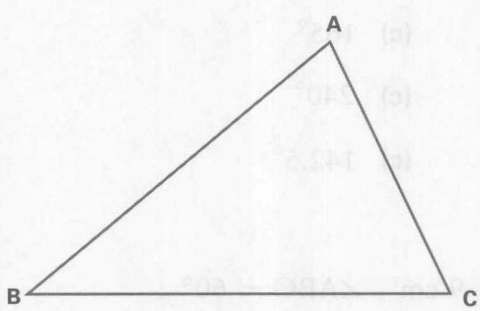
BN = ________

2.

AN = ________

BN = ________

3. 在以下所示 △ABC 的每條邊上，作一條垂直平分綫。



問三條垂直平分綫是否相交於一點？ 是 ☐ 否 ☐

習題 8

[在本習題中，如果沒有特別說明，只許使用圓規和直尺作圖。]

(程度一)

1. **(a)** 用量角器和直尺畫出下列的角。
(i) 40° **(ii)** 70°

(b) 平分 **(a)** 中所畫的角。

作下列的角。[第 **2–3** 題]

2. **(a)** 90° **(b)** 45°

3. **(a)** 60° **(b)** 30°

4. 試根據下列所提供的長度各畫一條綫段，然後作該綫段的垂直平分綫。

(a) 4cm **(b)** 5cm **(c)** 6.4cm **(d)** 7.8cm

(程度二)

5. **(a)** 用量角器和直尺畫出下列的角。
(i) 100° **(ii)** 162° **(iii)** 324°

(b) 平分 **(a)** 中所畫的角。

作下列的角。[第 **6–9** 題]

6. **(a)** 15° **(b)** 22.5° **(c)** 75°

7. **(a)** 105° **(b)** 150° **(c)** 165°

8. **(a)** 210° **(b)** 225° **(c)** 240°

***9.** **(a)** 37.5° **(b)** 112.5° **(c)** 142.5°

作下列三角形。[第 **10–12** 題]

10. $\triangle ABC$，其中 $AB = 7.5$ cm，$BC = 9$ cm，$\angle ABC = 60^\circ$。

11. $\triangle FGH$，其中 $FG = 5$ cm，$\angle GFH = 60^\circ$，$\angle FGH = 30^\circ$。

12. $\triangle PQR$，其中 $PQ = 7$ cm，$\angle PQR = \angle QPR = 45^\circ$。

13. **(a)** 作一個三角形ABC，其中 $AB = 6$ cm，$BC = 4.5$ cm，$CA = 7.5$ cm。

(b) 作 $\triangle ABC$的三條角平分綫。

(c) 問它們是否相交於一點？

14. **(a)** 畫一條長度為 8 cm 的綫段 AB。

(b) 將綫段 AB 分為 4 個相等部份。

***15.** **(a)** 作一個三角形 PQR，使 PQ = 6 cm，QR = 8 cm，∠PQR = 90°。

(b) 作 PQ 和 QR 的垂直平分綫。

(c) 延長 **(b)** 中兩條垂直平分綫，使它們相交於 S。問 S 是否 PR 上的一點？

(d) 量度 SP、SQ 和 SR 的長度。問它們是否相等？

***16.** **(a)** 作一個三角形 ABC，使 AB = 4.5 cm，BC = 5 cm，∠ABC = 60°。

(b) 在 △ABC 的三條邊上作三條垂直平分綫，並把它們的交點記為 O。

(c) 以 O 為圓心，畫一個以 OA 為半徑的圓。問這個圓是否過 B 和 C 兩點？

課文摘要

〔這是一篇提問式的「課文摘要」。試用方格中的資料來回答所給問題，從而得到一篇完整的課文摘要。〕

1. 平分一個角

角、兩

(a) 平分一個角的意思是用一條直綫把這個角分成 ______ 個相等的部份。

(b) 平分一個角的綫稱為 ______ 平分綫。

答案

1. (a) 兩 **(b)** 角

2. 作 90°、60°、45° 和 30° 的角

$\frac{1}{2}$、60°、90°、180°、平分

(a) 因為 $90° = \frac{1}{2} \times 180°$，所以 90° 角可由平分________角而得。

(b) 因為 $45° = \frac{1}{2} \times$ **(i)**________，所以 45° 角可由 **(ii)**________ 90° 角而得。

(c) 因為 30° = **(i)**________ × 60°，所以 30° 角可由平分 **(ii)**________角而得。

答案

2. (a) 180°
(b) (i) 90°
(ii) 平分
(c) (i) $\frac{1}{2}$
(ii) 60°

3. 作一條綫段的垂直平分綫

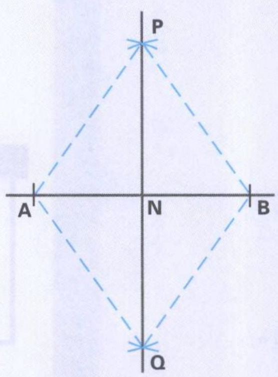
90°、BN、垂直

(a) 一條平分已知綫段並與它成 90° 角的直綫，稱為該綫段的________平分綫。

(b) 在圖中，PQ 是綫段 AB 的垂直平分綫，

因此 AN = **(i)**________

及 ∠PNA = ∠PNB = **(ii)**________。



答案

3. (a) 垂直
(b) (i) BN
(ii) 90°

補充練習 8

(習題8)

[對於以下的問題，如果沒有特別註明，只許使用圓規和直尺。]

作下列的角。[第 1–3 題]

1. **(a)** 300° **(b)** 330° **(c)** 315°

***2.** **(a)** 195° **(b)** 255° **(c)** 285°

***3.** **(a)** 67.5° **(b)** 52.5° **(c)** 157.5°

4. 作下列的角，然後把每一個角分為三個相等部份。

(a) 直角 **(b)** 平角

用題目所提供的條件作下列三角形。[第 5–7 題]

5. $\triangle DEF$，其中 $EF = 5$ cm，$FD = 3$ cm，$\angle EFD = 120^\circ$。

6. $\triangle PQR$，其中 $QR = 4$ cm，$\angle PQR = 30^\circ$，$\angle QRP = 135^\circ$。

7. $\triangle XYZ$，其中 $YZ = 6$ cm，$\angle YXZ = 60^\circ$，$\angle XYZ = 75^\circ$。

8. **(a)** 作 $\triangle ABC$，其中 $BC = 8$ cm，$\angle ABC = 30^\circ$，$\angle ACB = 30^\circ$。

(b) 作 $\angle BAC$ 的角平分綫，使它與 BC 相交於 D。

(c) **(i)** 量度 BD 及 DC 的長度。

(ii) 用量角器量度 $\angle ADB$ 及 $\angle ADC$。

(iii) 問 AD 是否 BC 的垂直平分綫？

9. **(a)** 作 $\triangle XYZ$，使 $XY = 6$ cm，$YZ = 7$ cm，$ZX = 6$ cm。

(b) 作 YZ 的垂直平分綫，使它與 YZ 相交於 M。

(c) 問 **(b)** 中的垂直平分綫是否過 X？

***10.** 畫一個半徑為 3 cm 的圓。在圓周上任意選取三點 P、Q、R。連接 PQ、QR 及 RP 以形成一個三角形。

(a) 作 $\angle QPR$ 的角平分綫和 QR 的垂直平分綫。

(b) 問 **(a)** 中的兩條平分綫相交的點是否在圓上？

思考題 8

[對於以下的作圖問題，如果沒有特別註明，只許使用圓規和直尺。]

1. 作一個等於 $\frac{5}{8}$ 個直角的角。

2. **(a)** 圖 (a) 所示為一個三角形 ABC 。

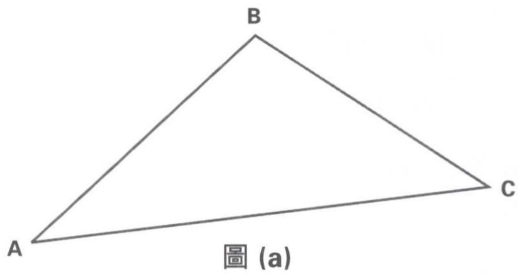


圖 (a)

(i) 作一個三角形 PQR，使 $PQ = \frac{1}{2}AB$，$QR = \frac{1}{2}BC$，

$RP = \frac{1}{2}CA$ 。

(ii) 問 $\angle A$ 是否等於 $\angle P$ ？

(b) 圖 (b) 所示為一個四邊形 DEFG。

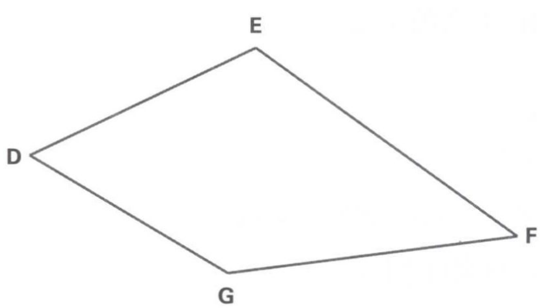


圖 (b)

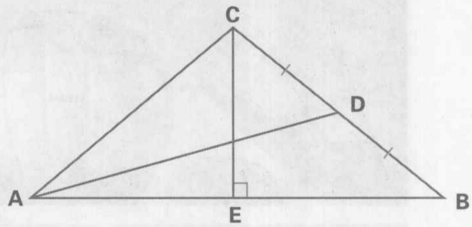
作一個四邊形 STUV，使

$ST = \frac{1}{2}DE$，　$TU = \frac{1}{2}EF$，　$UV = \frac{1}{2}FG$，

$VS = \frac{1}{2}GD$　及　$\angle S = \angle D$ 。

思考題 *8*（續）

3. 圖中所示為一個不按比例繪成的三角形 ABC，其中 CE 與 AB 垂直，而 D 是 BC 的中點。如果 BC = 5.5 cm， CE = 3.5 cm 及 AD = 6.5 cm，試作這個三角形 ABC。



4. **(a)** 畫一條長度為 9 cm 的綫段 AB。

(b) 在直綫 AB 上，作一點 N，使 AN = $2\frac{1}{4}$ cm 。(不要直接用尺畫出 $2\frac{1}{4}$ cm 這個長度。)

完

若我們設定海平面的位置為零，則一件物體在海平面以上的距離可以用正數來表示，而一件物體在海平面以下的距離可以用負數來表示。

第 9 章 有向數

第 9 章

9.1 有向數簡介

圖 1 所示為一個溫度計。我們可以看到溫度計上的刻度有零以上的數、零以下的數及零這個數。

圖 1

對於在零以上或以下的溫度，我們分別用「 + 」號或「 − 」號來表示。

在零以上 10°C 的溫度寫作 +10°C (+10 讀作正十)。

在零以下 5°C 的溫度寫作 −5°C (−5 讀作負五)。

+10 和 −5 這兩個數稱為有向數 (*directed number*)，或有符號數 (*signed number*)。

有符號數帶有正號或負號。
例如：+10, −5
正號　負號

+10 稱為正數 (*positive number*)。
−5 稱為負數 (*negative number*)。

另一些正數的例子是 $+2$, $+\frac{3}{5}$, $+0.3$ 等。

另一些負數的例子是 -3, $-\frac{1}{4}$, -1.5 等。

零既不是正數，也不是負數，因此它不是一個有符號數，寫作 0 便可。

◀ 零這個數是沒有正號或負號的。

注意： 寫正數時可以省去「 + 」號。
例如：6 表示 +6，$\frac{1}{2}$ 表示 $+\frac{1}{2}$。
但是，寫負數時必須要寫「 − 」號。

◀ 在本章之前，我們所見到的數全是正數，毋須寫上「 + 」號。

我們可用有向數來表示溫度是在零以上還是在零以下，也可以用有向數來表示盈利和虧蝕、向上和向下、上面和下面等相反的量。

我們可以用 +$50 來表示 $50 的盈利，用 −$30 來表示 $30 的虧蝕。

如果以 +3 來表示上升 3 層樓，那麼，下降 2 層樓便可用 −2 來表示。

如果以 +0.5 m 來表示水面以上 0.5 m，那麼，水面以下 1.5 m 便可用 −1.5 m 來表示。

注意： 自然數 1, 2, 3, …… 和對應的負數 −1，−2，−3，…… 加上零這個數一起組成**整數** (*integer*)。

課堂練習

1. 如果 +$20 表示 $20 的盈利，則 ________ 便表示 $70 的虧蝕。

2. 如果 +10 m 表示海面以上 10 m，則 ________ 便表示海面以下 20 m。

3. 如果 +$5 表示價格上升了 $5，則 −$2 便表示價格 ________ $2。

4. 如果 +7 表示向右步行 7 步，則 −3 便表示向 ________ 步行 3 步。

5. 如果 +45° 表示向反時針方向轉 45°，則 −30° 便表示向 ________ 轉 30°。

人物略記

李納都•費波那契 (*1170 – 1240*) 是一個意大利商人的兒子。他是一位聰明的數學家，發明了用負數去代表商業上的虧蝕。