"十二五"国家重点图书出版规划项目

23

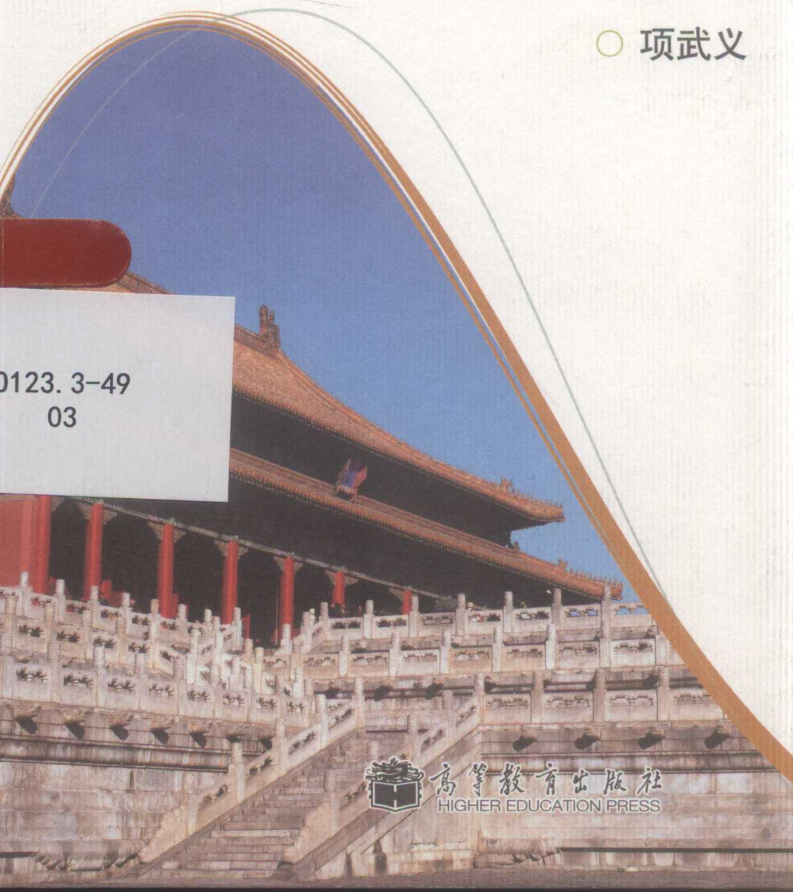
数学文化小丛书

李大潜 主编

圆锥截线的故事

——数学与文明的一个重大篇章

项武义



O123.3-49
03

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

014035062

“十二五”国家重点图

数学文化小

李大潜

0123.3-49
03

圆锥截线的故事

Yuanzhui Jiexian de Gushi

——数学与文明的一个重大篇章

项武义

北京航空航天大学
藏书
图书馆

0123.3-49
03

北航 C1715060

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

图书在版编目（CIP）数据

圆锥截线的故事 ：数学与文明的一个重大篇章 / 项武义编 . -- 北京 : 高等教育出版社，2014. 3
（数学文化小丛书 / 李大潜主编 . 第 3 辑）
ISBN 978-7-04-038609-7

Ⅰ . ①圆… Ⅱ . ①项… Ⅲ . ①圆锥曲线－普及读物 Ⅳ . ① O123.3-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2013）第 242143 号

策划编辑	李 蕊	责任编辑	田 玲	封面设计	张 楠
版式设计	王艳红	插图绘制	尹文军	责任校对	刘娟娟
责任印制	朱学忠				

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社 址	北京市西城区德外大街 4 号	网 址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印 刷	北京信彩瑞禾印刷厂	网上订购	http://www.landraco.com
开 本	787mm × 1092mm 1/32		http://www.landraco.com.cn
印 张	1.5	版 次	2014 年 3 月第 1 版
字 数	23 千字	印 次	2014 年 3 月第 1 次印刷
购书热线	010-58581118	定 价	5.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换
版权所有 侵权必究
物 料 号 38609-00

数学文化小丛书编委会

顾　问：项武义（美国加州大学伯克利分校）
姜伯驹（北京大学）
齐民友（武汉大学）
王梓坤（北京师范大学）
主　编：李大潜（复旦大学）
副主编：王培甫（河北师范大学）
周明儒（江苏师范大学）
李文林（中国科学院数学与系统科学研究院）
编辑工作室成员：赵秀恒（河北经贸大学）
王彦英（河北师范大学）
张惠英（石家庄市教育科学研究所）
杨桂华（河北经贸大学）
周春莲（复旦大学）

本书责任编委：潘养廉

数学文化小丛书总序

整个数学的发展史是和人类物质文明和精神文明的发展史交融在一起的。数学不仅是一种精确的语言和工具、一门博大精深并应用广泛的科学，而且更是一种先进的文化。它在人类文明的进程中一直起着积极的推动作用，是人类文明的一个重要支柱。

要学好数学，不等于拼命做习题、背公式，而是要着重领会数学的思想方法和精神实质，了解数学在人类文明发展中所起的关键作用，自觉地接受数学文化的熏陶。只有这样，才能从根本上体现素质教育的要求，并为全民族思想文化素质的提高夯实基础。

鉴于目前充分认识到这一点的人还不多，更远未引起各方面足够的重视，很有必要在较大的范围内大力进行宣传、引导工作。本丛书正是在这样的背景下，本着弘扬和普及数学文化的宗旨而编辑出版的。

为了使包括中学生在内的广大读者都能有所收益，本丛书将着力精选那些对人类文明的发展起过重要作用、在深化人类对世界的认识或推动人类对世界的改造方面有某种里程碑意义的主题，由学有

此为试读，需要完整PDF请访问：www.erton

专长的学者执笔，抓住主要的线索和本质的内容，由浅入深并简明生动地向读者介绍数学文化的丰富内涵、数学文化史诗中一些重要的篇章以及古今中外一些著名数学家的优秀品质及历史功绩等内容。每个专题篇幅不长，并相对独立，以易于阅读、便于携带且尽可能降低书价为原则，有的专题单独成册，有些专题则联合成册。

希望广大读者能通过阅读这套丛书，走近数学、品味数学和理解数学，充分感受数学文化的魅力和作用，进一步打开视野、启迪心智，在今后的学习与工作中取得更出色的成绩。

李大潜

2005 年 12 月

目 录

一、圆锥截线 (conic sections)[1] 的源起——希腊几何学的最爱与巅峰

话说当年, 古希腊文明在继承古埃及与巴比伦文明的基础上蓬勃进展, 更上层楼, 使得理性认知大自然的 “理性文明” (civilization of rational mind) 获得长足进步, 成就辉煌; 而几何学与天文学则是其中至为重要的核心与主导. 实乃现代科学的启蒙与奠基者, 至今依然是蕴育理性文明的泉源.

在希腊几何的基础理论中, 三角形与圆的研究居于核心地位. 前者是几何事物的至精至简, 而后者则是平面形之中的至善至美. 希腊几何学所达到的最高点则在于球面 (spheres) 和圆锥截线的研究和认知. 例如 Archimedes (阿基米德) 的球面面积公式和 Apollonius (阿波罗尼奥斯) 所著的八册圆锥截线论可以说是两个巅峰, 长话短说, 且让我们谈谈圆

[1] 此处圆锥截线即圆锥曲线或二次曲线.

锥截线认知的源起:

圆柱截线, 引人入胜

大体上来说, 一段树干或一节竹子, 可以看做圆柱体、圆柱面的自然实例. 在我们锯树或竹子的实践中, 自然会认识到所产生的截面或截线的形状和锯得正还是锯歪了是颇有区别的, 亦即正则圆、歪则椭 (参见图 1 所示). 对于一般人, 此事常见, 不足为奇而未加深究. 但是古希腊某些几何学家却锲而不舍地探讨这种因歪而椭的圆柱截线究竟有何几何特性, 从而发现下述引人入胜的突破. 这也就是他们研究圆锥截线之几何的启蒙之突破点, 即

圆柱截线之几何特性

如图 1 所示, Σ_1 和 Σ_2 分别是和柱面 Z 相切于 Γ_1 和 Γ_2, 而且和截面 Π 分别相切于 F_1 和 F_2 点的球面. 则截线 $\Gamma = Z \bigcap \Pi$ 上任给一点 P, 皆有

$$\overline{F_1P} + \overline{F_2P} = \text{常数}\ (\Gamma_1 \text{ 和 } \Gamma_2 \text{ 的垂直距离}).$$

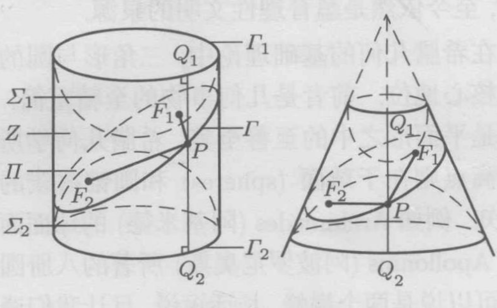


图 1

证明 如图 1 所示, 过 $\Gamma = Z \bigcap \Pi$ 任取点 P, 作垂直于 Γ_1, Γ_2 于 Q_1, Q_2 的直线段. 由圆柱面的旋转对称性易见 $\overline{Q_1Q_2}$ 的长度恒为常数. 再者, 由球外一点到球面的切线长皆相同, 即得

$$\overline{F_1P} + \overline{F_2P} = \overline{Q_1P} + \overline{Q_2P} = \overline{Q_1Q_2} \text{ (常数)}. \qquad \square$$

由上述简洁的论证, 发现**椭圆** (ellipse) 的几何特性就是它有两个焦点 F_1, F_2 使得其上任给一点分别到 F_1, F_2 的距离之和是一个常数, 而圆则是 F_1 和 F_2 相重合的特殊情形. 此事对于当年的几何学爱好者确实令人惊喜, 引人入胜.

由圆柱截线推广到圆锥截线

话说当年, 有位同好进一步认识到树干其实是底粗顶细, 所以更加切实的几何描述理当是圆锥而并非是圆柱. 总之, 他们又进而把上述论证法推广到圆锥面的截线, 而且又认识到圆锥截线还有另外两种, 如图 2 所示的抛物线 (parabola) 和双曲线 (hyperbola), 顺理成章不难用内切球的类似证法, 分别得出抛物线与双曲线的几何特性.

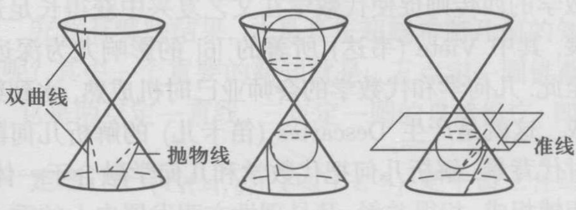


图 2

二、解析几何的牛刀小试与温故知新

在文明发展史上，一方面几何学由于缺乏新兴的思想和研究方法而停顿不前，日趋衰微；而另一方面，西罗马帝国的灭亡使得欧洲陷于一段漫长的黑暗时代. 西方的理性文明一直到 16 世纪文艺复兴才重现生机，其中东罗马帝国的灭亡迫使许多希腊学者流亡到意大利，中国的活字版印刷术的西传使得 Euclid (欧几里得) 的 *Elements* 和 Diophantus (丢番图) 的 *Arithmetica* 等等得以出版；而且阿拉伯的代数学的西传则促使代数学在文艺复兴中获得长足进展，其中 Viète (韦达) 所著的 [6] 的影响尤为深远. 至此，几何学和代数学的会师业已时机成熟，水到渠成. 这就是产生 Descartes (笛卡儿) 的解析几何的时代背景. 解析几何把代数学和几何学融合于一体，相辅相成，相得益彰，乃是理性文明发展史上的重大进展；而这种新兴的思想和方法的好的开始和牛刀小试也就是把它用来研讨圆锥截线，温故而知新，不

此为试读，需要完整PDF请访问：www.erton

亦乐乎?

温故而知新, 是孔夫子在求知上深刻的体会, 在此且以当年解析几何的发展初期研讨圆锥截线这一段“史实”为例作一剖析:

其实, “温故”之是否能“知新”还是要看如何去温故. 说白了, 假如依然用原有的旧观点、老思想去温故, 则所能达到的充其量是知故知得更加熟悉罢了! 反之, 若能用新观点、新思想去温故, 则自然而然会知新. 长话短说, 当年的解析几何这种新兴的思想和方法, 重访圆锥截线论所作的温故知新可以概括如下:

首先, 改用坐标化把希腊几何在圆锥截线上的知识下一番温故的功夫. 大致上, 这也就是目前在解析几何教学中所讨论者. 例如, 椭圆、抛物线、双曲线的方程标准式, 极点与极线, 以及用平移、转轴之不变量证明任何二次曲线皆为圆锥截线等等. 但是总而言之, 这还只是把当年希腊几何中对于圆锥截线的诸多知识, 改用解析法重述. 改证而已, 可以说仅仅是一种旧酒装新瓶.

究竟有哪些结果, 才是真正超越希腊几何的知新呢? 其中一个重要的新知就是: 五点定一圆锥截线, 它是两点定一直线, 三点定一圆的自然推广, 即

定理 设 $\{P_i(x_i, y_i), 1 \leqslant i \leqslant 5\}$ 是平面上任给相异五点, 则有唯一的圆锥截线过上述五点.

证明 我们只要直截了当地用待定系数法去求

解一个二元二次多项式

$$\Gamma(x,y)=Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F$$

满足

$$\Gamma(x_i,y_i)=0,\quad 1\leqslant i\leqslant 5,$$

即可证明其存在性, 而其唯一性则在于满足上述条件的待定系数 $\{A,B,C,D,E,F\}$ 彼此只差一个常数倍. □

注 上述论证, 所用到的乃是代数学中多元一次联立方程组的基础理论. 设 $P(x,y)$ 是所求者的任给一点, 则有

$$\Gamma(x,y)=0\quad \text{和}\quad \Gamma(x_i,y_i)=0,\quad 1\leqslant i\leqslant 5,\tag{1}$$

它们组成六个待定系数 $\{A,B,C,D,E,F\}$ 的齐次线性方程组 (1), 它具有不全为零之解的充要条件就是下述六阶行列式要等于零, 即

$$\begin{vmatrix} x^2 & xy & y^2 & x & y & 1\\ x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ x_5^2 & x_5y_5 & y_5^2 & x_5 & y_5 & 1\end{vmatrix}=0,\tag{2}$$

其实 (2) 式也就是所求者的方程式.

另外一个重要的新知是椭圆、双曲线和抛物线的自然参数表达式, 即

椭圆: $x=a\cos\theta, y=b\sin\theta, 0\leqslant\theta<2\pi$

双曲线: $x = a\sec\theta, y = b\tan\theta, 0 \leqslant \theta < 2\pi$

抛物线: $x = t, y = \dfrac{1}{2p}t^2, -\infty < t < +\infty$

它们是进而研讨上述三种圆锥截线各种各样几何不变量 (如曲率等等) 的有力工具 (参看四、五).

三、射影几何的启蒙者

设 π_1, π_2 是两个相异的平面, $O \notin \pi_1 \bigcup \pi_2$. 易见以 O 为 "光源" 即有把 π_1 上的点投影到 π_2 的投影映射:

$$\pi_1 \overset{O}{\barwedge} \pi_2 : \pi_1 \ni P_1 \to P_2 \in \pi_2, \{O, P_1, P_2\} \text{ 共线}.$$

其定义如图 3 所示:

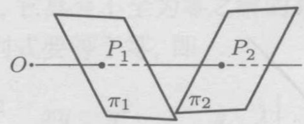


图 3

不难看到, 在投影变换之下, 大小和形状都**不再**保持不变, 例如我们习用熟知的几何量如长度、角度等等都**不再**是投影不变量. 究竟还有哪些更为根本的几何量是在投影变换之下, 依然保持不变的呢? 这也就是在 19 世纪蓬勃发展的射影几何学所研讨者. 而圆锥截线的投影不变量的研究, 又自然而然地扮

演了启蒙课题. 在此我们将仅仅举几个有意思的例子作一简介.

例 Pascal (帕斯卡) 定理

平面上任给相异五点定一圆锥截线 (第二节定理). 由此可见六点 $\{P$ 和 $P_i, 1 \leqslant i \leqslant 5\}$ 共在一个圆锥截线之上是需要满足某些条件的. 在上述定理的论证中, 业已指出, 它们的坐标满足 (2) 式就是**六点共在一个圆锥截线之上的充要条件**. 但是从几何学的观点来看, 这种充要条件尚有美中不足之憾. 我们还得要去探索一种纯几何的充要条件, 此事乃是 Pascal 少年时代所达成者. 即

Pascal 定理 *六点 $\{A, B, C$ 和 $A', B', C'\}$ 共在一个圆锥截线 Γ 上的充要条件乃是如图 4 所示之*

$$P = AB' \cap A'B, \ Q = AC' \cap A'C \text{ 和 } R = BC' \cap B'C$$

三点共线.

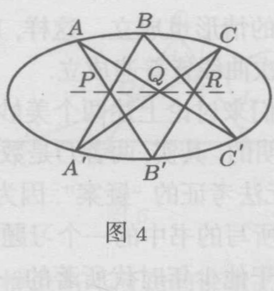


图 4

注 (i) 在二元二次多项式可以分解为两个一次因式时, 其所定义的二次曲线乃是**两条直线**. 它可以

看成圆锥截线的退化 (degenerate) 情形, 亦即截面 Π 过圆锥面之顶点的情形.

(ii) 在这种退化的情形下, 在希腊几何学中业已有下述美妙的定理, 即

Pappus (帕普斯) 定理 设 $\{A, B, C\}$ 和 $\{A', B', C'\}$ 是分别位于直线 l, l' 上的三点组. 则下述三个交点共线:

$$P = AB' \cap A'B, \quad Q = AC' \cap A'C, \quad R = BC' \cap B'C,$$

即如图 5 所示:

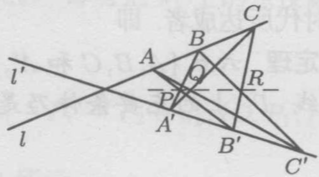


图 5

所以当年 Pascal 所证者, 乃是把 Pappus 定理推广到非退化的情形也成立. 这样, 就得知上述性质对于**所有**二次曲线皆普遍成立.

现在让我们来讨论上述两个美妙的定理, **当年**究竟是如何证明的. 其实, 两者乃是数学史上令人深思, 但是业已无法考证的 "疑案". 因为 Pappus 定理的出处在于他所写的书中的一个习题! 而 Pascal 定理的出处则在于他少年时代所著的一本小册子. 当年印份很少. 很不幸的是, 到了 Leibniz (莱布尼茨) 晚年业已一本都找不到了. 而 Leibniz 老先生只是

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertong