江 苏 省 中 学 课 本

数　学

第 九 册

（教学参考资料）

苏州地区教学参考资料编写组

一九七八年八月

目　　录

第二十二章　极坐标和参数方程

一、教学目的要求

1.使学生正确理解极坐标的概念，熟练掌握极坐标和直角坐标的互化公式，掌握一些常见的极坐标方程的图形，能推导一些常见曲线的极坐标方程，正确理解和掌握园锥曲线的极坐标统一方程和等速螺线的极坐标方程，并能利用极坐标方程研究曲线的有关性质。

2.使学生正确理解参数和参数方程的意义，会用描点法和几何作图法画出用参数方程所表示的曲线，掌握直线、园、椭园、园的渐开线、旋轮线（摆线）和弹道曲线的参数方程。

3.使学生进一步理解点和坐标、曲线和方程之间的对应关系，从而对“对立统一”、“矛盾转化”等基本哲学思想在数学中的反映，有进一步的认识。

二、教 材 分 析

直角坐标系是最常用的一种坐标系。但它并不是用数来描写点的位置的唯一办法。例如，向炮兵指示射击目标时，最好是指出目标的方位，即方向和距离。

用方向和距离描写点的位置，就是本章介绍的一种新的坐标系——极坐标系的基本思想。

平面上的某些曲线，明显地表现为质点运动的轨迹。这时要找出曲线上点的直角坐标 x 和 y 间的直接关系式，往往不方便或比较困难。容易得出的倒是x，y和时间 t 的关系。这样，将 x，y 通过另一变数 t 表示出来，同样可

以决定曲线的图形，这就是本章介绍的一种新的表示曲线的方法——曲线的参数方程表示法的基本思想。

本章的重点是极坐标的概念，一些常见曲线的极坐标方程以及曲线的参数方程表示法。

在极坐标系中，即使形式比较简单的方程，其所确定的曲线也常常比较复杂，而求曲线的极坐标方程，变化较多，不易掌握。因此，判断极坐标方程的图形，正确画出极坐标方程所表示的曲线，以及求曲线的极坐标方程，是本章教学中的难点。另外，由于建立曲线的参数方程必须以第三个变量（即参数）为媒介，既涉及代数、几何、三角等知识，又常涉及物理、机械工程等知识。因此，正确理解参数的意义，合理地选择参数，从而建立尽可能简明的参数方程，是教学中的又一难点。

学好本章教材的关键是：

(1) 弄清极坐标系与直角坐标系的联系与区别。

(2) 明确在不同坐标系中，建立曲线和方程间的联系的基本方法是完全一致的。

(3) 弄清曲线的参数方程表示法的意义和作用。

课时安排：

第一节　9课时。

第二节　6课时。

全章共15课时左右。

三、教 学 建 议

第一节　极 坐 标

1.学习本节教材时，用到的三角知识和物理知识较

多，教学时可根据实际情况，适当进行复习。主要有以下几点：

（1）勾股定理以及直角三角形中的边角关系。

（2）角度制与弧度制的换算。

（3）有关的三角公式。

（4）匀速运动和匀加（减）速运动的路程公式：

$$s=s_0+vt;\quad s=s_0+v_0t+\frac{1}{2}at^2。$$

2.关于极坐标的概念

极坐标概念的教学，应紧扣教材从实例引入。可举航海中利用方位角和距离测定目标，测量中利用方位角和距离定点，机械图纸中用角度和距离表示孔位等实例，加深同学对极坐标的感性认识。说明在现实生活中，除用两个有向线段决定平面上点的位置外，还广泛应用角度和距离来决定平面上点的位置，从而引入极坐标系。

在学生对极坐标概念有了初步认识以后，应要求学生作如下基本训练：①由极坐标画对应的点，②由点说出它对应的极坐标。并及时总结它们的一般规律：由极坐标画对应的点时一般先按极角画极半径所在的射线，再由极半径的数值定点。由点求极坐标时一般也可以先求极角，再求极半径。

必须提醒学生特别注意当极半径或极角是负值时，如何在坐标系内作出对应的点来。

3.极坐标和直角坐标的关系

由于极坐标和直角坐标是以不同方法反映数与形之间的对应关系的，因此它们既有区别又有联系是必然的。必须使学生明确，直角坐标平面上的点与有序实数对(x，y)

是一一对应的；而极坐标平面上的点与有序实数对(ρ, θ)并不做成一一对应。只有限制ρ、θ的取值范围（例如限制$\rho>0$，$0\leqslant\theta<2\pi$）方能构成一一对应。这就是两种坐标系的显著区别之一。教材中列出的极坐标和直角坐标互换公式，给出了两种不同坐标系的内在联系。但必须向学生指明，互换公式成立的前提有三个：①直角坐标系的原点与极坐标系的极点重合。② x轴的正方向与极轴的正方向一致。③两种坐标系中长度单位相同。

两组互换公式都是根据任意角的三角函数定义得出的。

其中第一组公式$\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \end{cases}$用于化点的极坐标为直角坐标。教学时应要求学生注意任意角三角函数的符号。

第二组公式$\begin{cases} \rho^2=x^2+y^2 \\ tg\theta=\dfrac{y}{x}\ (x\neq 0) \end{cases}$用于把点的直角坐标化为极坐标。这时学生的困难在于如何选取极角。教学时应注意第5页下面的脚注。事实上，限制$\rho>0$，$0\leqslant\theta<2\pi$后，把点的直角坐标化成极坐标的结果是唯一的。必须要求学生根据点所在的象限来选取极角。还可把例1(2)中的$Q(-\sqrt{3},-1)$发展为$(\sqrt{3},-1)$、$(-1,\sqrt{3})$、$(\sqrt{3},1)$，要求学生把它们化为极坐标。

另外，当要把极坐标方程化成直角坐标方程时，应强调先变形，使方程两端含有ρ^2、$\rho\cos\theta$、$\rho\sin\theta$的形式。这样就可分别用x^2+y^2、x、y代入，从而避免不必要的讨论。

4.极坐标方程的图形

教材对画极坐标方程的图形有两个基本要求：

（1）把ρ看作θ的函数，用描点法画出简单的极坐标方程的图形。教材对这方面的要求并不高。为了使学生能迅速地画出极坐标方程的图形，可视实际情况先对极坐标方程进行简单的讨论（如曲线是否经过极点，曲线与极轴是否相交，曲线的对称性，极半径的最大值与最小值等，详见参考资料）。

（2）要求同学逐步掌握比较常见的极坐标方程，并能利用几何作图法直接作出它们的图形来。由于一开始同学对极坐标方程的图形并不熟悉，因此宜将第7页图22—8中的八个图形的极坐标方程化为学生熟悉的直角坐标方程，让学生反复对照比较，以求熟练掌握。在练习中，还应要求学生用几何作图法作出这八个极坐标方程的图形。

5.曲线的极坐标方程

求曲线的极坐标方程和求曲线的直角坐标方程一样，就是把曲线上任一点的坐标（ρ，θ）所要满足的条件用关于ρ和θ的一个方程表示出来。在推导过程中，要综合应用代数、三角和几何知识。

在教材例1和例2的极坐标方程的推导过程中，除采用课本中的推导方法外，也可根据学生实际情况利用他们所熟悉的直角坐标方程作为过渡，求出极坐标方程。例如，例1$_{(1)}$求经过点A（8，0）且和极轴垂直的直线L的直角坐标方程为$x=8$，极坐标方程就是$\rho\cos\theta=8$。其它有关直线和圆的极坐标方程也可作类似的推导。

教材例3中的“延长OR到P，使RP＝a”应当了解为动点P可以在OR的延长线上RP＝a，也可以在RO的延

长线上，RP = a。这样P点的轨迹方程可以是$\rho = a(\cos\theta + 1)$，也可以是$\rho = a(\cos\theta - 1)$。它们化成直角坐标方程都是$a^2(x^2 + y^2) = (ax - x^2 - y^2)^2$，表示它们是同一条曲线。

在讲完例3后，可以介绍心脏线的几何作图法。先画一个基园，在基园上任取一点R，连直线OR，在直线OR上可截取两点P和P′，使RP = a，RP′ = a，P和P′都是心脏线上的点。不断改变R在基园上的位置，就可以画出所求的心脏线来。（参见图22—12）

还可根据实际情况向学生介绍尼氏蚌线（见参考资料）。

5.园锥曲线的极坐标方程

这部分内容是本节教材的重点。在推导园锥曲线的极坐标方程时，必须向学生讲明建立极坐标系的方法。取园锥曲线的焦点为极点O，取焦点F到准线L的垂线为极轴，垂足N到焦点F的方向为极轴的正方向。当园锥曲线是椭园时，取的是左焦点、左准线；当园锥曲线是双曲线时，取的是右焦点、右准线。

对于接受得比较好的班级，教师也可以引导学生推导焦点F（极点）在准线L的左方的园锥曲线方程

$$\rho = \frac{ep}{1 + e\cos\theta}。$$

在园锥曲线的极坐标方程得出以后，教师应当让学生分析方程的特征（抓住分母中的1），以及如何根据e的值识别曲线的类型，并作必要的口头练习和画草图的练习使学生巩固熟练。并可适当补充“求椭圆

$$\rho=\frac{9}{5-4\cos\theta},$$

的离心率、长轴和短轴的长”一类问题，一方面沟通园锥曲线的极坐标方程和直角坐标方程主要参数的联系，另一方面为学习人造卫星的轨道方程作准备。在学习了人造卫星的轨道方程以后，可以提问学生如果已知一个人造卫星轨道的极坐标方程是：$\rho=\frac{7661}{1-0.125\cos\theta}$，如何求(1)轨道的近地点与远地点？(2)轨道的长轴、短轴和焦距？（参见图22—14）以提高学生分析问题和解决问题的能力。

6.等速螺线

由于等速螺线在机械工业中有广泛的应用，因此在教材中有较多的篇幅介绍了等速螺线的概念与性质，它的极坐标方程以及几何画法。

教好这部分内容的关键在于正确建立等速螺线的概念。由于等速螺线是一个动点作两种运动（一是沿直线作匀速运动，二是绕定点作匀角速转动）的合运动，因此在教学时，一方面可先举一些学生生活实际中所熟悉的例子，如唱片上的螺纹，就是等速螺线。另一方面可创造条件做一些演示性的实验（如用一细棒套一粒算盘子，棒绕一端大致等速旋转，算盘子沿木棒大致等速向外移动），使学生对等速螺线的特点有一个直观概念。在同学有了直观概念的基础上给出定义，就不难推导出等速螺线的极坐标方程。必须注意的是教材中等速螺线的极坐标方程里的极角是以弧度为单位的，因此在具体计算时如果极角是角度时先要把它转化为弧度。

由于等速螺线的极坐标方程$\rho=a\theta+\rho_0$中有两个待定

常数 a 和 ρ_0，因此由两个条件就可以写出等速螺线的方程，这两个条件一般都是寻找起点和终点两点的极坐标，用待定系数法求出a和 ρ_0 来。

在等速螺线$\rho = a\theta + \rho_0$中，如果把θ作为横坐标，ρ 作为纵坐标，建立平面直角坐标系，那末ρ是 θ 的一次函数。所以等速螺线方程具有一次函数共有的性质：函数值的改变量与自变量的改变量成正比。教学时，可先复习一下关于正比例的概念，然后给出教材中的证明。最后可以向学生指出，等速螺线在工业上的应用，等速螺线的几何作法，都是建立在等速螺线的这个重要性质的基础上的。

7.教完本节后，可引导学生就课本例题、习题作一些归纳，从中掌握一些求曲线的极坐标方程的方法：

(1)把已知量和 ρ、θ 归结到一个直角三角形中，根据直角三角形的边角关系，分析已知量和ρ、θ之间的内在联系，从而求得曲线的极坐标方程 $\rho = f(\theta)$。如课本例 1 、例 2 (p 8)。

(2) 分析所给曲线和已知极坐标方程的曲线之间的内在联系，从而列出所求曲线的极坐标方程 $\rho = f(\theta)$。如课本例 3 (p9)。

(3)先根据曲线特性，设立与 ρ、θ 有直接联系的第三变量(如 t)，得 $\rho = f_1(t)$，$\theta = f_2(t)$，再消去第三变量，求得曲线的极坐标方程 $\rho = f(\theta)$。如课本关于等速螺线极坐标方程$\rho = a\theta + \rho_0$的推导。

第二节 参数方程

1.参数方程

本节教材是在讨论了两种不同的坐标系中的方程和曲

线的关系以后提出来的。由于同学在物理中以时间（t）为参数建立运动方程已经熟悉，因此通过时间变量（t）把动点的坐标x和y或ρ和θ间接地联系起来得到动点的参数方程，学生一般是不难接受的。在开始提出这个问题时，可以启发学生回想前面的等速螺线方程是如何建立的。实际上，在建立等速螺线的方程$\rho = a\theta + \rho_0$时，已经用到它以时间t为参数的方程：$\begin{cases} \rho = \rho_0 + vt \\ \theta = \omega t \end{cases}$

因为以时间为参数的方程易于为学生掌握，因此在教学时，可以根据实际情况将第23页的“直线的参数方程”紧接在弹道曲线的参数方程后讲，这样便于对照，它们的共同点是：

(1) 参数方程中的x、y都是t的代数式。

(2) 消去参数t变为普通方程时，都用代入消元法，这是比较典型的以时间t为参数的方程。

另一类参数方程是与园或动点作园周运动有关的，一般也可以用时间t为参数，但最终可以归结为以动点转动角φ为参数的方程，教材中共提出四个问题，即园、椭园、园的渐开线，旋轮线（摆线）。它们的共同点是以某个转动角为参数，这类问题都是与一个基园有关的。

对基础较好的学生，教师可以适当介绍双曲线的参数方程（见参考资料）

2.由参数方程画图

由参数方程画图，教材介绍了描点法和几何作图法，给出参数的一组值，计算出曲线上相应的点的坐标。采用描点法画出曲线时，应注意参数的取值范围。例如在第22

页画$\begin{cases} x = t^2 \\ y = 2t \end{cases}$的图形时，这里的参数t可以取一切实数值。如果把参数 t 误认为时间，因而限 定$t \geqslant 0$．那末画出的曲线将是抛物线对称轴上面的一部分，这是不完整的。因此由参数方程画曲线时，应先在参数的取值范围内取出有代表性的参数的值，使曲线完整。

根据选择的参数的几何意义，用几何作图法画出图形，教材中主要介绍了园的渐开线的几何画法，只要学生明确了参数的几何意义，这部分内容是不难掌握的。

3.参数的选择

(1)当动点的位移是以时间t为自变量的函数作有规律运动时，选择t为参数较为恰当。

(2) 当曲线的直角坐标（或极坐标）方程已经给出，要求其参数方程时，应遵循使所得参数方程较为简单的原则，根据所给方程和图形的特点，充分运用已有的代数、几何、三角知识来选择合理的参数。

(3) 当动点以某一定点为基准作有规律转动时，选取适当的变动角为参数较为恰当。

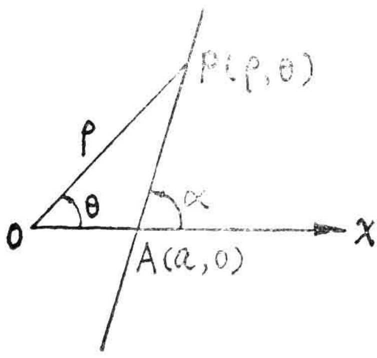
参数的选择比较灵活机动，要根据具体情况作具体分析。

四、习题解答或提示

练习（p19）

12（5）

【解1】



设 $P(\rho, \theta)$ 是所求直线上的任一点，在△POA 中，$OP=\rho$，$\angle POA=\theta$，$OA=a$，$\angle OAP=\pi-\alpha$，因此 $\angle APO=\alpha-\theta$，由正弦定理

$$\frac{\rho}{\sin(\pi-\alpha)}=\frac{a}{\sin(\alpha-\theta)}$$

即$\rho=\dfrac{a\sin\alpha}{\sin(\alpha-\theta)}$是所求的直线方程。

【解 2】由于$A(a, 0)$的直角坐标也为$(a, 0)$，所求直线的斜率为$tg\alpha$。

因此所求的直线的直角坐标方程为

$$y=tg\alpha(x-a)。$$

用$x=\rho\cos\alpha$，$y=\rho\sin\alpha$代入得

$\rho\sin\alpha=tg\alpha(\rho\cos\alpha-a)$

化简得所求直线的极坐标方程为

$$\rho=\frac{a\sin\alpha}{\sin(\alpha-\theta)}$$

习题(p32)

10.答：$\rho=\dfrac{3.083}{1-1.005\cos\theta}$

12.解：设$P(\rho, \theta)$是凸轮轮廓线AB上任一点，那么

$$\begin{cases}\theta=\omega t\\ \rho=R_0+\frac{1}{2}at^2\end{cases}$$

消去参数 t 得所求的极坐标方程为

$$\rho=\frac{a}{2\omega^2}\theta^2+R_0\ \left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{19\pi}{36}\right)$$

15.解：以$\angle BOM=\theta$为参数。

在△ABC中，由正弦定理得

$$\frac{r}{\sin A}=\frac{a+b}{\sin\theta},\quad \sin A=\frac{r}{a+b}\sin\theta$$

$$QB=b\sin A=\frac{br}{a+b}\sin\theta,$$

$\because A<90°$, $\therefore \cos A=\sqrt{1-\sin^2 A}$

$$=\frac{1}{a+b}\sqrt{(a+b)^2-r^2\sin^2\theta}$$

$$QP=b\cos A=\frac{b}{a+b}\sqrt{(a+b)^2-r^2\sin^2\theta}$$

$$OM=r\cos\theta$$

$$MB=r\sin\theta$$

$$x=OM+MN=OM+QP$$

$$=r\cos\theta+\frac{b}{a+b}\sqrt{(a+b)^2-r^2\sin^2\theta}$$

$$y=MB-QB=r\sin\theta-\frac{br}{a+b}\sin\theta=a\frac{r\sin\theta}{a+b}$$

$\therefore$所求的P点的轨迹参数方程为

$$\begin{cases} x=r\cos\theta+\dfrac{b}{a+b}\sqrt{(a+b)^2-r^2\sin^2\theta} \\ y=\dfrac{ar}{a+b}\sin\theta \end{cases}$$

16．解：取$\angle OAB=\theta$为参数，

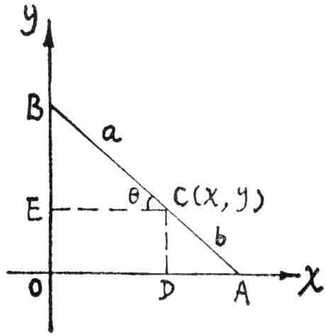
在直角$\triangle CDA$和BEC中，

$y=DC$

$=b\sin\theta$

$x=EC$

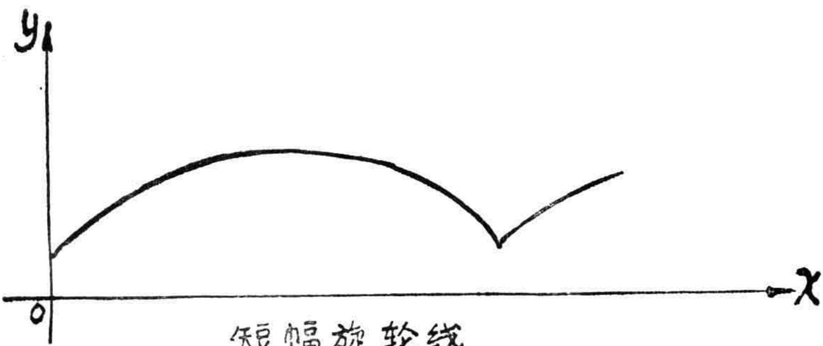
$=a\cos\theta$



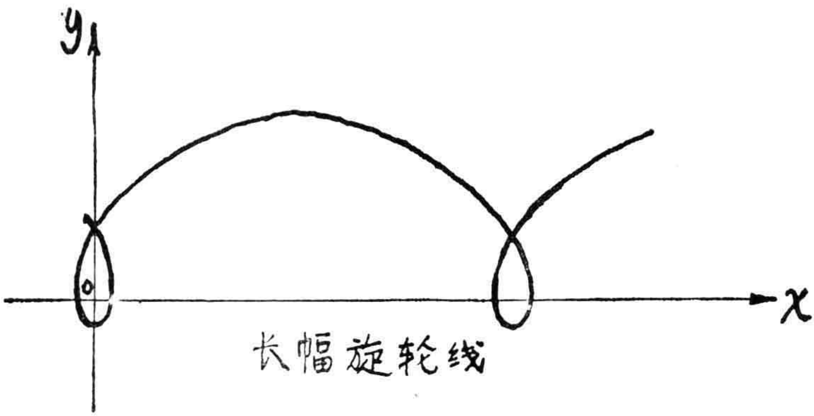
因此C点的轨迹参数方程为

$$\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = b\sin\theta \end{cases} \quad \left(0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$$

当$a \neq b$时它是中心在原点，焦点在坐标轴上的椭园（取第一象限内的一部分）；
当$a = b$时，它是园心在原点，半径为a的园（取第一象限内的部分）。



短幅旋轮线



长幅旋轮线

17。答：$\begin{cases}\rho = \dfrac{r}{\cos\alpha} \\ \theta = \mathrm{tg}\alpha - \alpha\end{cases}$

18.(1)取直线轨道为x轴，P与园心的连线与直线轨道垂直的位置为y轴，轮子的转动角ϕ为参数，那么所求的参数方程为：

$$\begin{cases}x = a\phi - b\sin\phi \\ y = a - b\cos\phi\end{cases} \quad (b<a)$$

这个方程的图形称为短辐旋轮线。（图见第13页）

(2)同上建立直角坐标系，参数也为ϕ，那么所求的参数方程同上题。

即：$\begin{cases}x = a\phi - b\sin\phi \\ y = a - b\cos\phi\end{cases} \quad (b>a)$

这个方程的图形称为长辐旋轮线。（图见第13页）

五、参考资料和参考题

（一）参考资料

1.曲线的极坐标方程的简单讨论

(1)曲线过极点的判定

如果$\rho = 0$满足方程，那么曲线过极点。

(2)曲线与极轴相交

如果以$\theta = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \cdots\cdots$，代入方程得到$\rho_0, \rho_1, \rho_2\cdots\cdots$，那么曲线与极轴相交，且$(\rho_0, 0)$，$(\rho_1, \pm\pi)$，$(\rho_2, \pm 2\pi)$，……，就是曲线和极轴的交点

坐标。

(3)曲线关于极轴和极点的对称性

如果以$-\theta$（或$2n\pi-\theta$，n是整数）代替方程中的θ而方程不变，那么曲线关于极轴对称；

如果以$-\rho$代替方程中的ρ而方程不变，那么曲线关于极点对称；

如果同时以$-\theta$或$2n\pi-\theta$代替θ，$-\rho$代替ρ而方程不变，那么曲线关于垂直于极轴且过极点的直线是对称的。

(4) 曲线存在的范围

如果θ的数值在范围$\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta$内，对应的$\rho$有实数值，此外$\rho$无实数值，那么曲线只存在于直线$\theta=\alpha$和$\theta=\beta$之间。

(5)极半径的最大值或最小值

一般常用$\sin\theta$或$\cos\theta$的最大值是1，最小值是-1来讨论。

2.尼古默德蚌线

如图MN是一条定直线，O是一个定点，在MN上任取一点A，连结OA在直线OA上取点P，使$AP=c$，（c是定值），P点的轨迹称为尼古默德蚌线。

如图建立极坐标系，设MN的方程为

$\rho\cos\theta=a$，（a是极点到MN的距离）那么所求的蚌线极坐标方程为

$$\rho=\frac{a}{\cos\theta}+c,$$

它所表示的曲线有如图所示的两支。