SHUXUE

JIANMO

JIANGYI

数学建模讲义

梁　进　陈雄达　张华隆　项家梁◎编著

上海科学技术出版社

数学建模讲义

梁 进 陈雄达
张华隆 项家梁 编著

上海科学技术出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学建模讲义/梁进等编著. —上海：上海科学技术出版社，2014.1

ISBN 978-7-5478-1922-7

Ⅰ.①数… Ⅱ.①梁… Ⅲ.①数学模型 Ⅳ.①022

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第175902号

上海世纪出版股份有限公司
上 海 科 学 技 术 出 版 社 出版、发行
(上海钦州南路71号　邮政编码200235)
新华书店上海发行所经销
苏州望电印刷有限公司印刷
开本 787×1092　1/16　印张：11.5
字数：220千字
2014年1月第1版　2014年1月第1次印刷
ISBN 978-7-5478-1922-7/O·28
定价：38.00元

序

数学科学的产生与发展始终和解决诸如天文学、物理学、生物学、经济和管理中的实际问题紧密相连，互相促进，共同发展，推动着人类社会的不断前进。而数学建模正是用数学来解决各种实际问题的桥梁。数学模型(Mathematical Model)是用数学符号对一类实际问题或实际发生的现象的(近似的)描述；而数学建模(Mathematical Modeling)则是获得这种模型并对之求解、验证并得到结论的全过程。数学建模不仅是了解基本规律，而且从应用的观点来看，更重要的是有可能成为预测和控制所建模系统行为的强有力工具。概括而言，数学建模的关键步骤或难点就是：合理假设、数学问题和解释验证。

数学建模的思想和方法古已有之，大凡用数学去解决各种问题都要经由数学建模的途径。牛顿的万有引力理论就是最伟大数学建模的范例。然而，数学建模这个名词的普及和流行则是从20世纪下半世纪才开始的。其重要原因就是之前不能迅速、数值准确地求解出相应的数学问题。而20世纪下半世纪计算机、计算的速度和精度、计算方法和技术以及数学软件的迅速发展，为用数学建模的思想和方法去解决各种各样的实际问题创造了条件，这也对教育改革产生了极大的影响。将近20年前由美国科学院院士A. Friedman和J. Glimm领头编写的调研报告《新兴制造技术和管理实践中的数学和计算科学》[①]中正确地指出："一切科学和工程技术人员的教育必须包括数学和计算科学的更多的内容。数学建模和与之相伴的计算正在成为工程设计中的关键工具。科学家正日益依赖于计算方法，而且在选择正确的数学和计算方法以及解释结果的精度和可靠性方面必须具有足够的经验。对工程师和科学家的数学教育需要变革以反映这一新的现实。"在全世界大学生和研究生的数学建模方面的教学逐步开展。

在我国，一些有识之士早在20世纪80年代初就在一些大学里开始了数学建模的教学，并致力在全国推广。随着我国的大学生参加美国大学生数学建模竞赛以及1992年开始举行的由教育部高等教育司和中国工业与应用数学学会联合主办的全国大学生数学建模竞赛的深入开展，极大地推动了我国大学的数学教育改革，特别是数学建模和数学实验课程的建设和发展，出版了不少高水平的教材，为培养具有创新和竞争能力的大学毕业生

---

① Friedman A, Glimm J, Lavery J. The mathematical and computational sciences in emerging manufacturing technologies and management practices [R]. //SIAM Report on Issues in the Mathematical Sciences. SIAM, 1992: 62 - 63.

做出了巨大贡献。

由梁进教授等作者编著的本书是他们在同济大学数学建模课程的多年教学和辅导大学生参加美国和我国的大学生数学建模竞赛经验积累的基础上的总结。本书有许多值得我们仔细研究的优点。最重要的是本书紧紧抓住数学建模的全过程，而不是求全、求深，通过能够吸引大学生的实际问题的教学和学生的实践使学生真正掌握数学建模的思想和方法。本书语言叙述优美、通俗易懂，能使人在“享受”中学习到严格的数学推理及其解决实际问题的能力。本书不仅有许多重要的案例，更有资料查询、数据的收集和处理、数学软件应用简介、数学建模的评价和分析等内容。特别是有专门的一章讲述数学建模论文的写作和讲演，这种强调是非常值得称道的。就笔者自己的学习经验而言，自己认为看懂了的东西，当你要确切地写下来时往往会意识到自己有的地方没有弄懂，因而写不清楚，必须进一步仔细考虑。当你向他人报告，特别是受到质疑时，你往往又会感到还有没弄明白的地方，必须更深入地思考清楚来回答他人的质疑。这是一种真正全方位培养和提高学生能力的方法。笔者认为本书的出版必将对我国的数学建模教学做出新的贡献。同时也衷心祝愿梁进教授等同仁在今后的数学建模教学中取得更好的成绩。

叶其孝

2013 年 5 月于北京理工大学

前言

万事万物，自然的或社会的，都依循着某些规律或自行发展或相互影响，形成了我们这个丰富多彩的世界。为了尽可能准确并精确地刻画这些规律和相互关系，数学成为一个必然的工具。

所谓模型，就是指为了某个特定的目的将所要研究的实际对象（即原型）的一部分相关信息简缩、提炼、抽象出来而忽略其他特性所构成的原型的代替物。例如，玩具、照片、航模、沙盘等是实物模型，风洞、失重仓、人工地震装置等是物理模型，而地图、电路图、分子式则是符号模型。对同一个实际对象，为了不同目的和不同要求就会形成不同形式和不同层次的模型，甚至可以得到完全不同的模型。

数学模型不考虑研究对象的外在特性而注重其变化规律及其定量的描述方式。总之，数学模型是为一个特定的目的，对一个特定对象，在必要的假定下，运用适当的数学工具，根据其内在规律和相关关系，所得到的数学结构。

建立数学模型的全过程就称为数学建模。也就是说，数学建模就是应用数学工具来分析各种关系并建立研究对象的内在规律模型，并进行推演和计算，然后用得到的结果回答原来问题的过程。从而以此深入了解这些研究对象，并制定最佳方案，合理规划管理、优化操作程序、控制各种风险、预测未来动态等。

数学建模在中国自古既有。自古就有传说伏羲画八卦，在《太平御览》中记载："伏羲坐于方坛之上，听八方之气，乃画八卦。"《易》中也记载："古者包牺氏之王天下也，仰则观象于天，俯则观法于地，观鸟兽之文与地之宜，近取诸身，远取诸物，于是始作八卦，以通神明之德，以类万物之情。"这段文字也描述了伏羲（即包牺）为大自然建模的过程：他上观天文，下察地理，研究生物的习性和与之适宜的环境，收集远近各种物证，从而创造了八卦，以宣扬神明之功德，以解释自然之规律（图 0－1）。

图 0－1

太极八卦恐怕就是我们最早的数学模型了。

图0-2就是一个太极八卦图，它表示了一套有象征意义的符号及其之间的关系。图中的中圈乃“太极”，黑白部分鱼形为“两仪”，用“—”代表阳，用“--”代表阴，用三个这样的符号组成八种形式，即图中八边形之边上的三叠线段就是“八卦”。其中上下左右四卦的内层两线段称作“四象”。《易传》书中写道：“是故易有太极，是生两仪；两仪生四象；四象生八卦。”这种分割数学意味已很浓，但隐含的哲学思想更深奥。图形中太极中两仪的相互依存、相互渗透也反映古人对自然、对宇宙的理念。八卦中每一卦形代表一定的事物。乾代表天，坤代表地，坎代表水，离代表火，震代表雷，艮代表山，巽代表风，兑代表沼泽。八卦又代表其他象征如东、东南、南、西南、西、西北、北、东北八个方位。而乾坤有代表天地、男女、阳阴、正负等意象，用形象的八卦解释万物反映出古人对大自然的抽象和理解。虽然比较质朴而含蓄，但这个模型影响深远，至今在我们的生活中仍有其不可动摇的地位。

图0-2

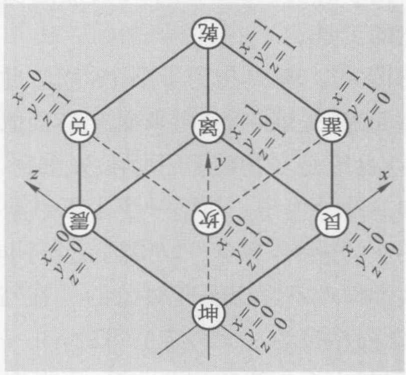

图0-3

今天我们还可以以解析几何的观点来审视八卦：以八卦为顶点边长为1的正方体，用阳爻“—”表示单位1的坐标，代表有；用阴爻“--”表示0的坐标，代表无。则正方体八个顶点的立体坐标与八卦对应如下：乾(1，1，1)，兑(0，1，1)，离(1，0，1)，巽(1，1，0)，坤(0，0，0)，震(0，0，1)，坎(0，1，0)，艮(1，0，0)(图0-3)。不仅八卦，古代的《周易》《周髀算经》和《九章算术》等名著中也包含许多古人数学建模的思想和论题。

从科研的角度上来讲，数学建模的历史也由来已久，人们应用数学去探索事物发展的规律几乎伴随着科学研究同时诞生、同时发展。数学最早在天文学和物理学研究中大显身手。很多数学分支都是从人们周围现象的研究中发展而来。随后又在各个理科学科，如化学、生物学和计算机学中发展。随着人们对定量分析的要求越来越高，数学也越来越深地渗透到传统的文科学科，如经济学、管理学和社会学等。如今，众多传统的领域里，数学建模的应用越来越完善，在高新技术等前沿领域，数学建模扮演着不可或缺的角色。同时数学建模在许多新兴领域迅速地开拓了一批处女地。在一些重大问题如人口问题、污染问题等则必须通过数学建模去评估、去决策。

其实，从小学到大学，我们已碰到过各种各样的建模问题(图0-4)。小学中的应用题就是建模的雏形。而中学里的代数的实际起源恐怕就是最简单的建模。只不过在小学中

学遇到的这种类型的建模题，已作了高度抽象，有了假定，条件限制得很严格，所以其答案和方法也都早已定下。但同时这些经验也给了我们一个错觉，从数学问题正确答案的唯一性来误以为数学建模也有标准答案。而事实上，实际的数学建模没有唯一答案，是开放性的。

图 0-4

由于建模对象是一个客观实体，而建模过程是一个认识、探索和刻画这个客观实体的主观过程。既然建模是主观的，我们所建的模型在反映的客观实体上就有局限性。这个局限性，一方面受制于我们对建模对象的抽象，另一方面受制于我们对建模对象的了解，还要受制于我们本身的数学知识水平。所以，建模是一个复杂的渐进过程，同样的实际问题所建立的模型可能会因地而异、因时而异、因人而异所以数学建模不同于简单地解一道数学问题那样会有一个标准答案，而是完全不同的答案却各有道理，因此它们不再有对错之分而只有优劣之别。这样，数学建模就不同于传统的数学，就会需要对各种结果进行评价。所以，数学建模不是一门纯理科课程，而是一个融进了许多文科元素和特点，甚至是可能含有艺术成分的一门特殊理科课程。

随着社会和科技的进步，数学的方法越来越被广泛地应用到各个领域，并渗透到其方方面面。当我们的学生走上社会，从事各种工作，分析问题和解决问题的能力大小将决定其在工作岗位上的贡献程度。数学建模对学生提高这方面的能力将有重要帮助。

为更好地引进建模，我们先看一个简单的例子。

【问题 0-1】 如图 0-5 所示，一个有四条腿的凳子能否在地上放稳？

这个问题是一个实际问题。由经验，三条腿的凳子肯定能放稳。而四条腿的凳子有时不稳。当凳子不稳时，略微调整一下位置就可以将凳子放稳。但我们想知道的是，凳子不同，地面不同，这个能使凳子站稳的位置是否一定存在？这个问题就不能由经验来回答。而我们如果建一个数学模型，就可以在合理的假定下用数学来

图 0-5

严格、准确地回答这个问题。

【假定】

(1) 凳子的四条腿等长并且四只脚正好位于一个正方形的四个顶点上。

(2) 地面是一张连续变化的曲面。

(3) 在任一时刻，凳子至少有三只脚落地。

【建模】 由假定(1)，设凳子的四条腿位于点 A, B, C, D，其连线构成一正方形，对角线的交点为坐标原点，设初始时刻对角线 AC, BD 落在坐标轴上，建立坐标系统如图 0-6 所示。挪动凳子的方式为以坐标原点为中心旋转，转过的角度记为 θ。

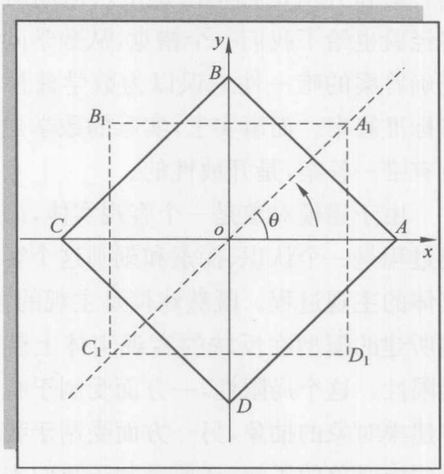

图 0-6

设 $f(\theta)$ 为 A, C 两点凳子的脚离开地面的距离之和，$g(\theta)$ 为 B, D 两点的凳子的脚离开地面的距离之和。则由假定(3)得

$$f(\theta)\cdot g(\theta)=0,\ \text{对于任意的}\ \theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right].$$

由假定(2)，函数 $f(\theta)$ 和 $g(\theta)$ 非负并在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上连续，并且凳子的四脚同时落地意味着 $f(\theta)=g(\theta)=0$，故不妨假设初始状态 $f(0)=0$, $g(0)>0$。当旋转 $\frac{\pi}{2}$ 角度后，两个函数的值互换了，即 $g\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)>0$。这样问题转换为能否找到 $\theta_0\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 使得 $f(\theta_0)=g(\theta_0)=0$。

【解模】 令 $h(\theta)=f(\theta)-g(\theta)$，则 $h(\theta)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上连续，且

$$h(0)=f(0)-g(0)<0,\ h\left(\frac{\pi}{2}\right)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)-g\left(\frac{\pi}{2}\right)>0.$$

由闭区间连续函数的零点定理知，存在 $\theta_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 使得 $h(\theta_0)=0$。由假定(3) $f(\theta_0)=0$ 或 $g(\theta_0)=0$，所以 $h(\theta_0)=0$ 意味着 $f(\theta_0)=g(\theta_0)=0$。这就是说，在问题的假定下，凳子总可以找到一个合适的地方放稳。建模的过程还给出了将凳子放稳的具体方法。

【思考】 读者可以考虑怎样用上面例子所使用的方法去解决长方形凳子的放稳问题，或进一步考虑凳子的四条腿为其他形状的放稳问题。

从上面的例子可以看出，对于一个有基本数学素养的读者来说，一旦模型建起来，解模型过程并不复杂。问题是怎么想到把稳不稳和一个数学式子挂起钩来，而这就是我们

数学建模的核心问题所在。一旦这个问题解决了，数学建模可以很明确地回答我们实际问题中的疑问，还可以进一步对其中的关系给出定量的解。

如上可看出，学习数学建模，建模的思想是关键。通过这门课的学习，我们要学会融会贯通地应用所学到的各种思想和方法，灵活地举一反三地去解决更多的问题。简单地说，学习本课程，不只是多学几种方法，更重要的是如何想到用什么方法去解决问题。古人郑板桥对画竹独有心得："江馆清秋，晨起看竹，烟光、日影、露气，皆浮动于疏枝密叶之间。胸中勃勃，遂有画意。其实胸中之竹，并不是眼中之竹也。因而磨墨、展纸、落笔，倏作变相，手中之竹，又不是胸中之竹也。"这种从"眼中之竹"到"胸中之竹"，再到"手中之竹"，即看竹、思竹至画竹的过程颇似我们的建模过程。这里真正的竹子是我们研究建模的客体，胸中的竹子就是我们抽象了的对象，而画中的竹子就是我们建模的结果。而这个过程就是从客观对象到思考分析，再到建模论文的全过程，我们可以从古人的经验中得以领悟建模的精髓。

本书是一本教材，适用于有一定的数学理念和基础，并能应用网络和计算机软件包(如Matlab)的大学生。希望通过本课程的学习，学生可以理解如何去分析和研究一个实际问题，并最大限度地应用自己的数学知识去摸清其规律，建立相应的数学结构，推演计算出结果，并用这些结果回答实际问题。本书尽量选用实际问题作为例子，并结合数学建模竞赛的要求。希望学生们使用这本教材学完数学建模课程后，就可以为今后进一步的学习打下基础，从而为今后在工作中解决实际问题做好准备，又能对在校期间参加数学建模竞赛有所帮助。

对于教学者来说，作为一本教材，由于数学建模的特点，本书前后的相依关系并不是很严格，加"*"部分的内容比较难，可以考虑选修。所以教学者可以根据学生的实际情况对教程进行排列和增减。一般来说，这本教材适合每周2～3学时。书中附有大量习题，这些习题很多都是开放性的题目，并没有标准答案，但一般可以根据所在章的方法得到问题的解。教学者应该引导学生进一步思考讨论，在更合理的范围里找到问题的解决方案。

本书主要分为两篇。现在这第一部分的内容是全书的前言，介绍了数学建模的意义、背景、基本概念和应用范围等要素，并介绍了一个典型的数学建模实例。下面的第1篇是本书的主要部分，在这部分分别讲述了数学建模中的几种基本方法。考虑到教学对象的知识结构和教学时间的有限性，本书并不追求介绍所有的方法，而只选用典型的有代表性的又不超出学生可接受范围的方法。书中附有很多参考程序，如果没有另加说明，都是Matlab程序。最后，作为辅助内容，在第2篇介绍如何较好完成数学建模全过程所要遇到的各项任务。读者可通过阅读这部分内容，了解完成一篇数学建模论文的全过程，并为今后进一步科研和其他工作做好准备。本书的第1篇是本书的主体，通过这部分的学习，使学生掌握数学建模的基本思想和方法。本书的第2篇虽然是数学建模的辅助部分，但也很重要，这部分内容教会学生如何将自己的思想、结果和方法表达出来，使他们如虎添翼。

数学建模的学习不止在课堂上完成，学生还需要通过社会实践、建模竞赛以及以后的工作中不断应用、不断进步。从这个意义上说，本书只是学生进行数学建模的敲门砖和引路石。

本书作者感谢杨筱菡老师为本书写统计软件简介，感谢王佳艺为本书提供漫画插图。

目 录

第1篇 数学建模的方法

第 2 篇　数学建模的相关问题

第1篇 数学建模的方法

该部分内容是本书的主要内容。根据数学建模不同的典型方法和类别分为不同的章节。我们在这里不对这些数学方法的原理进行严密的推导，而把注意力着重放在介绍怎样用这些方法去建立和计算模型。读者如果对某些方法的原理感兴趣，可以参阅相关的参考书。由于数学建模的方法几乎涵盖了应用数学的各个分支，我们在有限的篇幅内也不可能对所有的方法都一一涉及，但会列出其中几种常用的和有代表性的方法。

数学建模是一门极强的面对对象的学科，而对象问题是来源五花八门，形式多种多样的。该学科中，问题本身更为重要，而采用什么方法是相对次要的。也就是说，为了能解决问题，你尽可以八仙过海，各显神通，有什么奇门遁甲都可以使出来。这就好像研究理论和学习方法就是内修功外练武。理论的修养体现了内功的强弱，方法的掌握反映了武艺的高低。而当你面对一个复杂的问题时，就好像面对一个身手不凡的敌人，你需要调动你所有的功夫和修为去对付它，目的只有一个，那就是战胜它。建模的这些特点决定了这门课的逻辑性不是很强，所以这部分的前后关联不是很大。读者可以根据自己的爱好调整阅读次序。我们这部分的安排是从方法上入手，各章介绍不同的方法，让建模的思想通过各种例子在这些方法上予以表现。

建模的一个基本思想是先找到问题的一个突破点入手，再由简入繁。对于一个复杂的建模对象，模型不大可能一步到位。我们先考虑某些最主要的因素，让其他因素都假定为最特殊的情形，然后对这些主要因素建模。如果解模的结果不能通过模型检验，则返回到模型假设，看看什么重要因素被简化了，然后调整假定，再把更多因素考虑进来。这时的模型自然比原先的模型来得复杂，但会比它更接近实际。有了前一步的工作，再解模时困难就会被分散。反复这个过程，就会慢慢改善模型。这部分第5章提到的传染病模型的建模过程就是一个很好的实例。

由于不同的方法有不同的适用范围，于是对同一个建模论题，用不同的方法可能得到不同的结果。又由于不同的繁简假设，结果的层次也深浅不一。这就带来了一个建模成果评价的问题。怎样评价一个数学模型或一篇数学建模文章，我们将放到本书的第2篇讨论。但解模方法的不唯一带来了按方法分类的不完善之处。有些例子，实际上是应用了多种方法，所以文中的分类并不是非常严格的。然而，如前所述，希望读者不要拘泥于具体的方法和例子，而更注重的是从方法和例子中学到建模的思想。

在本篇的各章中，我们先简单介绍了该章所介绍的方法本身，然后通过具体的例子对用这种方法建模进行介绍。希望读者在通过具体的实例学习，能掌握这些方法和其使用的范围并能举一反三去解决更多的问题。每章后面都附有大量习题供读者练习。

第 1 章　初等模型

初等模型一般指那些只涉及一些简单数学工具的数学模型，但并没有严格的定义。我们通过一些具体的例子来说明。在数学模型中，初等模型由于其易懂性，从而易推广，所以初等模型也有其独特的魅力。

1.1　微积分方法寻求最优点

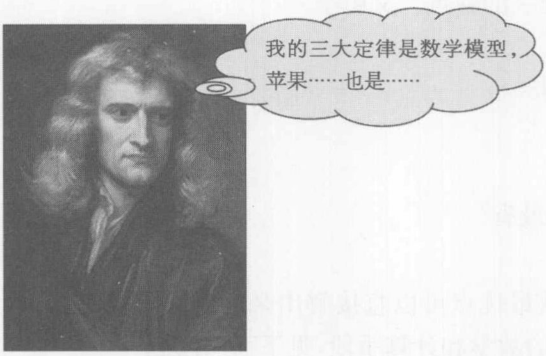

图 1-1

微积分的基础是极限和无穷的思想。微分就是无限细分，积分就是无限求和。它是用一种运动的眼光看待问题。

微积分的概念可以追溯到古代。到了 17 世纪后半叶，牛顿（Isaac Newton，1643—1727）（图 1-1）和莱布尼茨（Gottfried Wilhelm Leibniz，1646—1716）在许多数学家准备工作的基础上，独立地建立了微积分学。直到 19 世纪，这门学科才得以严密化。

某些实际问题可以通过高等数学中的微积分理论来解决，请看下面的几个问题。

【问题 1-1】 铁路线上 AB 段的距离为 100 km，工厂 C 距 A 处 20 km，并且 AC 垂直于 AB（图 1-2）。为了运输需要，要在 AB 线上选一点 D 向工厂修筑一条公路。已知铁路每千米货运的运费与公路每千米货运的运费之比为 3∶5。为了使货物从供应站 B 运到工厂 C 的运费最省，问 D 点应选在何处？

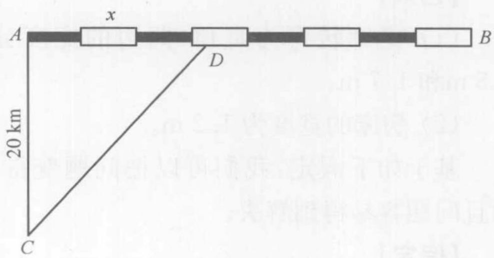

图 1-2

【已知】

(1) $AB = 100$ km，$AC = 20$ km。

(2) 铁路每千米货运的运费与公路每千米货运的运费之比为 3∶5。

【假定】

(1) $AD = x$ km，则 $DB = 100 - x$，$CD = \sqrt{20^2 + x^2} = \sqrt{400 + x^2}$。

(2) 取正常数 k 为比例因子，铁路上每千米货运的运费为 $3k$，公路上每千米货运的运费为 $5k$。

(3) AB 间任意点到 C 都可以直线修路。

【建模】 如果从 B 点到 C 点需要的总运费为 y，则

$$\begin{aligned} y &= 5k \cdot CD + 3k \cdot DB \\ &= 5k\sqrt{400 + x^2} + 3k(100 - x),\ 0 \leqslant x \leqslant 100, \end{aligned}$$

于是问题就归结为求函数 y 在闭区间 $[0, 100]$ 上的最小值点。

【解模】 利用微积分方法，可先求 y 对 x 的导数：

$$y' = k\left[\frac{5x}{\sqrt{400 + x^2}} - 3\right],$$

得 $x = 15$ 是函数 y 在区间 $(0, 100)$ 内唯一的驻点。又由于

$$y\big|_{x=0} = 400k,\quad y\big|_{x=15} = 380k,\quad y\big|_{x=100} = 500k\sqrt{1 + \frac{1}{25}},$$

其中以 $y\big|_{x=15} = 380k$ 为最小。

【结论】 当 $AD = 15$ km 时，总运费最省。

问题 1-1 是一个比较简单的例子，其最优点可以直接解出来。但很多情况，最优点不能直接解出来，这就需要我们应用更多的数学和计算手段，见下面的问题。

【问题 1-2】 某医院有一直角拐角走廊(图 1-3)。已知该拐角走廊两边各宽 1.5 m 和 1.7 m。医院需要订购一批宽 1.2 m 的病床，问能通过该走廊的病床最长不能超过多少米？

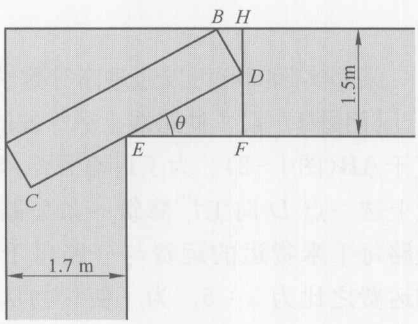

图 1-3

【已知】

(1) 走廊转弯为直角，两边的宽度分别为 1.5 m和 1.7 m。

(2) 病床的宽度为 1.2 m。

基于如下假定，我们可以把问题变得简单，而且问题容易得到解决。

【假定】

(1) 不考虑病床之上或边上的医疗设备，走廊的高度足够让病床及相应设备通过。