

解析函数插值与矩量问题

陈公宁文集

CHEN GONGNING WENJI



北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社



陈公宁文集

解析函数插值与矩量问题

李仲来 / 主编



北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

2013 · 北京

图书在版编目(CIP)数据

解析函数插值与矩量问题——陈公宁文集/陈公宁著,李仲来主编.—北京:北京师范大学出版社,2013.12

(北京师范大学数学家文库)

ISBN 978-7-303-16762-3

I. ①解… II. ①陈… ②李… III. ①解析函数—文集②插值—文集③矩量问题—文集 IV. ①O174.55-53②O174.42-53③O174.43-53

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2013) 第 172762 号

营销中心电话 010-58802181 58805532
北师大出版社高等教育分社网 <http://gaojiao.bnup.com>
电子信箱 gaojiao@bnupg.com

出版发行:北京师范大学出版社 www.bnup.com

北京新街口外大街 19 号

邮政编码:100875

印刷:北京京师印务有限公司

经销:全国新华书店

开本:155 mm × 235 mm

印张:34

插页:4

字数:523 千字

版次:2013 年 12 月第 1 版

印次:2013 年 12 月第 1 次印刷

定价:85.00 元

策划编辑:岳昌庆

责任编辑:岳昌庆

美术编辑:毛佳

装帧设计:毛佳

责任校对:李茵

责任印制:孙文凯

版权所有 侵权必究

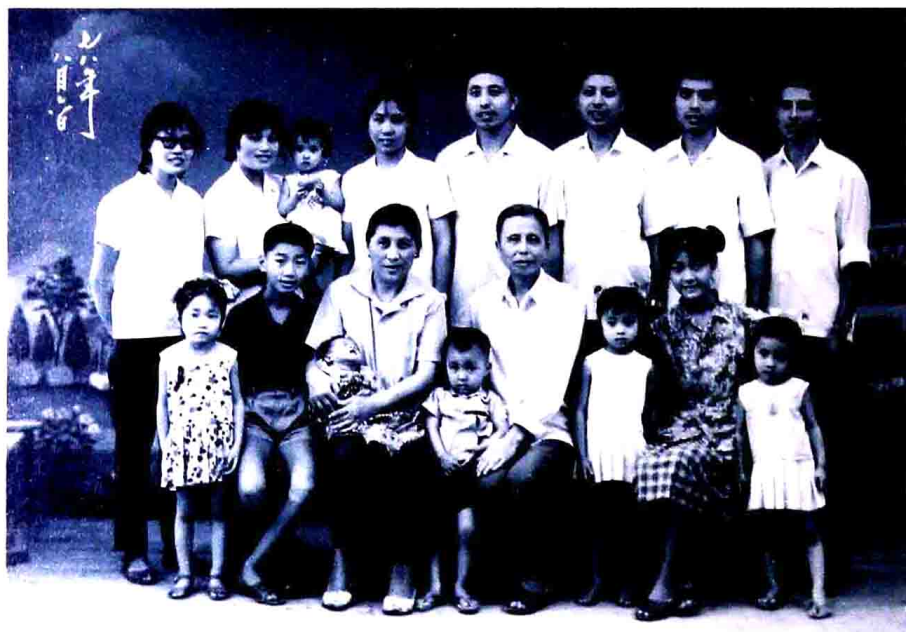
反盗版、侵权举报电话:010-58800697

北京读者服务部电话:010-58808104

外埠邮购电话:010-58808083

本书如有印装质量问题,请与印制管理部联系调换。

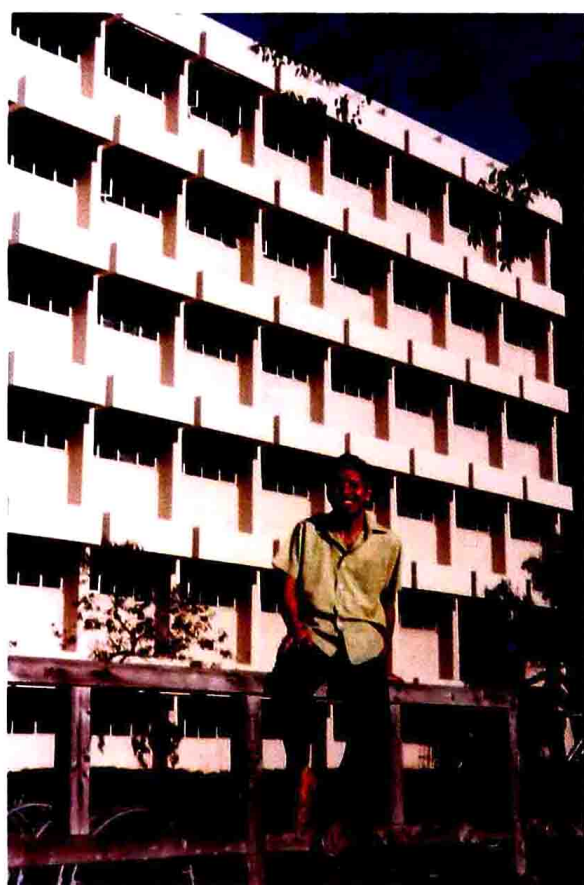
印制管理部电话:010-58800825



▲ 1978年8月回长乐探亲时与父母及三位弟弟、弟妹家人合影



▲ 1980年8月访美前夕与家人合影。左起：陈公宁、田树芸；后排：女儿陈仲。



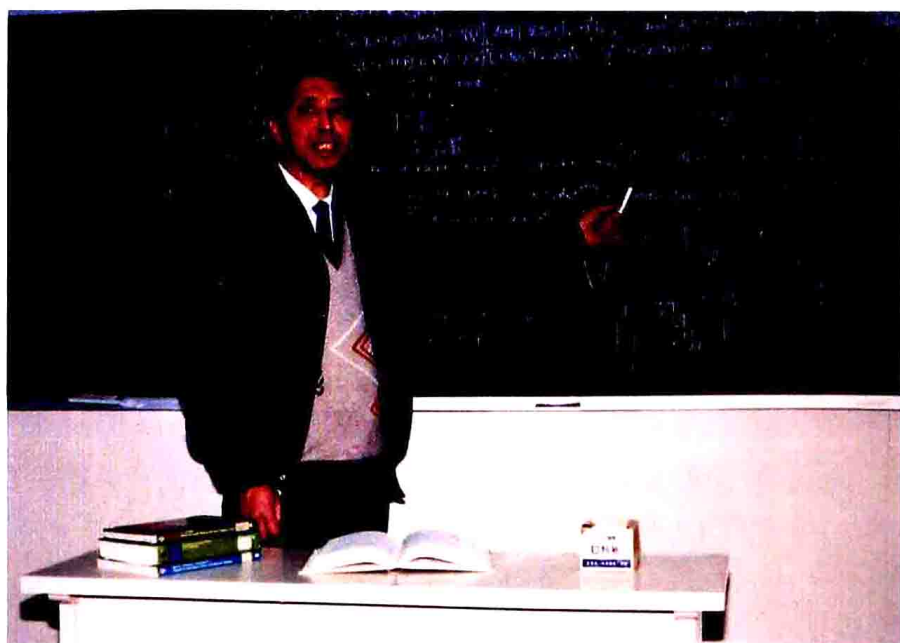
▲ 1981年9月在UCSB的South Hall前留影。陈公宁在该楼5502室工作。



► 1985年10月在西安交通大学全国泛函分析学术会议上做学术报告。



◀ 1991年11月访问莫斯科大学时在其广场上留影



► 1993年2月在北京师范大学英东楼215室讨论班做报告。

► 1993年5月与樊曦先生（左）在北京友谊宾馆下榻处合影。



► 1994年5月摄于美国密执安大学音乐厅前。



► 1999年6月与两位博士合影。左起：胡永建、陈公宁、赵斌。



► 2003 年 6 月主持张晓南（右侧立者）博士论文答辩会。



◀ 2010 年秋，与大哥陈公宪合影于扬州个园。

► 2012 年 7 月与女儿陈仲一家人合影。前排左起：郑欣、陈公宁、陈仲、胡毅；后排左起：胡冰玥、胡冰野。



序 1

本书为我(或与合作者)在 1974 年至 2012 年间发表的 80 篇数学论文的选集,共分 4 个部分,大体上反映了我学习矩阵与算子理论及其应用(特别在解析函数插值与矩量问题的应用)4 个阶段的过程与成果. 这些是我们辛勤耕耘的收获,得之不易. 重要的是,在这孤寂研究过程中,享受到难以言表的数学美感与精神上的愉悦——“人生如此自可乐,岂必局束为人靽”.

1939 年十月初六(农历)我出生在福建省长乐县(后改市)城关. 父亲为银行职员,也搞过工程技术,母亲为妇产科医生. 在我童年印象中,父母对我们 5 位兄弟教育宽严有度,孩子们得以自由地发展. 小学 4 年级一次全校性算术竞赛中我得冠军,颇有点成就感. 初中 2 年级时喜欢上平面几何,时常与同学在沙地上演算题,彼此考问考答.(看来,几何直觉是增进对数学理解力,提高数学兴趣的很有效的途径.)我对数学的进一步兴趣发生在 1953 年考入福州一中之后,时任数学老师林景贤在省内颇有名气. 我担任班上数学课代表,与林老师有较多的接触. 至今,我还很佩服他的独特

授课方式。(但总觉得那时中学数学内容较狭窄,与大学高等数学之间难沟通.经历了半个世纪回头看来,这个问题似乎依然如故,且有变大的趋势.)

1956 年高中毕业,起初想报考工科或医科,子承父母业,但思量再三,最后还是报考了北京师范大学数学系.从此与数学、与北京师范大学数学系结缘,立志将数学研究与教育作为自己的终身职业.1962 年研究生班毕业,留校当助教.之后,曾在本系与物理系本科讲授微积分基础课程,还参加一个讨论班,但数学研究乏善可陈.1966 年“文化大革命”开始,教学与研究全部停顿.政治运动,大串联,教育革命小分队下厂与劳动锻炼(去临汾干校,挖战备防空洞,烧砖等)接二连三.我从“三十不立”,流年似水,临近“四十而惑”,岁月蹉跎,心中很惶恐不安.等到“大学还是要办的”最高指示后,与在系的工农兵学员一块重新学习数学业务,开门办学,下乡下厂,顺便解决一些实际问题,包括在京郊昌平水利局的近半年的设计水库库区与坝体的工作.

10 年“文化大革命”后,大学逐渐地恢复正常秩序.20 世纪七八十年代国家开始改革开放,1980 年 9 月我有幸受公派赴美国加州大学圣塔巴巴拉分校(UC, Santa Barbara)留学 2 年,并拜识该校著名数学家樊畿(Ky Fan)教授.可谓:“运命唯所遇”.樊师先帮助我研究矩阵理论,亲自批阅我的论文;第二年收我为弟子,指导我专攻 Hilbert 空间算子理论与非交换复分析.在他的提携下,我有了明确而适意的学术研究方向,并很快地取得一些基础性的论文成果.个中的辛苦与努力只有自己知晓.平日间樊师还在私人言谈中传授为学之道,从他身上我也学到许多做人做事的哲理,受益终身.1982 年 9 月回国后 5 年期间,继续前两年的研究工作,也有一些成果.本书中前两部分的论文就是这两段时期的研究成果:第一部分是关于一般矩阵的;第二部分关于全纯映射与算子函数的.

1989 年左右,我们开始转而重视当时很热门的特殊矩阵理论与应用.我们瞄准捷克布拉格与以色列学派的一系列工作,从中得到启示与动力.当时,最感兴趣的有:Bezout 矩阵, Vandermonde 矩阵, Loewner 矩阵, Hankel 矩阵, Toeplitz 矩阵与 Pick 矩阵等;研究内容包括:这些矩阵的结构特征与性质,核,求逆,分解以及彼此之间的关联.这些研究及其块矩阵形式推广为我们 20 世纪 90 年代之后有理函数插值与解析函数插值

以及矩量问题的研究打下扎实的根基. 反过来, 它们也对特殊矩阵类研究提供新的源泉. 这个因果关系, 我们是始料未及的, 冥冥之中如有神助.

1992 年我们得到有理插值的完全解. 用的是自创的所谓 Hankel 向量方法: 将该插值求解转换为寻找相关 Hankel 向量的生成函数, 这里, Loewner 与 Hankel 矩阵的一种关系起着关键作用. 该项工作主要由赵斌与张惠品独立完成. 此时, 我正在莫斯科大学访问, 全力研究奇异 Hankel 矩阵. 1994 年在访问美国密执安大学的一个冬日黄昏, 在系资料室里“鬼使神差”地省悟到我们先前的 Hankel 向量方法完全适用于 Navanlinna-Pick 插值的求解, 并很有可能扩展到更广的矩阵值解析函数插值问题的情形. 当下便收集有关方向的大量经典文献资料, 并记下许多宝贵的书目. 回国后, 随即向研究小组报告了这个成果, 并写成论文发表. 此后近 20 年间, 我们基本上围绕着矩阵值解析函数类的插值与相关的矩量问题, 开展比较全面的探究, 得到自创的 Hankel 块向量方法/Toeplitz 块向量方法在前述问题求解中的应用成果(李小青, 胡永建分别完成基础工作部分). 其中有些居国际上领先地位, 为同行、专家肯定、引证与采用. 我们的工作目标简而言之是: 对某些区域内或边界上的给定插值数据, 在特定的矩阵值解析函数类内寻求有解的条件, 有唯一解的条件以及(有无穷多解时)解的参数化表达式. 我们的技巧将多个重点情形等价地归纳为单个重点情形; 前者为插值, 后者本质上是矩量问题.

2003 年送走最后一位博士生后, 我先后应聘去临沂、郑州与许昌基层高校工作 6 年多, 主要精力用在指导一部分青年教师科学研究. 但我与北京师范大学数学科学学院胡永建(还有中国农业大学的杨正宏)的合作研究一直持续着. 这期间也取得一些可喜的成果, 内容包括: 边界插值问题, 多项式零点定位问题, 矩阵值耗散函数的极小 w -熵的内插式与块 Pick 矩阵的极大行列式填充, 块广义 Pick 矩阵迹不变性, 以及 Carathéodory 矩阵系数问题与 NP 型插值在非退化情形下极端耗散函数解的刻画等. 前述特殊矩阵理论与插值以及矩量问题的部分成果分别组成本书的后两个部分, 也是本书的重点.

我深深感念已故樊畿教授多年来的帮助与指引, 老师的恩情山高海深. 记得 1989 年 5 月樊师应邀访问我校时, 曾几次私人长谈. 谈及并要我关注苏联(现乌克兰)大师 M. G. Krein(1982 年 Wolf 奖得主)领导的学

派工作：“这个方向的算子论与经典复分析关系密切，也是算子论中很深的一部分”。他还告诉我，“这些工作既有理论上丰富内涵，又有系统理论与控制的背景与重要作用；以纯粹数学的眼光看来，也是主流的分析，且近年来这方向研究非常活跃。”此行他还带来一箱为我精心挑选的这方向的参考书（它们业已成为我们基本文献与必读书目）。这些教导切合我们当时的状况，至今还影响着我们的工作的发展。

我这些年来，有幸结识许多年青学者。他们是我的学生、朋友或先后合作者，在帮助本书有关内容表述与发展方面起着重要作用。特别地我想对胡永建、杨正宏、赵斌、张惠品、李小青、贾利新、郝辉、吴化璋、张晓南、秦建国、牛少彰、许松、梁景伟、赵生富等表达我的谢意。

我还对多年来一直培养我，给予热情鼓励与提携的众多师长们致以衷心的感谢。

北京师范大学数学科学学院领导，特别是李仲来教授在这部文集的出版过程给予我很多帮助；北京师范大学出版社为本文集的出版做了许多工作，我一并向他们表示谢意。

最后，我愿趁此机会向我的亲人表示感谢，感谢他们一贯地给予我的呵护与支持。

陈公宁

2012年11月写于

北京师范大学乐育楼区

序 2

我非常高兴得知陈公宁老师的著作选集将由北京师范大学出版社出版. 陈老师邀请我为此书写一序言, 我感觉备受推崇和荣耀.

我是 1993 年到北京师范大学数学系师从陈公宁老师读硕士研究生的. 当时陈老师和他的学生张惠品、赵斌等刚刚完成了一项关于一般有理插值问题在数值情况的研究. 这个一般有理插值问题就是: 给定一组数据 $y_i, C_{ik}, k=0, 1, \dots, \tau_i - 1; i=1, 2, \dots, \theta$, 总共包含 $\sum_{i=1}^{\theta} \tau_i$ 对数据, 这里, $y_i \neq y_j$ 对 $i \neq j$, 目的是找出所有有理数值函数 Φ 使得

$$\frac{1}{k!} \Phi^{(k)}(y_i) = C_{ik}, \forall i, k.$$

这个问题是首先由 Antoulas, Ball, Kang, Williams 和 Anderson 用广义 Loewner 矩阵的办法解决的. 后来又有人提出多项式生成矩阵的办法. 陈老师、张惠品和赵斌发现了一种崭新的计算特殊多项式生成矩阵的办法. 令人惊讶的是, 他们发现对于每一个有理数值插值问题, 都对应一个唯一的向量, 称之为 Hankel 向量. 这个向量非常重要,

因为一般有理插值问题的复杂度和相应的多项式生成矩阵被它完全地决定. 他们的这项成果发表在 *Linear Algebra and Its Applications* (《线性代数及其应用》), 1996 年, 244 卷. 这篇开创性的工作为以后这个研究领域的深入发展奠定了基础.

在陈老师的指导下, 在我的硕士学位论文中, 我将上面提到的陈老师、张惠品和赵斌的工作推广到矩阵值解析函数插值问题的情况, 特别是我们用块 Hankel 向量的办法给出了矩阵值 Nevanlinna-Pick 插值问题和 Stieltjes 矩阵幂矩量问题之间的一个一一对应. 这不仅使我们能够给出 Nevanlinna-Pick 插值问题的解的存在性一个判定法则, 而且基于幂矩量问题的解, 我们可以给出 Nevanlinna-Pick 插值问题的解. 反过来也是这样的. 这推广了 Krein 和 Nudel'man 1970 年的著作 *The Markov Moment Problem and Extremal Problems* (《马尔可夫矩量问题和极值问题》) 中关于数值插值的一个定理到矩阵插值的情况. 虽然 Nevanlinna-Pick 矩阵值插值及算子值插值问题都在我们之前解决了, 但是我们所提出的使用 Hankel 向量的办法却是新颖和独特的. 与此同时, 我的师弟贾利新、胡永建等也作出了相关的优秀的工作. 后来在美国留学期间, 我的研究方向转移到解析数论. 陈老师和我的师弟胡永建等又继续在这一插值领域作出很多杰出的文章. 对此我不是很了解的, 愿读者能在陈老师的著作中去涉猎.

下面从我个人在国外的一些经历谈一谈陈老师工作的国际影响力. 2010 年, 我有幸在普林斯顿高等研究院工作一年, 接触到世界著名的解析数论学家 Enrico Bombieri. 他于 1974 年因大筛法方面的工作获得菲尔兹奖. 我问他可否给我写一封申请美国永久居民的推荐信, 他很爽快地答应了. 我想作为同行, 他可能只会写我在解析数论方向的工作. 可是让我吃惊的是, 在他的信中他竟然用一小段专门地讲了我陈老师指导下做的硕士学位论文, 这表现了他对解析插值这一领域的兴趣. 2011 年, 我在美国的明尼苏达大学数学系工作面试的时候, 见到著名数学家 Andrew Odlyzko. 他在解析数论、计算复杂度与密码等领域中都有过非常杰出的成就. 在面试中, 他表现出对我的硕士学位论文的很大兴趣, 并问及我关于这一领域的最新进展. 这更让我对陈老师曾经带我进入到这一前沿领域非常感激; 对于他自己一人在国内带出一个赶超国际水平的团队也是

非常佩服的.

在准备写这一序言的过程中,我也了解到陈老师早年在矩阵算子理论和多复变函数方面的研究.在他 1984 年发表在 Journal of Mathematical Analysis and Applications 杂志第 98 卷的文章“Iteration for Holomorphic Maps of the Open Unit Ball and the Generalized Upper Half-plane of $\mathbb{C}^n$ ”(《 $\mathbb{C}^n$ 的单位开球和广义上半平面的全纯映照的迭代》)中,他将 J. Wolff 的一个经典的关于单复变函数全纯迭代定理推广到了多复变的情况.在他的 1990 年发表在中国《数学年刊》第 11 卷的文章《von Neumann, Heinz 和樊畿定理的推广》中,他将 von Neumann, Heinz 和樊畿有关希尔伯特空间上有界线性算子的结果推广到更一般的两种情况.

愿读者在陈老师的这一著作选集中品尝到他的数学工作的广度和深度,也愿读者能很快地抓住其中的精髓,进入到矩阵算子理论的前沿.

李小青

美国纽约州立大学布法罗分校副教授

2012 年 12 月 25 日

目 录

一、矩阵的若干一般结果 /

矩阵的正则性的若干条件/3

对“关于半正定 Hermite 矩阵乘积迹的一个不等式”一文的
注记/13

奇异矩阵的一些性质/16

关联 G -函数的对角占优的一些推广/29

关于矩阵秩下界的注记/42

二、全纯映射与算子解析函数若干结果 /

关于 Hilbert 空间上算子解析函数的若干结果/51

Banach 代数中对谱半径的 Schwarz 引理/63

关于 von Neumann-Heinz 定理与樊熾定理的推广/69

对 C^n 的单位开球与广义上半平面的全纯映射的迭代/78

同一 Hilbert 空间之间全纯映射的迭代/87

Von Neumann, Heinz, 与 Ky Fan 定理及其推广结论的
简化证明/93

三、特殊矩阵及其应用, 有理插值问题 /

多项式零点定位基本定理的简化证明/103

关于矩阵惯性的若干基本定理/109

奇异 Hankel 矩阵/117

Bezout 和 Hankel 矩阵(II)——非奇异情形/120

通过 Vandermonde 矩阵的 Bezout 矩阵表示/130

关于 Loewner 矩阵的更多结果/137

Bezout 与 Hankel 矩阵乘积注记/168

数值情形的一般有理插值问题及其 Hankel 向量/182

广义块 Loewner 矩阵的求逆,最小部分实现与有理

矩阵插值问题/217

四、解析函数插值和矩量问题以及有关分析问题

完全不确定 Hamburger 矩阵矩量问题的有限阶解/261

对矩阵值函数的 Nevanlinna-Pick 插值问题与幂矩量

问题(II)/272

一般有理插值问题及其与 Nevanlinna-Pick 插值和幂矩量

问题的联系/285

对矩阵值函数的 Nevanlinna-Pick 插值问题与幂矩量问题/320

非退化与退化情形截断 Hamburger 矩阵矩量问题与矩阵

连分式/350

C_p 类中多重 Nevanlinna-Pick 矩阵插值与 Carathéodory

矩阵系数问题/391

在非退化与退化两种情形矩阵 Stieltjes 矩量问题的统一

求解/421

对亚纯函数的边界 Nevanlinna-Pick 插值/433

矩阵 Carathéodory 函数的极小 w -熵内插式与对应块 Pick

矩阵的极大行列式填充/445

对 Carathéodory 矩阵函数的矩阵 Carathéodory 问题与

Nevanlinna-Pick 型插值在非退化情形的极端解/485

附录

论文和著作目录/519

后记/527

Contents

I . General Results for Matrices /

- On Some Regularity Conditions for Matrices/3
Remarks on "A Trace Inequality on Product of Semipositive
Definite Hermite Matrices"/13
On Some Properties of Singular Matrices/16
Some Generalizations of Diagonal Dominance Associated
with G -functions/29
Note on Lower Bounds for the Rank of a Matrix/42

II . Holomorphic Maps and Analytic Functions of Operators

- Some Results on Analytic Functions for Operators of
Hilbert Spaces/51
Schwarz's Lemma for the Spectral Radius in Complex
Banach Algebras/63
The Generalizations of Theorems of von Neumann-Heinz,
and Ky Fan/69
Iteration for Holomorphic Maps of the Open Unit Ball and
the Generalized Upper Half-Plane of $\mathbf{C}^n$ /78
Iteration of Holomorphic Maps in Hilbert Spaces/87