

(国家自然科学基金和中英国际合作项目研究成果)

Constitutive Descriptions of Materials  
and Bifurcation Analysis

# 材料的本构描述 与分岔分析

张义同 编著

(国家自然科学基金和中英国际合作项目研究成果)

# 材料的本构描述与分岔分析

Constitutive Descriptions of Materials  
and Bifurcation Analysis

张义同 编著



## 内容提要

本书的主旨是:一、揭示材料的不同的本构模型是如何影响其屈曲分析结果的;二、从一个角度展示分岔分析方法的多样性。

本书的主要内容包括:基于超弹性、线弹性、弹塑性、粘弹性等不同的本构模型对薄壁管内压鼓胀(bulging)分析的不同结果;斜交异性材料的本构模型及对各向异性板的屈曲分析,特别是屈曲方向的确定;机织物细观本构模型及基于该模型和基于正交各向异性模型对机织物屈曲分析的不同结果;针织物的细观本构模型及基于该模型对针织物屈曲分析的结果;轴向可压缩杆屈曲分析的奇异性方法;应变软化材料分岔分析的多相平衡方法等。

为了阅读方便,书中简要介绍了增量变形稳定性分析的理论基础,包括变形分析、应力分析和增量变形理论等。特别是增量变形理论,它在本书的屈曲分析中扮演着重要角色,但在中文出版的连续介质力学书中较少见到。

本书可供从事固体力学、材料科学和纺织科学等研究领域的同行和研究生参考。

## 图书在版编目(CIP)数据

材料的本构描述与分岔分析/张义同编著. —天津:天津大学出版社,2013. 11

国家自然科学基金和中英国际合作项目研究成果

ISBN 978-7-5618-4869-2

I. ①材… II. ①张… III. ①材料科学—研究 IV. ①TB3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 283237 号

|       |                             |
|-------|-----------------------------|
| 出版发行  | 天津大学出版社                     |
| 出 版 人 | 杨欢                          |
| 地 址   | 天津市卫津路 92 号天津大学内(邮编:300072) |
| 电 话   | 发行部:022-27403647            |
| 网 址   | publish.tju.edu.cn          |
| 印 刷   | 天津泰宇印务有限公司                  |
| 经 销   | 全国各地新华书店                    |
| 开 本   | 185mm × 260mm               |
| 印 张   | 11.5                        |
| 字 数   | 287 千                       |
| 版 次   | 2013 年 12 月第 1 版            |
| 印 次   | 2013 年 12 月第 1 次            |
| 定 价   | 36.00 元                     |

凡购本书,如有缺页、倒页、脱页等质量问题,烦请向我社发行部门联系调换

版权所有 侵权必究

# 前 言

作者对本书的书名费了一点思考,是“材料的本构表述”好呢,还是“材料的本构描述”好呢?画家对一位模特的临摹,可能有点像、比较像、很像、像极了,甚至跃然纸上、要脱纸而出了。力学家们对材料的本构模型的建立,类似于画家对模特的临摹,可能有点像、比较像、很像或像极了。而“表述”一词似乎不足以表达这么多层的意思。

一种材料可以采用多种本构模型来描述,这是大家都已经习惯了的。把这些不同的本构模型用于材料一般的应力-变形计算,其结果通常相差也不大。但把不同的本构模型用于同一种材料的分岔分析,差异就可能很大——本书所要揭示的正是这样的现象。我们可以说,分岔分析是判断一个本构模型是否较好地描述了一种材料的一个判据:基于一个本构模型,若预测出了实验观测到的该材料的屈曲现象,那么这个本构模型就较好地描述了这种材料;反之,如果不能,这个本构模型就不太适合于这种材料的描述。本书从一个角度展示了如何对一种材料建立与其匹配的本构模型的力学思维和数学方法。

本书对不同的分岔问题采用了不同的方法,得到的分岔方程或分岔判据各不相同。所用方法涉及增量平衡理论、微分方程理论、奇异性理论和多相平衡理论等。人类可以无限地接近真理,但永远不能穷尽真理——分岔方法的多样性为这一哲学信条提供了证据。

本书内容包括了作者在天津大学 30 余年(1980—2011 年)的部分研究成果,算是对作者在本构模型和分岔分析领域探索的部分内容的汇集。作者从 1970 年 3 月参加工作到 2011 年 3 月退休,为祖国工作了 41 年,离母校清华大学老校长蒋南翔的“为祖国健康工作 50 年”的冀望还差 9 年。差的这 9 年怎么办呢?用“活到老,学到老,有一分光,发一分热”与同龄人共勉吧。

本书的工作得到过国家自然科学基金、中英国际合作项目、英国 EPSRC grant 和国家重点基础研究发展计划(973)等的资助。

张义同  
2013 年 4 月

## 目 录

## 第一部分 增量变形稳定性分析理论

|                                |      |
|--------------------------------|------|
| 第 1 章 变形分析 .....               | (2)  |
| 1.1 变形、运动和变形梯度 .....           | (2)  |
| 1.2 微体积和微面积的变化 .....           | (3)  |
| 1.3 微线段的变形——伸长和剪切 .....        | (4)  |
| 1.4 变形梯度张量的极分解与刚体转动 .....      | (5)  |
| 1.5 应变张量 .....                 | (8)  |
| 1.6 几种变形举例 .....               | (9)  |
| 1.7 运动分析 .....                 | (12) |
| 第 2 章 守恒原理和共轭应力 .....          | (15) |
| 2.1 质量守恒 .....                 | (15) |
| 2.2 动量和动量矩守恒 .....             | (16) |
| 2.3 Cauchy 公式和 Cauchy 应力 ..... | (17) |
| 2.4 控制方程 .....                 | (17) |
| 2.5 名义应力张量 .....               | (18) |
| 2.6 Lagrange 型控制方程 .....       | (19) |
| 2.7 共轭应力张量 .....               | (20) |
| 第 3 章 增量变形理论 .....             | (22) |
| 3.1 变形增量和应变增量 .....            | (22) |
| 3.2 应力增量和弹性模量 .....            | (23) |
| 3.3 瞬时模量 .....                 | (24) |
| 3.4 增量变形边界值问题 .....            | (26) |

## 第二部分 圆管、板和杆的分岔

|                        |      |
|------------------------|------|
| 第 4 章 薄壁内压管的鼓胀分岔 ..... | (30) |
| 4.1 薄壁内压管的鼓胀分岔实验 ..... | (30) |
| 4.2 薄壁管的轴对称变形 .....    | (31) |
| 4.3 控制方程和平凡解 .....     | (32) |
| 4.3.1 控制方程 .....       | (32) |
| 4.3.2 平凡解 .....        | (33) |
| 4.4 分岔条件 .....         | (33) |
| 4.5 分岔分析 .....         | (35) |
| 4.5.1 线弹性材料管 .....     | (35) |
| 4.5.2 弹塑性材料管 .....     | (36) |

|                                   |      |
|-----------------------------------|------|
| 4.5.3 粘弹性材料管 .....                | (36) |
| 第5章 斜交异性大变形本构方程 .....             | (39) |
| 5.1 几个基本定理 .....                  | (39) |
| 5.2 斜交异性大变形中的几个问题 .....           | (42) |
| 5.3 变形构型下斜交异性大变形本构方程 .....        | (44) |
| 5.4 Lagrange 描述下斜交异性大变形本构方程 ..... | (44) |
| 第6章 各向异性薄板的屈曲 .....               | (46) |
| 6.1 各向异性薄板受单向压缩时的屈曲 .....         | (46) |
| 6.1.1 受单向压缩时的变形 .....             | (46) |
| 6.1.2 控制方程 .....                  | (47) |
| 6.1.3 屈曲分析 .....                  | (49) |
| 6.2 正交异性薄板受沿非材料主轴方向压缩时的屈曲 .....   | (50) |
| 6.3 各向异性薄板受简单剪切时的离面屈曲 .....       | (51) |
| 6.3.1 受简单剪切时的变形 .....             | (52) |
| 6.3.2 控制方程 .....                  | (53) |
| 6.3.3 屈曲分析 .....                  | (54) |
| 6.4 正交异性薄板受沿任意方向简单剪切时的离面屈曲 .....  | (54) |
| 第7章 可压缩压杆分岔的奇异性理论分析与实验 .....      | (57) |
| 7.1 屈曲杆的平衡方程 .....                | (57) |
| 7.2 分岔方程 .....                    | (59) |
| 7.3 Liapunov-Schmidt 约化 .....     | (60) |
| 7.4 识别问题 .....                    | (60) |
| 7.5 结论 .....                      | (62) |
| 7.6 轴向可压缩压杆的压缩失稳实验 .....          | (63) |
| 7.6.1 试件与实验装置 .....               | (63) |
| 7.6.2 实验和实验结果分析 .....             | (64) |
| 7.6.3 结论 .....                    | (66) |

### 第三部分 应变软化材料的分岔

|                              |      |
|------------------------------|------|
| 第8章 多相平衡理论和 Maxwell 关系 ..... | (70) |
| 8.1 多相平衡理论 .....             | (70) |
| 8.2 Maxwell 关系 .....         | (71) |
| 第9章 应变软化岩石的分岔 .....          | (73) |
| 9.1 平面应变加载状态下的岩石试件 .....     | (73) |
| 9.2 低应变相中的应力和应变 .....        | (75) |
| 9.3 折曲带中的应力和应变 .....         | (76) |
| 9.4 控制方程 .....               | (77) |
| 9.5 算例 .....                 | (78) |

## 第四部分 织物的本构模型与分岔分析

|                                              |       |
|----------------------------------------------|-------|
| 第 10 章 机织物的细观本构模型 .....                      | (82)  |
| 10.1 机织物的细观编织结构 .....                        | (82)  |
| 10.2 机织物细观编织结构的力学模型 .....                    | (84)  |
| 10.3 机织物细观编织结构的力学分析 .....                    | (85)  |
| 10.3.1 一般应力状态 .....                          | (85)  |
| 10.3.2 纯剪切中胞的应力分析 .....                      | (85)  |
| 10.3.3 纯剪切中胞的应变分析 .....                      | (87)  |
| 10.4 机织物的细观本构方程 .....                        | (87)  |
| 10.5 变形构型下机织物的细观线性本构方程 .....                 | (89)  |
| 10.5.1 机织物在变形构型下的斜交异性 .....                  | (90)  |
| 10.5.2 变形构型下的机织物斜交异性细观本构方程 .....             | (91)  |
| 10.5.3 Lagrange 描述下机织物的细观本构方程 .....          | (94)  |
| 10.6 机织物的膜理论 .....                           | (95)  |
| 10.6.1 材料主轴与坐标系 .....                        | (96)  |
| 10.6.2 变形描述 .....                            | (97)  |
| 10.6.3 平衡方程 .....                            | (99)  |
| 10.6.4 不考虑机织物厚度变化时的控制方程 .....                | (101) |
| 10.6.5 简单算例 .....                            | (101) |
| 10.7 平纹机织物的细观增量本构模型 .....                    | (103) |
| 10.7.1 坐标系和构型 .....                          | (103) |
| 10.7.2 增量应变张量和增量应力张量 .....                   | (104) |
| 10.7.3 平纹机织物的细观增量本构模型 .....                  | (105) |
| 10.7.4 总变形的描述 .....                          | (107) |
| 10.7.5 示例 .....                              | (107) |
| 10.7.5.1 精确解 .....                           | (108) |
| 10.7.5.2 用增量模型求解 .....                       | (109) |
| 10.7.5.3 数值结果 .....                          | (110) |
| 第 11 章 机织物的屈曲分析 .....                        | (112) |
| 11.1 机织物屈曲的特点 .....                          | (112) |
| 11.2 机织物受与经向/纬向成 $45^\circ$ 方向单向拉伸时的屈曲 ..... | (112) |
| 11.2.1 坐标系和符号 .....                          | (113) |
| 11.2.2 织物的本构表述 .....                         | (113) |
| 11.2.3 平衡方程和边界条件 .....                       | (115) |
| 11.2.4 基于机织物传统的正交异性本构模型的屈曲分析 .....           | (116) |
| 11.2.5 基于机织物的细观本构模型的屈曲分析 .....               | (118) |
| 11.3 机织物受沿经向/纬向单向拉伸时的屈曲 .....                | (121) |
| 11.4 机织物受沿任意方向单向拉伸时的屈曲 .....                 | (121) |
| 11.4.1 均匀变形场 .....                           | (122) |
| 11.4.2 控制方程 .....                            | (123) |
| 11.4.3 屈曲分析 .....                            | (124) |

|                                      |       |
|--------------------------------------|-------|
| 11.4.4 特例与一般解曲线 .....                | (126) |
| 11.5 织物受沿任意方向简单剪切时的屈曲 .....          | (128) |
| 11.5.1 简单剪切变形 .....                  | (129) |
| 11.5.2 屈曲分析 .....                    | (130) |
| 第12章 针织物的细观本构模型 .....                | (133) |
| 12.1 针织物的细观针织结构 .....                | (133) |
| 12.2 细观针织结构变形分析 .....                | (135) |
| 12.3 针织物的拉伸实验 .....                  | (135) |
| 12.4 针织物本构模型的雏形 .....                | (137) |
| 12.5 受 $w$ 方向拉伸时针织物胞的变形分析 .....      | (138) |
| 12.5.1 胞的壳的平衡 .....                  | (138) |
| 12.5.2 胞的变形 .....                    | (139) |
| 12.5.3 额外的压应力场 .....                 | (141) |
| 12.6 针织物的细观本构方程 .....                | (142) |
| 第13章 针织物的屈曲分析 .....                  | (143) |
| 13.1 沿 $w$ 方向拉伸下针织物的屈曲 .....         | (143) |
| 13.1.1 沿 $w$ 方向拉伸下针织物的均匀变形 .....     | (143) |
| 13.1.2 屈曲方程 .....                    | (144) |
| 13.1.3 分岔分析 .....                    | (145) |
| 13.1.4 示例 .....                      | (146) |
| 13.2 沿任意方向拉伸下针织物的屈曲 .....            | (148) |
| 13.2.1 均匀变形 .....                    | (149) |
| 13.2.2 屈曲方程 .....                    | (151) |
| 13.2.3 屈曲分析 .....                    | (152) |
| 13.2.4 示例 .....                      | (154) |
| 13.3 简单剪切下针织物的屈曲 .....               | (156) |
| 13.3.1 针织物片的简单剪切 .....               | (156) |
| 13.3.2 简单剪切下的均匀变形 .....              | (156) |
| 13.3.3 屈曲方程 .....                    | (158) |
| 13.3.4 屈曲分析 .....                    | (159) |
| 13.3.5 示例 .....                      | (161) |
| 13.4 针织物沿织层方向拉伸时的不屈曲性 .....          | (163) |
| 13.4.1 受织层方向拉伸时的均匀应力场 .....          | (164) |
| 13.4.2 屈曲方程 .....                    | (164) |
| 13.4.3 屈曲分析 .....                    | (165) |
| 13.4.4 方程(13.4.24)关于 $hk$ 只有零解 ..... | (166) |
| 13.4.5 方程(13.4.25)关于 $hk$ 只有零解 ..... | (167) |
| 参考文献 .....                           | (169) |

# 第一部分

## 增量变形稳定性分析理论

本部分介绍的稳定性分析理论是指临界构型为大变形的情形,它是分析物体在大变形后可能出现的屈曲模态和屈曲条件(被称为屈曲的线性分析)以及初始屈曲的幅值和缺陷敏感性等(被称为屈曲的非线性分析)的理论基础。

本理论的基本点是在大变形上累加小变形(增量变形),分析增量变形的多解条件、解的模态以及初始后屈曲行为等。

本部分先简要介绍变形分析、守恒原理和共轭应力,再介绍增量变形理论。这里介绍的概念和理论要在本书中用到。

# 第 1 章 变形分析

## 1.1 变形、运动和变形梯度

在变形体力学中研究的是物体的变形和运动。物体是由无穷多个物质质点组成的。为了描述变形前物体中各个质点的空间位置,需建立一个固定的坐标系,称为拉格朗日(Lagrange)坐标系。物体中的一个典型质点的坐标用  $\mathbf{X}$  表示,此时物体占据空间  $B_0$ ,称  $B_0$  为物体的参考构型或初始构型。

物体变形后占据空间  $B$ ,称  $B$  为物体的变形构型。建立另外一个坐标系,来描述变形后物体中各个质点的空间位置。在参考构型下坐标为  $\mathbf{X}$  的质点在变形构型下的坐标记为  $\mathbf{x}$ 。这个坐标系称为欧拉(Euler)坐标系。显然  $\mathbf{x}$  和  $\mathbf{X}$  一定是一一对应的,记

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}) \quad (1.1.1)$$

写成分量的形式为

$$x_i = x_i(X_A) \quad i, A = 1, 2, 3 \quad (1.1.2)$$

本书用英文小写字母作角标,表示在变形构型下的坐标分量;用英文大写字母或希腊字母作角标,表示在参考构型下的坐标分量。参考构型下的坐标系(Lagrange 坐标系)和变形构型下的坐标系(Euler 坐标系)可以是两个完全不同的曲线坐标系。当然,它们也可以是同一个直角坐标系,这时 Lagrange 坐标系的基矢用  $(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3)$  表示, Euler 坐标系的基矢用  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  表示。

考虑质点  $\mathbf{X}$  处邻域内的有向微线段  $d\mathbf{X}$ ,在变形后变为  $d\mathbf{x}$ ,由(1.1.2)式微分,有

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial X_A} dX_A \quad i, A = 1, 2, 3 \quad (1.1.3)$$

定义

$$\mathbf{F} = \text{grad } \mathbf{x}(\mathbf{X}) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} \quad (1.1.4)$$

$\mathbf{F}$  被称为变形梯度张量。其中 grad 是 Lagrange 空间下的梯度算子,其求导表示对 Lagrange 坐标求导。此外,还用 div 和 curl 表示 Lagrange 空间下的散度算子和旋度算子,用 Grad、Div 和 Curl 分别表示 Euler 空间下的相应算子。

采用  $\mathbf{F}$ , (1.1.3) 式可以写成以下形式

$$dx_i = F_{iA} dX_A \quad i, A = 1, 2, 3 \quad (1.1.5)$$

或

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} d\mathbf{X} \quad (1.1.6)$$

其中,  $F_{iA} = \partial x_i / \partial X_A$  ( $i, A = 1, 2, 3$ ) 是  $\mathbf{F}$  的分量。在直角坐标系下,  $\mathbf{F}$  可写为  $\mathbf{F} = F_{iA} \mathbf{e}_i \mathbf{E}_A$ ,  $\mathbf{F}$  是一个两点张量。

(1.1.5) 式或(1.1.6) 式表示了变形体中  $\mathbf{X}$  点处有向微线段的变形规律,其中  $\mathbf{F}$  起着

决定性的作用,它决定着有向微线段  $d\mathbf{x}$  在变形中的长度和方向的改变。

变形梯度张量  $\mathbf{F}$  也常写成矩阵的形式

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{bmatrix} \quad (1.1.7)$$

从物理意义上讲,对所有的  $d\mathbf{X} \neq \mathbf{0}$ , 必须有  $\mathbf{F}d\mathbf{X} \neq \mathbf{0}$ , 否则物体中的微线段变形后便销声匿迹了。这在现实的物理世界中是不允许的,所以应对  $\mathbf{F}$  施加以下限制

$$\det \mathbf{F} \neq 0 \quad (1.1.8)$$

$\det \mathbf{F}$  表示  $\mathbf{F}$  的矩阵所对应的行列式的值,这也就是说,  $\mathbf{F}$  是非奇异的。引入记号  $J \equiv \det \mathbf{F}$ , 必有

$$J \equiv \det \mathbf{F} \neq 0 \quad (1.1.9)$$

$\mathbf{F}$  非奇异,则  $\mathbf{F}^{-1}$  必存在,记

$$\mathbf{B} = (\mathbf{F}^{-1})^T \quad (1.1.10)$$

且(1.1.6)式也有逆,可写为

$$d\mathbf{X} = \mathbf{B}^T d\mathbf{x} \quad (1.1.11)$$

显然有

$$\mathbf{F}\mathbf{B}^T = \mathbf{B}^T\mathbf{F} = \mathbf{I} \quad (1.1.12)$$

式中,  $\mathbf{I}$  是单位张量。

这样,  $\mathbf{F}$  是一个可逆张量,  $J \equiv \det \mathbf{F} \neq 0$ , 以后还会进一步证明  $J \equiv \det \mathbf{F} > 0$ ,  $\mathbf{F}$  一般是不对称的。

由于  $(\mathbf{F}^T\mathbf{F})^T = \mathbf{F}^T(\mathbf{F}^T)^T = \mathbf{F}^T\mathbf{F}$ , 所以  $\mathbf{F}^T\mathbf{F}$  对称。类似地,  $\mathbf{F}\mathbf{F}^T$ 、 $\mathbf{B}^T\mathbf{B}$  和  $\mathbf{B}\mathbf{B}^T$  也对称。由于  $\mathbf{F}$  非奇异, 还有

$$d\mathbf{X} \cdot (\mathbf{F}^T\mathbf{F})d\mathbf{X} = (\mathbf{F}d\mathbf{X}) \cdot (\mathbf{F}d\mathbf{X}) = |\mathbf{F}d\mathbf{X}|^2 > 0$$

对任何  $d\mathbf{X} \neq \mathbf{0}$  都成立。所以,  $\mathbf{F}^T\mathbf{F}$  还是正定的, 类似地,  $\mathbf{F}\mathbf{F}^T$ 、 $\mathbf{B}^T\mathbf{B}$  和  $\mathbf{B}\mathbf{B}^T$  也是正定的。

张量  $\mathbf{F}^T\mathbf{F}$  和  $\mathbf{F}\mathbf{F}^T$  分别称为右 Cauchy-Green 变形张量和左 Cauchy-Green 变形张量。

## 1.2 微体积和微面积的变化

本节研究当物体变形时,其微体积和微面积的变化。先考虑微体积的变化。

考虑点  $\mathbf{X}$  处三条不共面的微线段矢量  $d\mathbf{X}^{(1)}$ 、 $d\mathbf{X}^{(2)}$  和  $d\mathbf{X}^{(3)}$ , 以这三条微线段为棱构成一个微平行六面体, 该平行六面体的体积  $dV$  等于这三条微线段矢量的混合积, 记

$$dV = \det(d\mathbf{X}^{(1)}, d\mathbf{X}^{(2)}, d\mathbf{X}^{(3)}) \quad (1.2.1)$$

变形后, 该微平行六面体变成以  $d\mathbf{x}^{(1)}$ 、 $d\mathbf{x}^{(2)}$  和  $d\mathbf{x}^{(3)}$  三条微线段矢量为棱的一个微平行六面体, 其体积记为  $dv$ , 即

$$dv = \det(d\mathbf{x}^{(1)}, d\mathbf{x}^{(2)}, d\mathbf{x}^{(3)}) \quad (1.2.2)$$

由(1.1.6)式有

$$dv = (\det \mathbf{F}) \det(d\mathbf{X}^{(1)}, d\mathbf{X}^{(2)}, d\mathbf{X}^{(3)}) = JdV \quad (1.2.3)$$

变形梯度张量矩阵的行列式的值表示了微单元体变形后的体积和变形前的体积之比。显然, 对一个真实的物理变形, 应有以下限制

$$J \equiv \det \mathbf{F} > 0 \quad (1.2.4)$$

(1.2.3)式是变形体体积变化的局部关系式,它的总体形式是

$$\int_B dv = \int_{B_0} dV \quad (1.2.5)$$

下面考虑微面积的变化。

引入微面积矢量的概念。设  $dA$  是点  $\mathbf{X}$  邻域的一块微面积的大小,记该块微面积的单位外法线矢量为  $\mathbf{N}$ ,定义微面积矢量

$$d\mathbf{A} \equiv \mathbf{N}dA \quad (1.2.6)$$

类似地,可以定义变形构型下的微面积矢量

$$d\mathbf{a} \equiv \mathbf{n}da \quad (1.2.7)$$

设  $d\mathbf{X}$  是点  $\mathbf{X}$  邻域的一条过  $d\mathbf{A}$  边界的微线段,以  $d\mathbf{A}$  为底面、 $d\mathbf{X}$  为母线的微圆柱体的体积为

$$dV = d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{A}$$

这里,“ $\cdot$ ”表示矢量的点积。变形后,该微圆柱体的体积为

$$dv = d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{a}$$

由(1.2.3)式有

$$d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{a} = Jd\mathbf{X} \cdot d\mathbf{A}$$

利用(1.1.6)式,并从等式两端消去任意的  $d\mathbf{X}$ ,遂得

$$\mathbf{F}^T d\mathbf{a} = Jd\mathbf{A}$$

即

$$d\mathbf{a} = J\mathbf{B}d\mathbf{A} \quad \text{或} \quad nda = J\mathbf{B}\mathbf{N}dA \quad (1.2.8)$$

(1.2.8)式称为 Nanson 公式,它表示了在变形梯度张量  $\mathbf{F}$  作用下 ( $\mathbf{B} = (\mathbf{F}^{-1})^T$ ) 微面积的变形。

### 1.3 微线段的变形——伸长和剪切

由(1.1.6)式知,在  $\mathbf{F}$  作用下,变形前的有向微线段  $d\mathbf{X}$  在变形后变成了有向微线段  $d\mathbf{x}$ ,  $d\mathbf{X}$  的长度和方向都可能发生变化。下面详细地分析这些变化。

记  $\mathbf{M}$  和  $\mathbf{m}$  分别是沿  $d\mathbf{X}$  和  $d\mathbf{x}$  方向的单位矢量,由(1.1.6)式知

$$\mathbf{m}|d\mathbf{x}| = \mathbf{F}\mathbf{M}|d\mathbf{X}|$$

遂有

$$|d\mathbf{x}|^2 = \mathbf{M} \cdot (\mathbf{F}^T \mathbf{F} \mathbf{M}) |d\mathbf{X}|^2$$

可写出

$$\frac{|d\mathbf{x}|}{|d\mathbf{X}|} = \{\mathbf{M} \cdot (\mathbf{F}^T \mathbf{F} \mathbf{M})\}^{1/2} \equiv \lambda(\mathbf{M}) \quad (1.3.1)$$

$\lambda(\mathbf{M})$  称为在  $\mathbf{X}$  点处沿  $\mathbf{M}$  方向的伸长,它是参考构型下  $\mathbf{X}$  点处沿  $\mathbf{M}$  方向的微线段变形后的长度与原来长度的比。由于  $\mathbf{F}^T \mathbf{F}$  正定,必有

$$0 < \lambda(\mathbf{M}) < \infty \quad (1.3.2)$$

对于所有的非零矢量  $\mathbf{M}$  成立。 $\lambda(\mathbf{M}) - 1$  称为伸长率,且有

$$\lambda(\mathbf{M}) - 1 = \frac{|\mathrm{d}\mathbf{x}| - |\mathrm{d}\mathbf{X}|}{|\mathrm{d}\mathbf{X}|} = \{\mathbf{M} \cdot (\mathbf{F}^T \mathbf{F} \mathbf{M})\}^{1/2} - 1 \quad (1.3.3)$$

它表示了单位微线段长度的伸长,这便是最初始的关于线应变的概念。显然,当且仅当 $\mathbf{F}^T \mathbf{F} = \mathbf{I}$ 时,伸长率(线应变)才为零。由此可以设想,用含有 $(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I})$ 因子的量来定义大变形下的线应变,是一种合理的选择。

设 $\mathrm{d}\mathbf{X}$ 和 $\mathrm{d}\mathbf{X}'$ 分别是参考构型下 $\mathbf{X}$ 点处两条有向微线段,在变形构型下它们分别为

$$\mathrm{d}\mathbf{x} = \mathbf{F} \mathrm{d}\mathbf{X}, \quad \mathrm{d}\mathbf{x}' = \mathbf{F} \mathrm{d}\mathbf{X}' \quad (1.3.4)$$

设 $\mathbf{M}$ 和 $\mathbf{M}'$ 分别是沿 $\mathrm{d}\mathbf{X}$ 和 $\mathrm{d}\mathbf{X}'$ 方向的单位矢量, $\mathbf{m}$ 和 $\mathbf{m}'$ 分别是沿 $\mathrm{d}\mathbf{x}$ 和 $\mathrm{d}\mathbf{x}'$ 方向的单位矢量, $\Theta$ 表示 $\mathbf{M}$ 和 $\mathbf{M}'$ 之间的夹角, $\theta$ 表示 $\mathbf{m}$ 和 $\mathbf{m}'$ 之间的夹角,则有

$$\cos \Theta = \mathbf{M} \cdot \mathbf{M}', \quad \cos \theta = \mathbf{m} \cdot \mathbf{m}' = \mathbf{M} \cdot (\mathbf{F}^T \mathbf{F} \mathbf{M}') / [\lambda(\mathbf{M}) \lambda(\mathbf{M}')] \quad (1.3.5)$$

$(\Theta - \theta)$ 称为由 $\mathbf{M}$ 和 $\mathbf{M}'$ 所定义的剪切平面上的 $\mathbf{M}$ 和 $\mathbf{M}'$ 方向的剪切角,它表示了两条有向微线段之间的夹角在变形中的改变,这便是最初始的剪切应变的概念。当 $\mathbf{F}^T \mathbf{F} = \mathbf{I}$ 时,由(1.3.1)式, $\lambda(\mathbf{M}) = \lambda(\mathbf{M}') = 1$ ,于是 $\cos \theta = \mathbf{M} \cdot \mathbf{M}' = \cos \Theta$ ,剪切应变为零。由此同样可以设想到,用含有 $(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I})$ 因子的量来定义大变形下的剪切应变,也是一种合理的选择。

更重要的是,还看到当 $\mathbf{F}^T \mathbf{F} = \mathbf{I}$ 时,由于 $\mathrm{d}\mathbf{X}$ 的任意性,在点 $\mathbf{X}$ 的邻域内的任意方向的有向微线段的长度都不改变;由于 $\mathbf{M}$ 和 $\mathbf{M}'$ 的任意性,在点 $\mathbf{X}$ 的邻域内的任意两条有向微线段之间的夹角在变形中也不改变——这就是说,此时点 $\mathbf{X}$ 的邻域像一块刚体,它没有任何变形,除了它可能发生整体转动(刚体转动)外。

这使得我们可以做以下两件事。

(1) 定义点 $\mathbf{X}$ 邻域发生刚体转动的充要条件为

$$\mathbf{F}^T \mathbf{F} = \mathbf{I} \quad (1.3.6)$$

(2) 用含有 $(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I})$ 因子的量来定义大变形下的应变。

一个点处的应变可以用含有 $(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I})$ 因子的量来描述,那么刚体转动呢? 刚体转动的“转动”又该如何描述呢? 这便是下一节的内容。

## 1.4 变形梯度张量的极分解与刚体转动

$$\mathrm{d}\mathbf{x} = \mathbf{F} \mathrm{d}\mathbf{X}$$

是描述变形的最基本的方程, $\mathbf{F}$ 包含了点 $\mathbf{X}$ 邻域变形的全部信息。非零的 $(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I})$ 描述点 $\mathbf{X}$ 邻域的应变,描述点 $\mathbf{X}$ 邻域刚体转动的信息也一定包含在 $\mathbf{F}$ 之中。

下面介绍 $\mathbf{F}$ 的极分解定理。定理叙述如下:对任意一个非奇异的二阶张量 $\mathbf{F}$ ,存在唯一的正定对称二阶张量 $\mathbf{U}$ 和 $\mathbf{V}$ 以及二阶正交张量 $\mathbf{R}$ ,使得

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \mathbf{U} = \mathbf{V} \mathbf{R} \quad (1.4.1)$$

定理的证明,见黄克智(1989)或Ogden R W(1997)。

由张量理论(或线性代数中的矩阵理论)知,一个正定对称二阶张量 $\mathbf{U}$ 一定存在一组标准正交基 $\mathbf{r}^{(i)} (i=1,2,3)$ 作为其特征矢量和相应的一组正的特征值 $\lambda_i (i=1,2,3)$ ,使得

$$\mathbf{U} \mathbf{r}^{(i)} = \lambda_i \mathbf{r}^{(i)} \quad (1.4.2)$$

将 $\mathrm{d}\mathbf{X}$ 和 $\mathrm{d}\mathbf{x}$ 都沿 $\mathbf{r}^{(i)}$ 方向分解,得

$$d\mathbf{X} = \sum_{k=1}^3 X_k \mathbf{r}^{(k)}, \quad d\mathbf{x} = \sum_{k=1}^3 x_k \mathbf{r}^{(k)} \quad (1.4.3)$$

先考察  $\mathbf{U}$  对  $d\mathbf{X}$  的作用。为此, 设  $\mathbf{R} = \mathbf{I}$ , 则

$$\mathbf{U}d\mathbf{X} = \sum_{k=1}^3 X_k \mathbf{U} \mathbf{r}^{(k)} = \sum_{k=1}^3 X_k \lambda_k \mathbf{r}^{(k)} = \sum_{k=1}^3 x_k \mathbf{r}^{(k)} = d\mathbf{x} \quad (1.4.4)$$

于是有

$$x_k = \lambda_k X_k \quad (k \text{ 不求和}) \quad (1.4.5)$$

即  $\mathbf{U}$  对  $d\mathbf{X}$  的作用是使  $d\mathbf{X}$  沿  $\mathbf{U}$  的三个主方向  $\mathbf{r}^{(i)}$  分别伸长了  $\lambda_i - 1$ 。

注意: 由 (1.4.4) 式只有在  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$  时, 才有

$$d\mathbf{x} = \sum_{k=1}^3 X_k \lambda_k \mathbf{r}^{(k)} = \lambda \sum_{k=1}^3 X_k \mathbf{r}^{(k)} = \lambda d\mathbf{X} \quad (1.4.6)$$

即  $d\mathbf{X}$  的方向不改变, 而只有纯粹的长度改变, 此时若点  $\mathbf{X}$  处的微单元体变形前是球体, 变形后还是球体, 只是体积发生了改变。若  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$  不成立,  $d\mathbf{X}$  的方向和长度都会发生改变, 微单元体会发生畸变, 即存在剪切变形。

再看  $\mathbf{R}$  的作用。由张量理论知,  $\mathbf{R}$  是正交张量的充要条件为

$$\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I} \quad (1.4.7)$$

由于  $\det \mathbf{R} > 0$ ,  $\mathbf{R}$  还是一个正规正交张量, 所以

$$\det \mathbf{R} = 1 \quad (1.4.8)$$

设  $\mathbf{r}^{(i)} (i=1, 2, 3)$  是一组标准正交基,  $\mathbf{R}$  一定可以表示成如下形式

$$\mathbf{R} = \mathbf{r}^{(1)} \mathbf{r}^{(1)} + (\mathbf{r}^{(2)} \mathbf{r}^{(2)} + \mathbf{r}^{(3)} \mathbf{r}^{(3)}) \cos \theta - (\mathbf{r}^{(2)} \mathbf{r}^{(3)} - \mathbf{r}^{(3)} \mathbf{r}^{(2)}) \sin \theta \quad (1.4.9)$$

其中,  $-\pi \leq \theta \leq \pi$ 。

将  $d\mathbf{X}$  沿  $\mathbf{r}^{(i)}$  分解, 记

$$d\mathbf{X} = \sum_{k=1}^3 X_k \mathbf{r}^{(k)} \quad (1.4.10)$$

考虑  $\mathbf{R}$  对  $d\mathbf{X}$  的作用, 即

$$\begin{aligned} \mathbf{R}d\mathbf{X} &= \{ \mathbf{r}^{(1)} \mathbf{r}^{(1)} + (\mathbf{r}^{(2)} \mathbf{r}^{(2)} + \mathbf{r}^{(3)} \mathbf{r}^{(3)}) \cos \theta - (\mathbf{r}^{(2)} \mathbf{r}^{(3)} - \mathbf{r}^{(3)} \mathbf{r}^{(2)}) \sin \theta \} d\mathbf{X} \\ &= X_1 \mathbf{r}^{(1)} + (X_2 \cos \theta - X_3 \sin \theta) \mathbf{r}^{(2)} + (X_2 \sin \theta + X_3 \cos \theta) \mathbf{r}^{(3)} \end{aligned} \quad (1.4.11)$$

表明  $\mathbf{R}$  对  $d\mathbf{X}$  的作用的结果是:

(1)  $d\mathbf{X}$  以  $\mathbf{r}^{(1)}$  为旋转轴, 旋转了  $\theta$  角, 如图 1.1 所示;

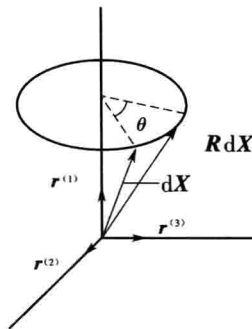


图 1.1  $\mathbf{R}$  对  $d\mathbf{X}$  的作用

(2)  $RdX$  在  $r^{(1)}$  轴上的分量仍然是  $X_1$ ,  $dX$  的端点到  $r^{(1)}$  轴的距离仍然是  $\sqrt{X_2^2 + X_3^2}$ ,  $RdX$  的长度仍然是  $\sqrt{X_1^2 + X_2^2 + X_3^2}$ ,  $dX$  的长度没有改变;

(3) 旋转角  $\theta$  ( $dX$  矢端在与  $r^{(1)}$  轴垂直的平面内的旋转角) 与  $dX$  无关, 完全由  $R$  确定, 由于  $dX$  的任意性, 即  $R$  使  $X$  点处的微单元体绕其  $r^{(1)}$  轴刚性旋转了  $\theta$  角。

因此,  $R$  描述了点  $X$  邻域内刚体的转动。

需要注意, 前面已指出,  $U$  也引起  $dX$  方向改变, 那也是一种旋转, 但旋转轴和旋转角度因不同的  $dX$  而不同, 它导致微单元体的畸变。由于图 1.2 中的二维微单元体圆的两个方向伸长的不同 (某个  $U$  的作用), 各半径微矢量旋转的角度不同, 圆畸变成了椭圆。

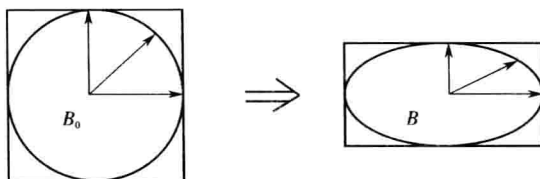


图 1.2 圆畸变成椭圆

(1.4.1) 式的第一个等式称为  $F$  的右极分解, 它使微单元体先沿  $U$  的主方向伸长, 再在  $R$  的作用下刚性旋转; (1.4.1) 式的第二个等式称为  $F$  的左极分解, 它使微单元体先在  $R$  的作用下刚性旋转, 再沿  $V$  的主方向伸长。这两种分解对微单元体作用的最终结果当然是一样的, 下面将会看到,  $V$  的主方向和主伸长就是  $U$  的主方向和主伸长作了一个  $R$  旋转。

由  $F$  的极分解式有

$$F^T F = U^2, \quad F F^T = V^2 \quad (1.4.12)$$

所以,  $F^T F$  和  $F F^T$  都是对称正定的, 且不包含旋转  $R$ 。  $U^2$  和  $V^2$  分别是右 Cauchy-Green 变形张量和左 Cauchy-Green 变形张量的另一种形式,  $U$  和  $V$  分别称为右伸缩张量和左伸缩张量。

将 (1.4.12) 式代入 (1.3.1) 式, 得  $M$  方向的伸长

$$\lambda(M) = \{M \cdot (U^2 M)\}^{1/2} = |UM| \quad (1.4.13)$$

记  $\lambda_i$  为  $U$  的相对于其主方向 (特征矢量方向)  $r^{(i)}$  的主值 (相应特征值), 在 (1.4.13) 式中以  $r^{(i)}$  代替  $M$ , 根据主值的定义 (1.4.2) 式, 有

$$\lambda(r^{(i)}) = \{r^{(i)} \cdot (U^2 r^{(i)})\}^{1/2} = |U r^{(i)}| = \lambda_i \quad (1.4.14)$$

即

$$\lambda_i = \lambda(r^{(i)})$$

称  $\lambda_i (i=1, 2, 3)$  为  $U$  的主伸长。

利用极分解式 (1.4.1) 以及 (1.4.2) 式, 可得

$$V(Rr^{(i)}) = Fr^{(i)} = RUr^{(i)} = \lambda_i(Rr^{(i)}) \quad (1.4.15)$$

即  $\lambda_i$  是  $V$  的沿其主方向  $Rr^{(i)}$  的主伸长。

称  $U$  的主方向  $r^{(i)}$  为 Lagrange 主轴,  $V$  的主方向  $Rr^{(i)}$  为 Euler 主轴。

当且仅当  $U = V = I$  时,  $F = R$  表示刚性转动; 另一方面, 当  $R = I$  时,  $F = V = U$  表示纯应变。

容易证明,  $\mathbf{F}^T \mathbf{F}$ 、 $\mathbf{B}^T \mathbf{B}$  和  $\mathbf{U}$  有相同的主方向, 且  $\mathbf{F}^T \mathbf{F}$  有主值  $\lambda_i^2 (i=1, 2, 3)$ ,  $\mathbf{B}^T \mathbf{B}$  有主值  $\lambda_i^{-2} (i=1, 2, 3)$ ;  $\mathbf{F} \mathbf{F}^T$ 、 $\mathbf{B} \mathbf{B}^T$  和  $\mathbf{V}$  有相同的主方向, 且  $\mathbf{F} \mathbf{F}^T$  有主值  $\lambda_i^2 (i=1, 2, 3)$ ,  $\mathbf{B} \mathbf{B}^T$  有主值  $\lambda_i^{-2} (i=1, 2, 3)$ 。

## 1.5 应变张量

根据 1.3 节的讨论, 用含有  $(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I})$  因子的量来定义大变形下的应变是一种可以考虑的选择。

由 (1.1.6) 式, 有

$$|\mathrm{d}\mathbf{x}|^2 - |\mathrm{d}\mathbf{X}|^2 = \mathrm{d}\mathbf{X} \cdot (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) \mathrm{d}\mathbf{X} \quad (1.5.1)$$

定义张量

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) \quad (1.5.2)$$

$\mathbf{E}$  称为 Green (或 Lagrange) 应变张量, 它是 Lagrange 坐标 (或 Lagrange 空间、Lagrange 描述) 下的张量, 即  $\mathbf{E}$  是参考构型下的场函数, 它的自变量是  $\mathbf{X}$ , 它的基矢量是 Lagrange 坐标的基矢量。 $\mathbf{E}$  的分量形式为

$$E_{AB} = \frac{1}{2} (F_{iA} F_{iB} - \delta_{AB}) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial x_i}{\partial X_A} \frac{\partial x_i}{\partial X_B} - \delta_{AB} \right) \quad (1.5.3)$$

由 (1.3.1) 式可以看出, 当且仅当  $\mathbf{E} = \mathbf{0}$  时,  $\mathbf{F} = \mathbf{I}$ ,  $\lambda(\mathbf{M}) = 1$ 。

类似地, 有

$$|\mathrm{d}\mathbf{x}|^2 - |\mathrm{d}\mathbf{X}|^2 = \mathrm{d}\mathbf{X} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{B} \mathbf{B}^T) \mathrm{d}\mathbf{x} \quad (1.5.4)$$

引入张量

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2} (\mathbf{I} - \mathbf{B} \mathbf{B}^T) \quad (1.5.5)$$

称为 Almansi (或 Euler) 应变张量, 它是 Euler 坐标 (或 Euler 空间、Euler 描述) 下的张量。其分量形式为

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left( \delta_{ij} - \frac{\partial X_A}{\partial x_i} \frac{\partial X_A}{\partial x_j} \right) \quad (1.5.6)$$

对一个变形前位于  $\mathbf{X}$  处、变形后位于  $\mathbf{x}$  处的质点, 定义其位移

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}) = \mathbf{x}(\mathbf{X}) - \mathbf{X} \quad (1.5.7)$$

Green 应变的分量形式可以写为

$$E_{AB} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_A}{\partial X_B} + \frac{\partial u_B}{\partial X_A} + \frac{\partial u_C}{\partial X_A} \frac{\partial u_C}{\partial X_B} \right) \quad (1.5.8)$$

对于小变形, 略去高阶项, 便得到常见的无限小应变表达式。

根据变形梯度张量的极分解, (1.5.2) 式和 (1.5.5) 式定义的 Green 应变和 Euler 应变可以写为

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{U}^2 - \mathbf{I}), \quad \mathbf{e} = \frac{1}{2} (\mathbf{I} - \mathbf{V}^{-2}) \quad (1.5.9)$$

实际上, 还可以定义更一般的应变张量

$$\mathbf{E}^{(m)} = \begin{cases} \frac{1}{m}(\mathbf{U}^m - \mathbf{I}) & (m \neq 0) \\ \ln \mathbf{U} & (m = 0) \end{cases} \quad (1.5.10)$$

$$\mathbf{e}^{(m)} = \begin{cases} \frac{1}{m}(\mathbf{V}^m - \mathbf{I}) & (m \neq 0) \\ \ln \mathbf{V} & (m = 0) \end{cases} \quad (1.5.11)$$

其中,  $m$  为整数(正的或负的)。当  $\mathbf{U} = \mathbf{I}$  或  $\mathbf{V} = \mathbf{I}$  时, 它们都与零应变状态相对应, 都只含有  $\mathbf{U}$  或  $\mathbf{V}$  而不含  $\mathbf{R}$ , 都能描述  $\mathbf{X}$  处的应变状态。Green 应变张量即  $\mathbf{E}^{(2)}$ 。

## 1.6 几种变形举例

一般地讲, 物体中各点  $\mathbf{X}$  处的  $\mathbf{F}$  一般是不相同的, 即变形梯度张量  $\mathbf{F}$  依赖于  $\mathbf{X}$ , 这样的变形称为不均匀变形。如果  $\mathbf{F}$  不依赖所研究的物体中的点  $\mathbf{X}$ , 即变形时物体中各点  $\mathbf{X}$  处的  $\mathbf{F}$  是完全相同的, 这样的变形称为均匀变形。物体的均匀变形可表示为

$$\mathbf{x} = \mathbf{F}\mathbf{X} + \mathbf{c} \quad (1.6.1)$$

式中, 变形梯度张量  $\mathbf{F}$  和矢量  $\mathbf{c}$  都独立于  $\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{c}$  表示物体的刚体位移。下面, 举几个特殊的均匀变形的例子, 它们在许多屈曲分析中会遇到。

### 1. 伴有横向收缩的均匀伸长

一个圆柱体沿着其轴线方向均匀伸长, 它的轴对称在变形后依然保持。由于轴对称, 其 Lagrange 主轴和 Euler 主轴重合, 一条主轴沿着轴线方向, 其他任意两条互相垂直且与轴线也垂直的矢量构成另外两条主轴。

设  $L$  和  $l$  分别是圆柱体在参考构型和变形构型下的长度, 则沿着轴线方向的主轴的主伸长为  $\lambda_1 = l/L$ , 设另外两条主轴的主伸长为  $\lambda_2 = \lambda_3$ 。

取参考构型、变形构型的坐标轴和主轴重合, (1.6.1) 式便有以下的分量形式

$$x_1 = \lambda_1 X_1, \quad x_2 = \lambda_2 X_2, \quad x_3 = \lambda_3 X_3 \quad (1.6.2)$$

为了方便, 已取  $\mathbf{c} = \mathbf{0}$ 。  $\mathbf{F}$  的矩阵形式为

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \quad (1.6.3)$$

其中,  $\lambda_2 = \lambda_3$ 。

若初始构型和变形构型都分别采用柱坐标  $(R, \Theta, Z)$  和  $(r, \theta, z)$ , 则 (1.6.1) 式便有以下的分量形式

$$r = \lambda_2 R, \quad \theta = \Theta, \quad z = \lambda_1 Z \quad (1.6.4)$$

如果变形是体积不变的,  $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1$ , (1.6.3) 式成为

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1^{-1/2} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1^{-1/2} \end{bmatrix} \quad (1.6.5)$$

### 2. 平面变形

取参考构型的基矢量  $(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3)$  和变形构型的基矢量  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  重合, 假设变形被限