物理类专业系列教材

理论力学

武青 编著

清华大学出版社

物理类专业系列教材

理论力学

武青　编著

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

本书是作者根据在青岛大学多年从事普通物理和理论力学教学的实践经验,在自编并使用多年的《理论力学》讲义基础上为物理类专业编写的,是继将力学和理论力学课程打通后的教学适用书。

本教材共分9章,包括牛顿力学的方程列解、有心力场、刚体、多自由度系统的微振动、分析力学的静力学、拉格朗日力学、哈密顿正则方程、哈密顿变分原理和狭义相对论。

本教材可作为综合性大学、师范院校、理工科大学物理系一年级下学期的理论力学课教材,也可以供其他专业的师生作教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

理论力学 / 武青编著. --北京:清华大学出版社,2014

物理类专业系列教材

ISBN 978-7-302-35346-1

Ⅰ. ①理… Ⅱ. ①武… Ⅲ. ①理论力学—高等学校—教材 Ⅳ. ①O31

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 020921 号

责任编辑:邹开颜 赵从棉
封面设计:傅瑞学
责任校对:赵丽敏
责任印制:宋 林

出版发行:清华大学出版社
网 址:http://www.tup.com.cn, http://www.wqbook.com
地 址:北京清华大学学研大厦A座 **邮 编**:100084
社 总 机:010-62770175 **邮 购**:010-62786544
投稿与读者服务:010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质量反馈:010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者:北京国马印刷厂
经 销:全国新华书店
开 本:185mm×260mm **印 张**:15.25 **字 数**:370千字
版 次:2014年3月第1版 **印 次**:2014年3月第1次印刷
印 数:1~2500
定 价:32.00元

产品编号:038897-01

前 言

“理论力学”是物理学院学生的一门基础理论课，也是学生第一次综合利用高等数学方法处理物理问题的一门理论物理课。

“理论力学”这门课顾名思义是讲力学的理论的。而“力学”大家不陌生，中学讲过，大学有“力学”课，因此这将是学生第三次接触力学课程，它和前两轮关于力学的学习有什么不同？是否会重复呢？

经典力学有两种不同的理论：牛顿力学和分析力学。而分析力学又可细分为拉格朗日理论和哈密顿理论，前两轮的力学学习主要是基于牛顿力学内容。“理论力学”主要是介绍分析力学内容的，同时它还要继续讲授属于牛顿力学范围的前两轮力学学习未尽部分，所以，这第三轮力学学习在内容上与前两轮截然不同。此外，“理论力学”是大学本科物理类专业教学计划中的中级课程的第一课，它是数学物理方法、热力学与统计物理、电动力学和量子力学的基础课程，这组课程的重点在于培养学生的理性思维能力，所以从内容到性质“理论力学”都是一门全新课程。

编者多年来讲授“理论力学”课程，所选教材是全国统编教材，内容很全面，是很好的教材。但是随着教学改革，尤其是很多大学包括编者所在的大学都已经将“力学”、“理论力学”统一成“经典力学”上、下期的形式进行，这样原来所选择的统编教材在知识内容的相互衔接上就感到不足。同时，由于大学教育方向已经由“精英教育”转到了“大众教育”，如何适应当前国内教学改革的需要，用较少的时间讲授理论力学的基本内容，既节省授课时间，又不降低课程的要求是编者一直在教学中追求的目标。而拥有一本符合教学要求，起点低，内容通俗，逐步提高的教材一直是课程的需要和渴望，在等待了多年后，编者决定将自己多年来的授课讲义加以整理成就此教材。

这本教材还是像大多数理论力学教材那样先牛顿力学再分析力学这样一种顺序，这样先具体后抽象，先易后难，学生易于接受。同时在学习分析力学时也是本着先静力学，再运动学最后动力学的顺序进行，不改变学生熟悉的模式以便于学生与牛顿力学的内容和方法进行对比。

但是，本教材的牛顿力学部分就不再讲授质点的运动，而是重点讲授质点系的一般运动和刚体的定点转动。这样，可以将大部分时间用于分析力学的学习。因为分析力学是以普遍的力学变分原理为基础建立系统的运动微分方程，所以它具有高度的统一性和普遍性，这就不仅便于解决受约束的非自由质点系问题，而且便于扩展到其他学科领域中去，例如回转仪理论、连续介质理论、非线性力学、自动控制、近代物理等都广泛地应用分析力学的基本理论和研究方法。特别地，对于在后续课程里将要用到的知识，如经典散射、微振动、电磁场的拉格朗日方程等都有详细讲述，更便于学生今后的利用。显然，为了给后续课程和诸多专业打下良好的基础需加强对分析力学的讲授。

特别指出的是，由于本门课程改为大一下学期，受到数学基础的限制，我们只能讲授一些简化了的、容易求解的典型例子，同时也将诸如简谐振动基本知识作了简单介绍，便于与后续知识点衔接。然而实际问题大多是“复杂”的，通常难以用一般的解析数学求解，甚至根本不可能用解析数学求得解答。随着科学技术的发展，今后学生面对的实际问题中出现的现象，远远地不是那些简化例子所能反映和包容的。应用电子计算机进行“数值计算”或“数值模拟”的方法则是当前求解这些“复杂问题”最重要的手段。

为了学生知识系统的连贯，本教材还增加了狭义相对论部分的介绍。

本教材共分9章，第1章介绍牛顿力学的方程列解；第2章介绍有心力场；第3章介绍刚体；第4章介绍多自由度系统的微振动；第5章介绍分析力学的静力学；第6章介绍拉格朗日力学；第7章介绍哈密顿正则方程；第8章介绍哈密顿变分原理；第9章介绍狭义相对论。全教材采用国际单位制。

编者认真参考了近年来出版的优秀相关教材，本着既简明扼要又能满足后期课程所需要的基础知识的原则，在自编并使用多年的“理论力学”讲义基础上结合多年的教学实践，为物理类专业编写了此部教材。

编者对关心和支持本教材编写出版的清华大学出版社邹开颜、赵从棉编辑以及有关同行表示衷心感谢，正是由于她们的支持才使本教材完稿并得以出版。编者深感要编写一部易教易学，又有创新的基础课教材是一件相当艰巨的工作，由于编者水平所限，教材中定会有不少错误或不妥之处，恳请广大同行和读者批评指正。

武　青

2014年1月

目 录

引　言

0.1　理论力学研究的对象和内容

力学是研究物质的最基本的运动——机械运动的规律的一门学科，它可以分成**实验力学**和**理论力学**两大类。

理论力学是指在某些公理的基础上用严格的数学推导得出的知识，具有演绎的性质。它处理问题的步骤可分成**力学建模**、**数学建模**、**方程求解**和**分析结论**四个步骤。其中力学建模需要既掌握严格的理论基础知识又具有丰富的实际工作经验的人员才能正确完成，所以对于我们大学的学生来说显然是难以做到的；而数学建模就是根据建好的物理模型采用适当的物理定义、公式建立起方程的过程，这正是我们所重点关注的；建立完成的方程如何得以顺利地求解，也是检验我们掌握的数学工具的灵活程度；如何将得到的方程解进行分析，使枯燥的数学符号变成有物理意义的表达式是最后的步骤——分析结论部分。

根据所采用的公理不同，理论力学又可以分成**矢量力学**和**分析力学**两类。矢量力学又常被称为牛顿力学，是以牛顿在1687年发表的《自然哲学的数学原理》(以下简称为《原理》)为理论基础的，而《原理》的中心思想是牛顿三定律。这三个著名的定律，奠定了力学的理论基础。分析力学起源于1788年拉格朗日写的一本同名书《分析力学》，在这本著作里拉格朗日先生没有借助于以往常用的几何方法，而是完全用数学分析的方法来解决所有的力学问题。分析力学使力学规律具有更严密的数学基础，而且力学问题可以完全用严格的解析数学方法来处理。分析力学对物理学的发展起着重要的推动作用，在理论物理中占有重要的地位。由于分析力学理论形式简洁且富有公理特性，很容易将它推广应用到其他学科中去。

哈密顿先生分别于1834年和1843年推出了哈密顿正则方程和哈密顿变分原理。它们与拉格朗日力学理论共同构成了分析力学的主体。对分析力学理论作出贡献的还有泊松、达朗贝尔、欧拉、高斯和雅可比等人。

0.2　为什么要学习理论力学

“理论力学”是大学本科物理类专业教学计划中的中级课程的第一课，这组课程的重点在于培养学生的理性思维能力。“理论力学”是数学物理方法、热力学与统计物理、电动力学和量子力学等课程的基础课程，可给后续课程和诸多专业打下良好的基础。

矢量力学研究问题的思路是通过研究物理现象→分析归纳→经验规律的得到来进行的，强调感性→理性的认识过程。

分析力学是通过经验规律→创建理性物理世界→逻辑演绎推理→培养学生理性思维能力，可以帮助人们提高抽象、逻辑、创新思维能力。

所谓抽象思维能力是指一种在复杂事物面前去伪存真、抓住本质进行合理简化的能力；

所谓逻辑思维能力是指一种由已知到未知的演绎、推理和判断的能力；所谓创新思维能力是指一种创造新思想、新方法、新产品的能力。

实践证明，在学习理论力学的过程中，通过启发式教育，能激发探索性思维；通过命题变换，能训练发散性思维；通过新颖灵活的思考题，能激发灵感与直觉思维；通过自我构思命题，能培养想象性思维；通过解决实际问题，能培养综合分析能力。

0.3　如何学好理论力学课程

我们开设的理论力学这门课将重点放在了分析力学部分，而牛顿力学中的大部分内容如牛顿力学的基本概念、牛顿三定律、各种常见力、质点的直线和圆周运动、刚体的定轴转动以及质点的动能定理、质点系的功能原理、(角)动量定理、三大守恒定理等已经在“力学”课中学过，我们不再重复，只是将力学课中关于矢量力学未尽部分加以阐述，如质点系一般运动方程的建立和求解、刚体定点转动和多自由度小振动问题等。

课程要求能准确理解基本概念、熟悉基本定理和公式，并能灵活运用掌握一些研究力学问题的基本方法，最后，学会灵活利用两种理论体系解决问题。

理论力学作为理论物理学的第一门课程，它的任务不仅是介绍物体的机械运动规律，还要引导读者如何应用数学去描写和分析物理问题。作为科学，就必须使用数学这种最严谨的方式去表达和描述。理论力学最常用的数学工具是坐标系、矢量代数、微积分和常微分方程，通过本课程的学习，读者可以熟练地应用这些数学工具去描述和求解物体的机械运动。

第 1 章　牛顿力学的方程列解

本章简要介绍了牛顿力学中数学建模的几种具体情况,以牛顿运动定律为基础讨论质点动力学问题,建立其运动方程并简单求解,从而得出解决问题的一般性方法和结论。并简要介绍了几种易解方程的形式。

人们对机械运动的理论探讨,首先是从对质点运动的研究开始。

1.1　矢量力学的理论基础

每一门学科都有自己的理论和实验基础,从而使之得以形成和发展。而每个人都有的诸多亲身实践经验组成了矢量力学的实验基础,矢量力学的理论体系是在伽利略-牛顿时代形成的。

1687 年牛顿(I. Newton,1643—1727)发表的《原理》为矢量力学奠定了坚实的理论基础。牛顿在综合了伽利略等前人工作的基础上,在《原理》中首次对什么是物质、什么是时间、什么是运动做了明确规定,使得物质、时空、运动从一般哲学概念发展为可用数学作定量表述的定义、定律、定理,并迅速地得到了公众的确认,从而奠定了矢量力学的理论基础。

牛顿彻底摒弃了亚里士多德的物质观,复活和发展了原子论的思想。在原子论的基础上,牛顿建立了物质在力学理论中的质点模型,进而又建立了质点系、刚体、流体等力学模型,结合他对质量、动量和力等概念的定义,在这样的物质观的基础上建立起了矢量力学。

牛顿还在其《原理》中对时间、空间的概念作了阐述,构成了矢量力学的时空观。牛顿的时间可表述为:时间是一维的、均匀的、无限的,与空间和物质都没有关系,即**绝对时间**;牛顿的空间可表述为:空间是绝对的,任意一个质点都可以用三个坐标值表示出来,而这个坐标系的原点是静止在绝对空间里的,坐标轴的方向一经选定就不再改变,这样的坐标系就可以代表**绝对空间**,而在这种空间里的物质运动就是**绝对运动**了。牛顿还定义了**惯性参考系**:一切相对于绝对空间作匀速直线运动的参考系就是惯性参考系。

关于运动,著名的牛顿三定律和力学相对性原理构成了力学的最高原理。随着万有引力定律的问世,将天体运动和地面运动统一为服从相同运动规律的物质运动,彻底推翻了亚里士多德的天地有别的神话。在这一发展过程中,牛顿总结了伽利略、胡克等人的成果,将许多互不相关的力学现象归纳为一个统一的理论框架,将力学原理与数学结合起来,使力学成为可以做严格逻辑运算的科学理论。

在矢量力学的描述里,因为质量与时空及其运动无关,牛顿第二定律的数学表达式可表示为

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} \tag{1.1}$$

其中**瞬时加速度**定义为

$$a=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} \tag{1.2}$$

显然，在狭义相对论中上式不再成立，而应以 $\boldsymbol{F}=\dfrac{\mathrm{d}(m\boldsymbol{v})}{\mathrm{d}t}$ 代替，具体的将在第 9 章中表述。

牛顿三定律是在牛顿的绝对时空观中成立的，而根据伽利略的**力学相对性原理**：在一个系统内部的任何力学试验，都不能决定这一系统是静止还是在作匀速直线运动。这样，牛顿三定律就对所有的惯性参考系成立。但是，牛顿的绝对时空是没有的，而严格的惯性参考系也是不存在的，所以，在实践中总是选择适当的物体作为参考系取代惯性系，常常会选择在充分大的尺寸下平均处于静止的天体为惯性系，而在地球上的实验者眼中，地球足够大且相对静止，所以地球可看成很好的惯性系。

综上所述，牛顿的《原理》中将其物质观、时空观、运动观作了充分的阐述，同时，在《原理》里，牛顿还总结了他多年的科学经验，对自然科学的认识论、方法论作了精辟的论述，提出了四条关于哲学的推理规则，由于语言翻译问题，原文在此不作描述，但是可以将它们理解为：**简单性原理、因果性原理、统一性原理和真理性原理**四条。

所谓简单性原理是说科学上凡是正确的东西都是最简单的；因果性原理就是决定论，直到 20 世纪初量子力学建立之前，因果律都是物理学最牢固的信条之一；统一性原理是指《原理》中所述的物质、时空和运动观对整个自然界都是普遍适应的，这是自然哲学的根本所在，否则就不成其为“哲学”了；而真理性原理是说承认客观真理存在的同时又指出以后可能会出现新的现象使结论更准确，即要有相对的态度看问题。这是牛顿本人在科学研究中总结的认识论和方法论，实际上，正是《原理》中阐述的牛顿思想指引着矢量力学的理论得以发展和完善。

1.2 运动微分方程的建立

牛顿定律的核心是牛顿第二定律，式(1.1)为其数学表达形式。在利用它解决实际问题时，它必须以标量形式出现，特别是将以运动微分形式的方程出现，这就需要借助于选择合适的坐标系。

采用何种坐标系取决于帮助问题得以解决或者更加易于解决，而采用的坐标系不同，会导致数学表达式的形式不同，即方程的形式不同，继而带来解方程的方法不同。所以，牛顿力学中历来以理论容易理解，但方程难解著名，主要源于方程形式的不唯一。已有多种正交坐标系，如直角坐标系、平面极坐标系、柱坐标系、球坐标系和自然坐标系。在这些不同的坐标系中列解式(1.1)的标量表达式，就将求解力学问题变成求解运动微分方程的问题，换句话说，解决物理问题最后就转化成求解数学方程问题。

一般地，力 $\boldsymbol{F}$ 是物体的位置 $\boldsymbol{r}$、速度 $\boldsymbol{v}=\dot{\boldsymbol{r}}$ 和时间 t 的函数 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r},\dot{\boldsymbol{r}},t)$，所以牛顿第二定律的矢量表示为

$$m\ddot{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r},\dot{\boldsymbol{r}},t) \tag{1.3}$$

这是矢量的二阶微分方程。下面就给出式(1.3)在不同坐标系中的具体表示。

1.2.1 直角坐标系

在直角坐标系中，空间任意点 P 的位置可用 x,y,z 三个参数来表示，用 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 分别表示沿 x 轴，y 轴和 z 轴的单位矢量，它们的大小和方向都不随时间而改变，质点的**位置**和**速度**可以分别表示为

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} \quad 和 \quad \boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\dot{x}\boldsymbol{i} + \dot{y}\boldsymbol{j} + \dot{z}\boldsymbol{k}$$

注：也可以用 $\boldsymbol{e}_x,\boldsymbol{e}_y,\boldsymbol{e}_z$ 分别表示沿 x 轴、y 轴和 z 轴的单位矢量。

方程(1.3)可以表示为标量形式

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F_x(x,y,z;\dot{x},\dot{y},\dot{z};t) \\ m\ddot{y} = F_y(x,y,z;\dot{x},\dot{y},\dot{z};t) \\ m\ddot{z} = F_z(x,y,z;\dot{x},\dot{y},\dot{z};t) \end{cases} \tag{1.4}$$

例 1.1　半径为 R 的车轮沿直线作纯滚动，设车轮保持在同一竖直平面内运动，且轮心的速度大小为 u，加速度大小为 a。试分析车轮边缘点 M 的运动，并据此建立其运动微分方程。

解　取车轮所在平面为 Oxy 平面，直线轨道为 x 轴。设 M 点为车轮边缘上的任意一点，在初始时刻 M 点与坐标原点 O 重合。又设任意时刻车轮边缘与地面接触点为 C，则当车轮转过一个角度 θ 后，轮心 A 的坐标为

$$x_0 = \overline{OC} = R\theta, \quad y_0 = \overline{AC} = R$$

轮心的运动轨迹是直线。因此轮心的速度和加速度方向都沿着 x 轴，分别表示为

$$\boldsymbol{v}_0 = u\boldsymbol{i} = \dot{x}_0\boldsymbol{i} = R\dot{\theta}\boldsymbol{i}$$

$$\boldsymbol{a}_0 = a\boldsymbol{i} = \ddot{x}_0\boldsymbol{i} = R\ddot{\theta}\boldsymbol{i}$$

由此可以求出

$$\dot{\theta} = \frac{u}{R} \quad 和 \quad \ddot{\theta} = \frac{a}{R}$$

M 点的坐标为

$$x = \overline{OC} - \overline{AM}\sin\theta = R(\theta - \sin\theta)$$
$$y = \overline{AC} - \overline{AM}\cos\theta = R(1 - \cos\theta)$$

这是旋轮线的参数方程，因此 M 点的轨迹是旋轮线。M 点的矢径为

$$\boldsymbol{r}_M = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} = R(\theta - \sin\theta)\boldsymbol{i} + R(1 - \cos\theta)\boldsymbol{j}$$

M 点的速度为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_M &= \dot{x}\boldsymbol{i} + \dot{y}\boldsymbol{j} = R\dot{\theta}(1 - \cos\theta)\boldsymbol{i} + R\dot{\theta}\sin\theta\boldsymbol{j} \\ &= u(1 - \cos\theta)\boldsymbol{i} + u\sin\theta\boldsymbol{j} \end{aligned}$$

由题意知，由于纯滚动，当 M 点与地面接触时，$\theta = 2k\pi$，M 点的速度为零；当 M 点位于轮子的最高点时，$\theta = (2k+1)\pi$，M 点的速度为 $2u$，方向与轮心速度方向一致。

M 点的加速度为

$$\boldsymbol{a}_M = \ddot{x}\boldsymbol{i} + \ddot{y}\boldsymbol{j} = R[\ddot{\theta}(1 - \cos\theta) + \dot{\theta}^2\sin\theta]\boldsymbol{i} + R(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta)\boldsymbol{j}$$

$$= \left[a(1-\cos\theta)+\frac{u^2}{R}\sin\theta\right]\boldsymbol{i}+\left(a\sin\theta+\frac{u^2}{R}\cos\theta\right)\boldsymbol{j}$$

运动微分方程为

$$\begin{cases} F_x = m\left[a(1-\cos\theta)+\dfrac{u^2}{R}\sin\theta\right] \\ F_y = m\left(a\sin\theta+\dfrac{u^2}{R}\cos\theta\right) \end{cases}$$

讨论

(1) 当 M 点与地面接触时，$\theta=2k\pi$，M 点的加速度不为零，其大小为$\dfrac{u^2}{R}$，方向竖直向上，指向轮心；

(2) 当 M 点位于轮子的最高点时，$\theta=(2k+1)\pi$，M 点的加速度大小也为$\dfrac{u^2}{R}$，方向竖直向下，指向轮心。

1.2.2 平面极坐标系

在平面极坐标系中，空间任意点 P 的位置可用 r,θ 来表示，用 $\boldsymbol{e}_r,\boldsymbol{e}_\theta$ 分别表示矢径 $\boldsymbol{r}$ 增加方向和极角 θ 增加方向的单位矢量。它们都将随时间而改变，如图 1.1 所示。

质点的位置和速度可以分别表示为

$$\boldsymbol{r}=r\boldsymbol{e}_r \quad 和 \quad \boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r\boldsymbol{e}_r)$$

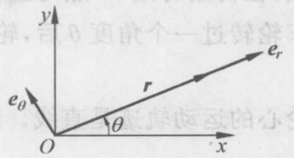

图 1.1

方程(1.3)可以表示为

$$\begin{cases} ma_r = F_r(r,\theta;\dot{r},\dot{\theta};t) \\ ma_\theta = F_\theta(r,\theta;\dot{r},\dot{\theta};t) \end{cases} \tag{1.5}$$

其中 a_r,a_θ 的具体表示可推导如下。

方法一　由图 1.1 可以看出

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}_r = \boldsymbol{i}\cos\theta+\boldsymbol{j}\sin\theta \\ \boldsymbol{e}_\theta = -\boldsymbol{i}\sin\theta+\boldsymbol{j}\cos\theta \end{cases}$$

将上式对时间求导数，可以得到平面极坐标单位矢量的时间变化率表达式

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{e}}_r = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_r}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_r}{\mathrm{d}\theta}\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta \\ \dot{\boldsymbol{e}}_\theta = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\theta}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\theta}{\mathrm{d}\theta}\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = -\dot{\theta}\boldsymbol{e}_r \end{cases} \tag{1.6}$$

这样质点的速度和加速度可分别表示为

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r\boldsymbol{e}_r)=\dot{r}\boldsymbol{e}_r+r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta$$

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)\boldsymbol{e}_r+(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta})\boldsymbol{e}_\theta$$

这样就将速度和加速度都分别分成了沿 $\boldsymbol{e}_r,\boldsymbol{e}_\theta$ 方向的两个分量，分别称作**径向**和**横向部分**，所以牛顿第二定律可表示为