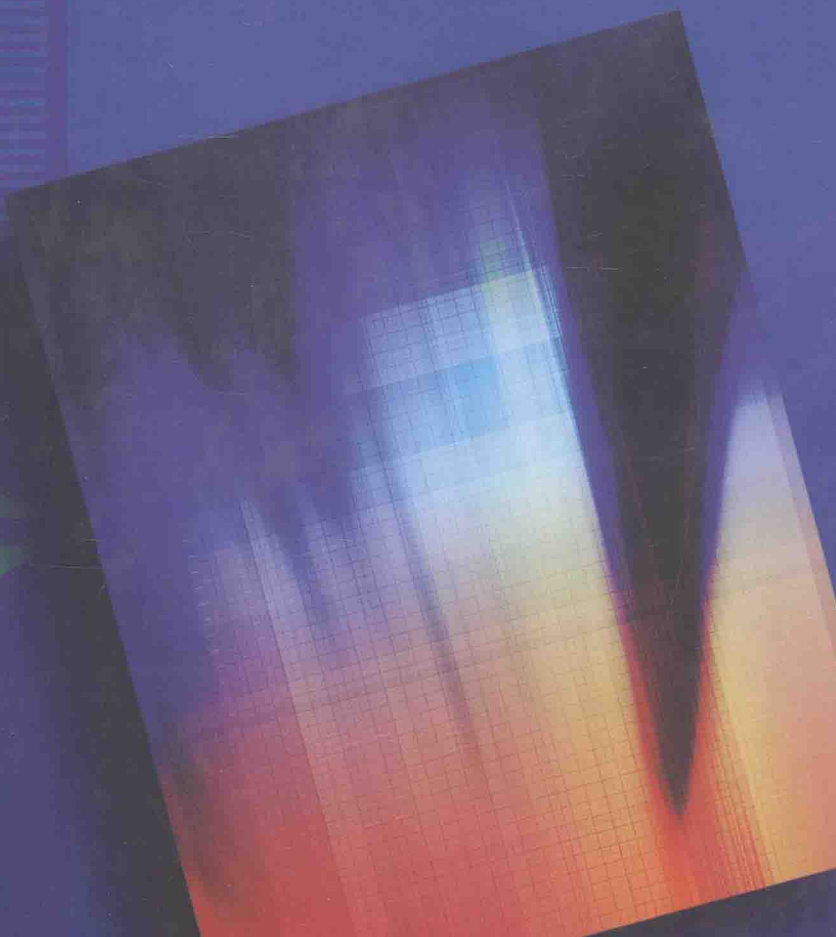
光学原理教程

GXYLJC

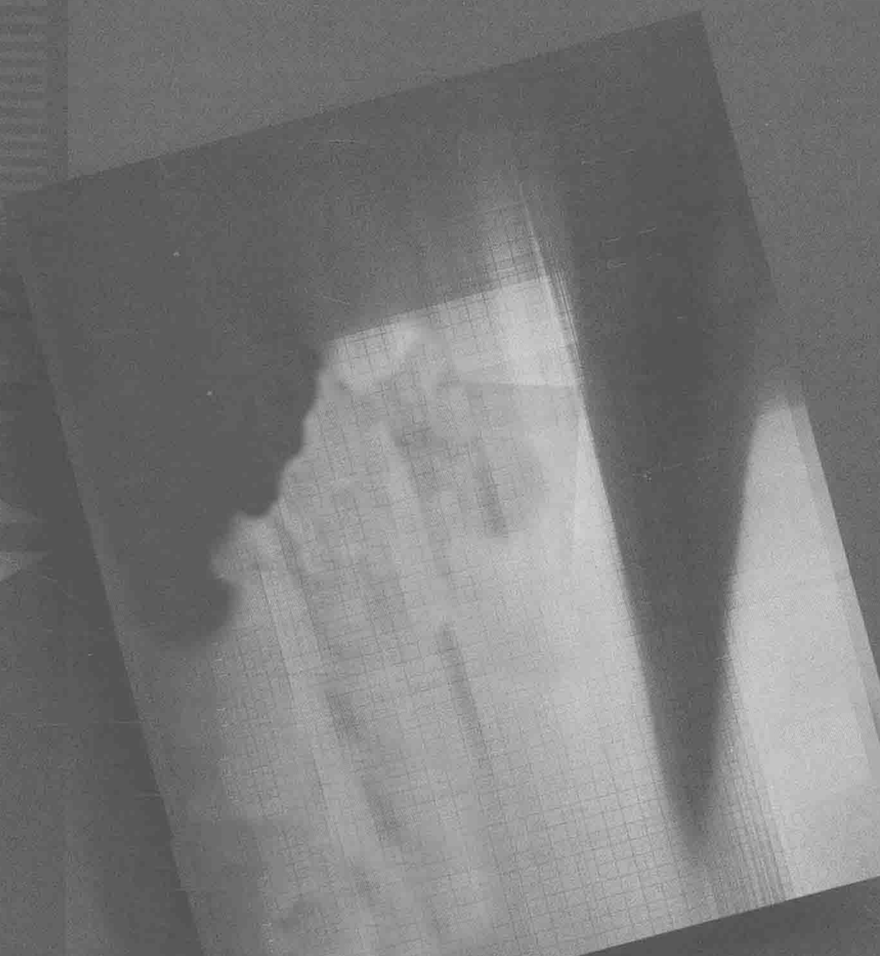


戴 瑞 李金环 唐伟国 主编

东北师范大学出版社

光学原理教程

戴 瑞 李金环 唐伟国 主编



东北师范大学出版社

□责任编辑:付　好
□责任校对:张　曼
□封面设计:李冰彬
□责任印制:张允豪

图书在版编目(CIP)数据

光学原理教程/戴瑞,李金环,唐伟国主编.—长春:东北师范大学出版社,2011.12
ISBN 978-7-5602-7606-9

Ⅰ.①光…　Ⅱ.①戴…　②李…　③唐…　Ⅲ.①光学—高等师范院校—教材　Ⅳ.①043

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第254104号

东北师范大学出版社出版发行
长春净月经济开发区金宝街118号(邮政编码:130117)
电话:0431—85687213
传真:0431—85691969
网址:http://www.nenup.com
电子函件:sdcbs@mail.jl.cn

东北师范大学出版社激光照排中心制版
吉林省良原印业有限公司印制
长春净月经济开发区小合台工业五区(邮政编码:130117)
2011年12月第1版　2011年12月第1次印刷

幅面尺寸:170 mm×227 mm　印张:12.25　字数:200千

定价:28.50元

前　言

本书为高等师范院校光学专业硕士研究生课程光学原理的教材，也可供从事基础光学教学的人员参考。

本书只涉及光的电磁理论，研究讨论基础光学。19 世纪中期，麦克斯韦建立经典电磁理论，指出光也是一种电磁波，由此产生了光的电磁理论，推动了光学的发展。激光问世后，光学又有很大的发展。但是，在光学领域遇到的大部分现象和技术，利用光的电磁理论都可得到很好的解释。况且，从光的电磁理论出发可使基础光学知识更具有统一性、完整性和条理性，并提供更扎实的理论基础和深刻、全面的认识，对光学的研究方法有进一步的理解。

本书共有七章。第一章光的电磁理论，从麦克斯韦方程组和物质方程出发，导出波动方程作为理论基础，求解出波动方程在均匀各向同性介质中的平面波和球面波解，重点讨论了在两种介质界面的反射、折射和全反射。第二章偏振，给出了偏振光的四种数学表述，并讨论了描述偏振元件作用的矩阵表示。第三章衍射，首先导出了各种形式的衍射计算公式，并由此较严格地计算各种孔的菲涅耳衍射和夫琅禾费衍射，还讨论了三维衍射图像和边界衍射波。第四章干涉，导出了偏振光干涉公式，重点讨论了平面板的干涉及条纹的定域，对光场的相干性进行了详尽的讨论。第五章几何光学，从光的波动方程导出几何光学的各基本原理和基本方程，讨论光线传播的一般特性，用拉格朗日表述和哈密顿表述类比力学理论，并用于讨论高斯光学。第六章金属光学，为光在吸收介质中的传播，用相应的波动方程和光波讨论金属面的强吸收和强反射，给出金属光学常数的测定方法和相应的电磁理论。第七章晶体光学，为光在各向异性介质中的传播，引入介电张量和主介电坐标系，讨论了不同方向的单色平面波的传播速度和振动方向。

M. 波恩和E. 沃耳夫所著《光学原理》是光学的权威著作，作为同类讲原理的教材，本书编者结合从事教学的经验和体会，为对基础光学原理的认识提高一个层次，有助于基础光学的教学和研究的提高，并为后续课程提供基础，编写了适宜教和学的讲义。各章后附有习题，有助于对理论的理解。

戴瑞和李金环对唐伟国老师早年在北京师范大学编写的讲义进行了大量的修改和补充，并由戴瑞试讲和定稿。因编者水平所限，难免有不足、不妥和错误之处，敬请读者给予批评指正。

编　者

2011年5月

目　　录

第一章　光的电磁理论

19 世纪 60 年代，麦克斯韦总结了电磁学方面的研究成果，建立经典的电磁理论。电磁理论预言了电磁波的存在，其传播速度等于光的速度，由此推知光也是一种电磁波，并产生了光的电磁理论。光的电磁理论推动了光学的发展，虽然许多光学现象要用量子理论来解释，但是，光的电磁理论仍是光学的基本理论，在现代光学中起着重要的作用。本章将简要地介绍光的电磁理论，导出光波的基本性质，并用它来处理光的反射和折射现象。

§1.1　电磁场的基本规律

1.1.1　麦克斯韦方程组

电磁场的普遍理论总结为麦克斯韦方程组，其微分形式如下

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\partial \boldsymbol{B}/\partial t \tag{1-1-1}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = -\partial \boldsymbol{D}/\partial t + \boldsymbol{j} \tag{1-1-2}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho \tag{1-1-3}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{1-1-4}$$

式中 $\boldsymbol{E}$ 为电场强度矢量，又称电矢量和光矢量，$\boldsymbol{B}$为磁感应强度矢量，$\boldsymbol{H}$为磁场强度矢量，$\boldsymbol{D}$为电位移矢量，$\boldsymbol{j}$为电流密度矢量，ρ 为场中自由电荷密度。方程组描述了场中某一点各场矢量随时间和空间的变化关系，以及它们之间的相互关系。

1.1.2　各向同性介质的物质方程

给定 $\boldsymbol{j}$ 和 ρ 的分布，还不能用麦克斯韦方程组来确定各场矢量，因为

构成物质的带电粒子在场的作用下会发生变化，这些变化又会反过来影响场的分布。为此，需要补充物质方程，它们反映在场的影响作用下物质的特性。一般情况下，物质方程极为复杂。如果物体各部分之间相对静止或运动非常缓慢，物质又是各向同性的，这时物质方程的形式较为简单，为

$$\boldsymbol{j} = \sigma \boldsymbol{E} \tag{1-1-5}$$

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E} \tag{1-1-6}$$

$$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H} \tag{1-1-7}$$

式中 σ 为电导率，ε 为介电常数，μ 为磁导率。而 $\varepsilon=\varepsilon_0\varepsilon_r$，$\varepsilon_0$ 是真空介电常数，ε_r 为相对介电常数；又有 $\mu=\mu_0\mu_r$，μ_0 是真空的磁导率，μ_r 是相对磁导率。

本章仅讨论光波在透明的、非铁磁性物质中的传播，此时可认为 $\sigma=0$，由式(1-1-5)可知空间各处的$\boldsymbol{j}$亦为零。非铁磁性物质的 μ_r 可认为等于 1，即 $\mu=\mu_0$。若介质的 $\sigma\neq 0$，即介质具有导电性，是导体或半导体，这种介质对电磁波有吸收，它们的物质方程不同于以上各式，将在晶体光学中予以讨论。

1.1.3 波动方程

当光在无限大均匀介质中传播，而且光所在的区域远离光源，区域中不存在自由电荷和传导电流。在这种情况下，均匀意味着 ε 和 μ 为常数，不存在自由电荷和传导电流，即有 $\rho=0$ 和$\boldsymbol{j}=0$。再把物质方程代入麦克斯韦方程组，麦克斯韦方程组可简化为

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\mu(\partial \boldsymbol{H}/\partial t) \tag{1-1-8}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \varepsilon(\partial \boldsymbol{E}/\partial t) \tag{1-1-9}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0 \tag{1-1-10}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{H} = 0 \tag{1-1-11}$$

从上列麦克斯韦方程组出发，通过消元法可得到仅含电矢量 $\boldsymbol{E}$ 的微分方程，这就是波动方程。取式(1-1-8)的旋度，并将式(1-1-9)代入可得

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{E}) = -\mu \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \boldsymbol{H}) = -\mu\varepsilon \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} \tag{1-1-12}$$

根据矢量分析公式，左边为

$$\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{E}) - \nabla^2 \boldsymbol{E}^2$$

根据式(1-1-10)，式(1-1-12)可化为

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2}-\frac{1}{\mu\varepsilon}\nabla^2\boldsymbol{E}=0 \tag{1-1-13}$$

这就是波动方程。对于$\boldsymbol{H}$,同时可以得到

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial t^2}-\frac{1}{\mu\varepsilon}\nabla^2\boldsymbol{H}=0 \tag{1-1-14}$$

上式也可称作波动方程。波动方程表明:电场和磁场可以波的形式在介质中传播,传播速度为 $v=1/\sqrt{\mu\varepsilon}$。根据电磁学讨论可知,在真空中 $\mu=\mu_0=4\pi\times10^{-7}\mathrm{N}\cdot\mathrm{s}^2/\mathrm{C}^2$,$\varepsilon=\varepsilon_0=8.854\ 2\times10^{-12}\mathrm{C}^2/\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2$,于是可以计算出光在真空中的传播速度为 $c=1/\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}=2.997\ 94\times10^8\ \mathrm{m/s}$。实验测定的真空光速为 $2.997\ 94\times10^8\ \mathrm{m/s}\pm1.1\ \mathrm{m/s}$。理论值和实验值非常接近,这是光的电磁波说的重要依据。

1.1.4 电磁场的能量定律

电磁波的传播也伴随着能量的传播,能量传播遵从能量定律。我们讨论在各向同性的均匀介质中,无自由电荷和传导电流的区域内的能量传播,即从式(1-1-8)～(1-1-11)出发进行讨论。

用 $\boldsymbol{E}$ 点乘式(1-1-9),用$\boldsymbol{H}$点乘式(1-1-8),两式相减得

$$\boldsymbol{E}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{H})-\boldsymbol{H}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{E})=\varepsilon\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}+\mu\boldsymbol{H}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t} \tag{1-1-15}$$

根据矢量分析公式,上式左边等于$-\nabla\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})$,而上式右边第一项为

$$\varepsilon\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}=\boldsymbol{D}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}\right)=\frac{\partial w_e}{\partial t}$$

式中 $w_e=\left(\frac{1}{2}\right)\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}=\varepsilon E^2/2$,为电能密度,而式(1-1-15)右边第二项可化为$\partial w_m/\partial t$,$w_m=\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B}/2=\mu H^2/2$,为磁能密度,$w=w_e+w_m$ 为能量密度,因此,式(1-1-15)可写成

$$-\nabla\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})=\frac{\partial w_e}{\partial t}+\frac{\partial w_m}{\partial t}$$

把上式对任意体积元 V 积分,可得

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V(w_e+w_m)\mathrm{d}V=-\int_V\nabla\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})\mathrm{d}V=-\int_S(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})\cdot\mathrm{d}S \tag{1-1-16}$$

式(1-1-16)中,利用了高斯定理把体积分化为面积分,S 是包围体元 V 的界面。式(1-1-16)左边积分为 V 内能量,对 t 求导为体元内能量随时间的变化率,等于 $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$通过体元界面的通量,这就是能量定律。$\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$的方

向为能量传播的方向，而它的数值则为单位时间内通过垂直于能量传播方向的单位面积面元之能量，因此可称它为能流密度矢量，记为

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H} \tag{1-1-17}$$

又称它为坡印廷矢量。光的强度即光强是涉及光的能量传播的物理量，是通过能流密度矢量来定义的。

§1.2 标　量　波

上节表明：在均匀各向同性的介质中，无自由电荷和电流的区域内，电矢量和磁矢量的每一个分量都满足齐次波动方程。用 V 表示任一分量，它应满足

$$\nabla^2 V - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0 \tag{1-2-1}$$

它的解就是标量波，其中最简单的为平面波和球面波。本节将讨论它们的表示式和特点。

1.2.1　平面波

令 $\boldsymbol{r}(x,y,z)$ 为空间某一点 P 的位置矢量，$\boldsymbol{s}(s_x,s_y,s_z)$ 为某一固定方向上的单位矢量。若在各个时刻，与$\boldsymbol{s}$垂直的各个平面内，V 是一常数，这种满足方程(1-2-1)的解，称作平面波。

首先，这种解应具有的形式为 $V=V(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{s},t)$。如图 1.1 所示，平面 A 与$\boldsymbol{s}$垂直，A 上的一点 P 的位置矢量为 $\boldsymbol{r}$，$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{s}$就是 $\boldsymbol{r}$ 在$\boldsymbol{s}$方向的投影，等于原点 O 到$\boldsymbol{s}$与平面 A 的交点之间的距离$\overline{OQ}$，因此对这个平面上的各点，均有 $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{s}=\overline{OQ}$，于是 V 值相同。

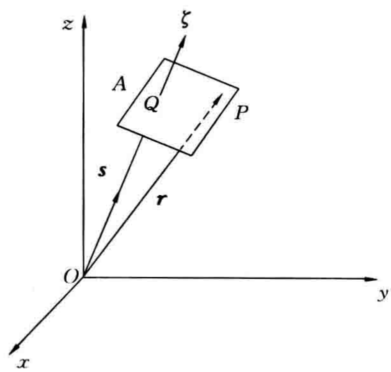


图 1.1

其次，为满足方程(1-2-1)，可导出对解的形式的进一步要求。为讨论方便，建立一个新坐标(ξ,η,ζ)，其坐标轴 $O\zeta$ 与$\boldsymbol{s}$的方向一致。在这个坐标系中 $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{s}=\zeta$，因此 $V=V(\zeta,t)$。并且

$$\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial \xi}+\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial \eta}+\frac{\partial \zeta}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial \zeta}=s_x\frac{\partial V}{\partial \zeta}$$

由于 V 只与 ζ 有关，所以 $\frac{\partial V}{\partial \xi}$，$\frac{\partial V}{\partial \eta}$ 均为 0，而 $\zeta=\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{s}$，所以 $\frac{\partial \zeta}{\partial x}=s_x$，即有 $\frac{\partial V}{\partial x}=s_x\frac{\partial V}{\partial \zeta}$，同理可推出

$$\frac{\partial V}{\partial y}=s_y\frac{\partial V}{\partial \zeta},\frac{\partial V}{\partial z}=s_z\frac{\partial V}{\partial \zeta}$$

进一步可求出

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=s_x{}^2\frac{\partial^2 V}{\partial \zeta^2},\quad \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=s_y{}^2\frac{\partial^2 V}{\partial \zeta^2},\quad \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=s_z{}^2\frac{\partial^2 V}{\partial \zeta^2}$$

考虑到 $\boldsymbol{s}$ 是单位矢量，满足 $s_x{}^2+s_y{}^2+s_x{}^2=1$，在 (ξ,η,ζ) 坐标系中，方程(1-2-1)可变为

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}-v^2\frac{\partial^2 V}{\partial \zeta^2}=0 \tag{1-2-2}$$

再作变量变换，引入新变量

$$p=\zeta-vt,q=\zeta+vt$$

则式(1-2-2)变为

$$\frac{\partial^2 V}{\partial p\partial q}=0 \tag{1-2-3}$$

对 p 积分应为与 p 无关的常数，但可以是 q 的函数，即有

$$\frac{\partial V}{\partial q}=V_1{}'(q) \tag{1-2-4}$$

上式中 $V_1{}'(q)$ 为 q 的任意函数 $V_1(q)$ 的导数，上式再对 q 积分

$$\begin{aligned} V&=\int V_1{}'(q)\mathrm{d}q+V_2(p)=V_1(q)+V_2(p) \\ &=V_1(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{s}+vt)+V_2(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{s}-vt) \end{aligned} \tag{1-2-5}$$

式(1-2-5)是方程(1-2-1)的普遍解，V_1 和 V_2 是任意函数，只要求变量以 $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{s}+vt$ 或 $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{s}-vt$ 的形式出现，就是方程(1-2-1)的平面波解。

V_2 代表沿 ζ 轴正向以速度 v 传播的平面波。垂直于 $O\zeta$ 轴的某一等值平面，若 t 时刻与 $O\zeta$ 轴的交点坐标为 ζ，平面上的 V 值为 $V_2(\zeta-vt)$，而在 $t+\tau$ 时刻，这一等值面与 $O\zeta$ 轴垂直且与轴的交点坐标为 $\zeta'+vt$ 的平面，其 V 值相同，即

$$V_2[\zeta'+v\tau-v(t+\tau)]=V_2(\zeta-vt)$$

可求出 $\zeta'=\zeta+vt$，这表明 t 时刻的这个等值面，经过时间 τ 沿着 ζ 轴正向

即$\boldsymbol{s}$方向以速度 v 向前传播了 $v\tau$，称与等值面垂直的$\boldsymbol{s}$为平面波的传播方向。同样分析可知，V_1是沿着 ζ 轴负向以速度 v 传播的平面波。

光学中常见的是单色简谐平面波

$$V(\boldsymbol{r},t)=a\cos\left[\omega\left(t-\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{s}}{v}\right)+\delta\right]=a\cos[\omega t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}+\delta] \tag{1-2-6}$$

式中，角频率 ω 和振动频率 ν 和周期 T 的关系为

$$\omega=2\pi\nu=2\pi/T$$

而 $\boldsymbol{k}=(\omega/v)\boldsymbol{s}$是沿传播方向的矢量，称为波矢量，或传播矢量，其方向与平面波传播方向一致；其大小通常称为波数，又称为空间角频率，其值为

$$k=\omega/v=2\pi/\lambda$$

其中 λ 是波长。

为了运算简便，可用复指数替换余弦函数来表示单色简谐平面波

$$V(\boldsymbol{r},t)=a\boldsymbol{e}^{-i(\omega t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}+\delta)} \tag{1-2-7}$$

它的实部就是式(1-2-6)，而且可将时间相位因子和空间因子分开写成

$$V(\boldsymbol{r},t)=U(\boldsymbol{r})e^{-i\omega t} \tag{1-2-8}$$

式中 $U(\boldsymbol{r})=ae^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\delta)}=Ae^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$，$A=ae^{-i\delta}$为空间因子部分，$U$ 或 A 均可称为复振幅。在光学中经常遇到的振幅 a 的平方(即光强)可用复指数形式表示为

$$a^2=V(\boldsymbol{r},t)V^*(\boldsymbol{r},t)=U(\boldsymbol{r})U^*(\boldsymbol{r})=AA^* \tag{1-2-9}$$

式中上标 $*$ 表示复共轭。

1.2.2 球面波

某一时刻等值面为球面的波动方程的解为球面波。在球坐标系中，球面波解必定具有如下的形式

$$V=V(r,t) \tag{1-2-10}$$

在球坐标系(r,θ,φ)中

$$\nabla^2=\frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]$$

当 V 与 θ,φ 无关时，就有

$$\nabla^2V=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right)=\frac{1}{r}\frac{\partial^2(rV)}{\partial r^2}$$

而波动方程可改写为

$$\frac{\partial^2(rV)}{\partial r^2}-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2(rV)}{\partial t^2}=0 \tag{1-2-11}$$

式(1-2-11)与式(1-2-2)类似,只是把式(1-2-2)中的 ζ 换成 r,V 换成 rV,因此式(1-2-11)的解可通过同样的代换从式(1-2-5)得出

$$V=\frac{V_1(r+vt)}{r}+\frac{V_2(r-vt)}{r} \tag{1-2-12}$$

式(1-2-12)右边第一项代表向原点会聚的球面波,第二项代表从原点向外发散的球面波,两种波的传播速度都是 v。

点光源在波速为 v 的介质中发出角频率为 ω 的单色球面波,其光振动的复指数形式为

$$V(r,t)=\frac{A}{r}e^{-i(\omega t-kr)}=\frac{A}{r}e^{-i\left[\omega\left(t-\frac{r}{v}\right)\right]} \tag{1-2-13}$$

沿矢径 $\boldsymbol{r}$ 传播到相距 r 处,需时 $\frac{r}{v}$,相位与点光源在 $\left(t-\frac{r}{v}\right)$ 时相同,但振幅为 $\frac{A}{r}$,(常用于光强计算中的)复振幅为

$$U(r)=\frac{A}{r}e^{ikr} \tag{1-2-14}$$

§1.3　平面矢量波

场矢量的各分量均为平面波时,构成平面矢量波,它可表示为

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{s}-vt)$$

$$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{s}-vt)$$

$\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 都要满足麦克斯韦方程组,这使各矢量间要满足一些关系,从而具有一些特点。

1.3.1　横波性

平面波 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 都是以 $u=\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{s}-vt$ 为变量的函数。用上标一撇"′"表示对 u 的导数,用字母上加一点"·"表示对 t 的导数,则有

$$\dot{\boldsymbol{E}}=\boldsymbol{E}'\frac{\partial u}{\partial t}=-v\boldsymbol{E}' \tag{1-3-1}$$

$$(\nabla\times\boldsymbol{E})_x=\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}=E_z'\frac{\partial u}{\partial y}-E_y'\frac{\partial u}{\partial z}=(\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{E}')_x$$

即

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{E}' \tag{1-3-2}$$

同理可得

$$\dot{\boldsymbol{H}} = -v\boldsymbol{H}' \tag{1-3-3}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{s} \times \boldsymbol{H}' \tag{1-3-4}$$

把式(1-3-2)和(1-3-3)代入§1.1中麦克斯韦方程组的式(1-1-8)得

$$\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{E}' = \mu v \boldsymbol{H}'$$

两边对 u 积分，并令积分常数为零(即略去一个在空间上不变的场)，可得

$$\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{E} = \mu v \boldsymbol{H} \tag{1-3-5}$$

同理，由§1.1式(1-1-9)可得

$$\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{H} = -\varepsilon v \boldsymbol{E} \tag{1-3-6}$$

式(1-3-5)表明$\boldsymbol{H}$与$\boldsymbol{s}$,$\boldsymbol{E}$垂直，式(1-3-6)表明$\boldsymbol{E}$与$\boldsymbol{s}$,$\boldsymbol{H}$垂直，即三者互相垂直，组成如图1.2所示的右手正交系。$\boldsymbol{s}$为传播方向，$\boldsymbol{E}$和$\boldsymbol{H}$为振动方向，它们与$\boldsymbol{s}$垂直，说明电磁波是横波。

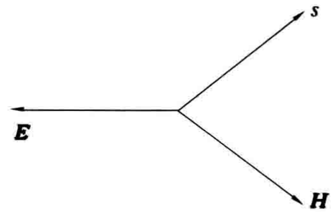


图 1.2

式(1-3-5)所表明的数值关系为

$$E = \mu v H \tag{1-3-7}$$

根据§1.1波动方程式(1-1-14)知波速 $v=1/\sqrt{\mu\varepsilon}$，上式可写为

$$\varepsilon E^2 = \mu H^2 \tag{1-3-8}$$

1.3.2 能量密度和能流密度矢量

由式(1-3-8)可知，平面矢量波的电能密度 w_e 和磁能密度 w_m 相等，都等于电磁能的密度 w 的一半，即

$$w_e = w_m = \frac{1}{2}w = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 = \frac{1}{2}\mu H^2 \tag{1-3-9}$$

根据图1.2矢量间垂直关系，能流密度矢量

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H} = EH\boldsymbol{s}$$

再由式(1-3-7)，(1-3-9)可知

$$\boldsymbol{S} = v w \boldsymbol{s} = v\varepsilon E^2 \boldsymbol{s} \tag{1-3-10}$$

上式表明能量传播的方向与波的传播方向一致，并给出一个示意图像：在能量密度为 w 的空间里，空间各点的能量均以速度 v 沿$\boldsymbol{s}$方向传输。

对沿 z 方向传播的简谐平面波 $E=a\cos(\omega t-kz)$，其能流密度的数值

$$S = v\varepsilon E^2 = v\varepsilon a^2\cos^2(\omega t - kz) \tag{1-3-11}$$

上式表明能流密度随时间迅速变化，一般观察和测量的是它在时间间隔 τ

内的时间平均值，即平均能流密度

$$\langle S\rangle = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau S\mathrm{d}\,t = \frac{v\,\varepsilon}{\tau}\int_0^\tau E^2\mathrm{d}\,t = v\,\varepsilon\langle E^2\rangle \qquad (1\text{-}3\text{-}12)$$

以式(1-3-11)代入，可得

$$\langle S\rangle = \frac{1}{2}v\,\varepsilon a^2 \qquad (1\text{-}3\text{-}13)$$

如果在同一种介质中，而且只比较相对大小，可略去式(1-3-13)中的常数，这就是光强

$$I = 2\langle E^2\rangle = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau 2E^2\mathrm{d}t = a^2 = V(\boldsymbol{r},t)V^*(\boldsymbol{r},t) = AA^* \quad (1\text{-}3\text{-}14)$$

式中利用了§1.2式(1-2-9)，适用于平面简谐波。

§1.4　相速和群速

1.4.1　单色简谐波的相速

满足波动方程，且随时间作角频率为 ω 的简谐变化的解为单色简谐波，可表示为

$$V(\boldsymbol{r},t) = a(\boldsymbol{r})\cos[\omega t - g(\boldsymbol{r})] \qquad (1\text{-}4\text{-}1)$$

$\omega t - g(\boldsymbol{r})$是相位，满足 $g(\boldsymbol{r})=$常数的面称为等相面或波面。

若 t 时刻相位为某值的等相面为 S，$t+\mathrm{d}t$ 时刻相位为这个值的等相面传播到 S'(如图 1.3 所示)。即对 S 面上矢径为 $\boldsymbol{r}$ 的点和 S'面上矢径为 $\boldsymbol{r}+\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 的点应有相位相等关系式

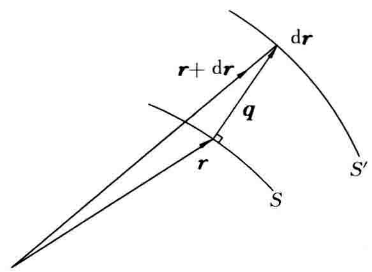


图 1.3

$$\omega t - g(\boldsymbol{r}) = \omega(t+\mathrm{d}t) - g(\boldsymbol{r}+\mathrm{d}\boldsymbol{r}) \qquad (1\text{-}4\text{-}2)$$

利用微分关系式

$$\mathrm{d}g \approx \Delta g = g(\boldsymbol{r}+\mathrm{d}\boldsymbol{r}) - g(\boldsymbol{r}) = \nabla g(\boldsymbol{r})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} \qquad (1\text{-}4\text{-}3)$$

$\nabla g(\boldsymbol{r})$是 $g(\boldsymbol{r})$的梯度，若$\boldsymbol{q}$是 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 方向上的单位矢量，$\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 的长度为 $\mathrm{d}s$，则有

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{q}\mathrm{d}s \qquad (1\text{-}4\text{-}4)$$

把式(1-4-3)和(1-4-4)代入式(1-4-2)，可得

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\frac{\omega}{\nabla g\cdot \boldsymbol{q}}$$

这就是等相面沿 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$(即$\boldsymbol{q}$)方向时传播的速度,从 S 面上矢径为 $\boldsymbol{r}$ 的点沿不同方向的等相面传播速度不同。当$\boldsymbol{q}$垂直于等相面,即$\boldsymbol{q}=\nabla g/|\nabla g|$($|\nabla g|$为$\nabla g$ 的数值),这时的传播速度称为相速,记为 $v^{(p)}$,可认为是等相面的传播速度,其值为

$$v^{(p)}=\frac{\omega}{|\nabla g|} \tag{1-4-5}$$

对简谐平面波,$g(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\delta$,$\nabla g=\boldsymbol{k}$,$|\nabla g|=k=\frac{\omega}{v}$,代入(1-4-5)式可得

$$v^{(p)}=v=1/\sqrt{\mu\varepsilon} \tag{1-4-6}$$

1.4.2 波包的群速

单色波是理想化的波,实际存在的波都是许多不同频率的单色波的叠加。若所含的频率范围很小,叠加成的波称为波包。

若两个单色平面波都沿 z 方向传播,它们的振幅相同,而频率(或波数)相差 $\delta\omega$(或 δk)很小,它们叠加成的波是最简单的波包。其复数表示式为

$$V(z,t)=ae^{-i(\omega t-kz)}+ae^{-i[(\omega+\delta\omega)t-(k+\delta k)z]}$$

作复指数运算可得

$$V(z,t)=2a\cos\left[\frac{1}{2}(t\delta\omega-z\delta k)\right]e^{-i(\bar{\omega}t-\bar{k}z)} \tag{1-4-7}$$

式中$\bar{\omega}=\omega+\frac{1}{2}\delta\omega$,$\bar{k}=k+\frac{1}{2}\delta k$,分别为平均角频率和平均波数。式(1-4-7)可解释为一个沿 z 方向传播的单色平面波,其角频率为$\bar{\omega}$,波数为$\bar{k}$,但它的振幅不再是常数,而是随时间和空间位置变化而变化,变化的角频率是 $\delta\omega$,因此变化是很缓慢的。

取式(1-4-7)的实部,即可得形如式(1-4-1)的单色简谐波,其相位为$\bar{\omega}t-\bar{k}z$,用类似 1.4.1 中的办法可得等相面的传播速度(相速)为

$$v^{(p)}=\frac{\bar{\omega}}{\bar{k}} \tag{1-4-8}$$

式(1-4-7)的振幅因子是一个余弦函数,相当于角频率为$\frac{\delta\omega}{2}$和波数为$\frac{\delta k}{2}$的单色波;其等值面(即等振幅面)由$\frac{1}{2}(t\delta\omega-z\delta k)$所决定,用类似