



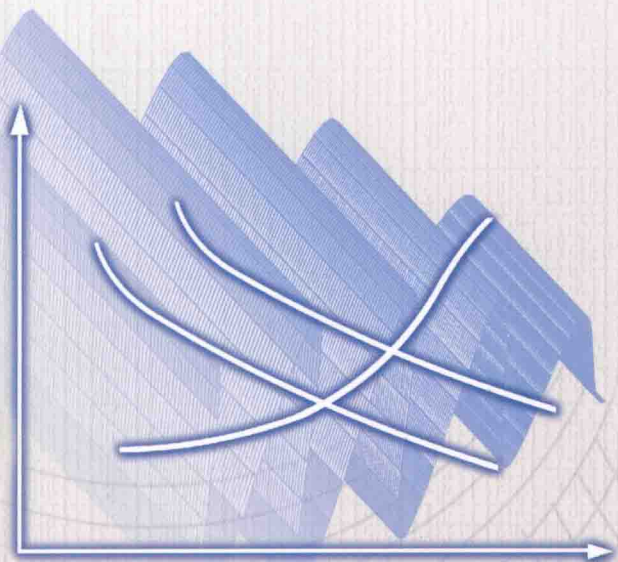
“十二五”规划教材

经济管理数学模型

主编 赵仪娜

编著 戴雪峰 戴永红 吕金阳

刘康民 张改英



西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

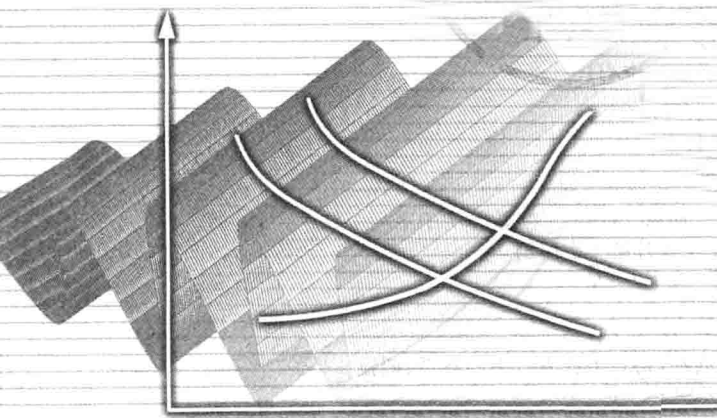


“十二五”规划教材

经济管理数学模型

主编 赵仪娜

编著 戴雪峰 戴永红 吕金阳
刘康民 张改英



西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

内 容 提 要

本书介绍了如何运用数学知识对经济管理中的实际问题建立数学模型。通过一些典型案例介绍运用合适的数学工具和相关学科的知识建模过程,使读者初步掌握模型假设、求解、分析、应用。本书所选示例的背景大多和经济、管理、商业、金融、保险等领域有关,知识覆盖面广,旨在给读者提供解决实际问题的思路 and 具体方法。

本书适合于经济管理类专业的大学本科高年级学生,也可供经济管理工作参考。

图书在版编目(CIP)数据

经济管理数学模型/赵仪娜主编. —西安:西安交通大学出版社,2014.2
ISBN 978-7-5605-5987-2

I. ①经… II. ①赵… III. ①经济管理—数学模型—高等学校—教材 IV. ①F221.6
中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第019533号



书 名 经济管理数学模型
主 编 赵仪娜
责任编辑 叶 涛

出版发行 西安交通大学出版社
(西安市兴庆南路10号 邮政编码 710049)

网 址 <http://www.xjtupress.com>
电 话 (029)82668357 82667874(发行中心)
(029)82668315 82669096(总编办)

传 真 (029)82668280
印 刷 陕西宝石兰印务有限责任公司

开 本 727mm×960mm 1/16 印张 24.5 字数 457千字
版次印次 2014年2月第1版 2014年2月第1次印刷
书 号 ISBN 978-7-5605-5987-2/F·399
定 价 42.00元

读者购书、书店添货、如发现印装质量问题,请与本社发行中心联系、调换。

订购热线:(029)82665248 (029)82665249

投稿热线:(029)82664954

电子信箱:jdjgy@yahoo.cn

版权所有 侵权必究

前 言

经济管理科学近几十年来获得了飞速的发展,取得了丰硕的成果,这些成果的重要标志之一就是经济管理科学更加数学化和定量化,人们越来越重视用数学定量地解决经济管理领域中的各种问题。

要用数学定量地解决经济管理中的问题,首先要建立与这些问题有关的数学模型。近几十年来,全国高等院校的理工类和经济管理类专业纷纷开设了数学模型课程,教材种类也很多,但专门的经济管理专业的数学建模的教材还不多。在此背景下,为配合课程教学,我们编写了本书,以期为经济、金融和管理专业的学生提供一本学习经济数学模型和方法的教材。

我们的总体编写思路是:

(1)教材编写排序时考虑了学生的知识背景。使用教材的对象是大学二年级或三年级的学生,已经系统学习了微积分、线性代数、概率统计等基础数学,但还没有接触过实际问题,开设数学模型课程的目的就是为学生搭建起数学与实际问题的桥梁。我们是从学生掌握的数学知识的体系进行章节分类的,内容由简单逐渐变复杂,更易于学生接受。作为经济数学建模的一本入门教材,其基点是引领读者梳理数学与客观世界的关系,沿着数学的脉络切入经济世界。

(2)教材编写十分重视突出经济问题的背景。在每个模型中,经济问题是占主导地位的,解决问题着重强调数学模型的建立,而数学理论的讲解则在其次。在阐述数学知识时,基本上采取说明式的方法阐述数学的原理和思想,省略了定理证明。在数学的描述上做到简练、实用。在每个模型的编排上尽量还原客观问题的本来面目。

(3)教材编写注重问题的时代感。虽然数学理论是经典的,但经济数学模型是具有时代性的,希望书中的实际问题离读者所学专业尽可能近些。我们一方面搜集了经济管理领域经常碰到的和数学有关的问题,同时也搜集了在经济管理中比较典型的数学模型,例如投入产出问题、影子价格问题、投资组合问题、期权定价问题等经济前沿问题,以使读者更能体会数学建模的应用性和威力。

从发展的角度讲,经济发展是无止境的,经济问题数学模型的应用是无限的。数学知识的应用技巧千变万化,难以穷尽。想通过大量的例子来涵盖经济

数学模型的全部无异于九天揽月,希望通过本书尽量给读者一个最基本的整体解决实际问题的数学建模过程。

全书共分为九部分:经济数学模型绪论、经济应用模型、金融应用模型、微积分应用模型、微分与差分方程应用模型、线性代数应用模型、概率应用模型、统计应用模型和运筹管理应用模型。

本教材每一章节所给出的数学模型基本上彼此独立,自成体系。在使用教材时,教师可根据学生的基础及教学时数任意取舍。

数学建模涉及的数学分支众多,我们希望更多的新的经济管理案例充实到本书中来,因此,在编写这本书时吸收了许多相关领域的一些研究成果和参考文献,在此谨向被参考的文献著(作)者表示真诚的谢意。

参加本书编写工作的有赵仪娜、戴雪峰、戴永红、吕金阳、刘康民、张改英,全书的内容是大家合作完成的,由赵仪娜统稿主编。

对书中的疏漏和不足之处,敬请专家、同行、读者批评指正。

编 者
2014.2

目 录

第一章 经济数学模型绪论	(1)
1.1 导 言	(1)
1.2 什么是数学模型?	(2)
1.3 建立数学模型的基本方法和步骤	(4)
1.4 数学建模举例	(7)
第二章 经济应用模型	(11)
2.1 经济分析中的边际和弹性模型	(11)
2.2 需求、供给与均衡价格模型	(18)
2.3 市场动态均衡价格模型	(23)
2.4 拉格朗日乘子的经济意义	(25)
2.5 实物交换模型	(28)
2.6 保险人的收益率模型	(31)
2.7 古诺产量竞争模型	(33)
2.8 哈罗德-多马经济增长模型与新古典增长模型	(38)
2.9 乘数与加速数模型	(45)
2.10 物价指数模型	(49)
2.11 利益分配的合作对策模型	(55)
第三章 金融应用模型	(62)
3.1 资金的时间价值	(62)
3.2 连续资金流的现值与终值模型	(71)
3.3 简单的投资决策模型	(73)
3.4 资产组合模型理论基础	(77)
3.5 两种资产投资组合模型	(83)
3.6 马科维茨投资组合模型	(87)
3.7 期权定价模型	(101)

第四章 微积分应用模型	(113)
4.1 数学模型常用的最优化方法简述	(113)
4.2 最优价格模型	(119)
4.3 消费者均衡模型	(124)
4.4 牲畜的最佳出售时机	(127)
4.5 确定性存储模型	(130)
4.6 森林灭火模型	(140)
4.7 道格拉斯生产函数与经济增长模型	(144)
第五章 微分与差分方程应用模型	(149)
5.1 简单的人口增长模型	(149)
5.2 产品销售模型	(155)
5.3 传染病模型	(161)
5.4 人口的预测和控制模型	(168)
5.5 市场经济中的蛛网模型	(172)
5.6 贷款偿还模型	(179)
5.7 阻滞增长模型的差分形式	(183)
5.8 交通网络控制模型	(190)
第六章 线性代数应用模型	(194)
6.1 价格弹性矩阵	(194)
6.2 交通网络流量分析模型	(197)
6.3 两个城市支付基金的流动模型	(199)
6.4 投入产出数学模型	(201)
6.5 按年龄分布的离散化人口预测模型	(215)
6.6 森林管理模型	(221)
6.7 层次分析法模型	(225)
第七章 概率应用模型	(238)
7.1 经济决策模型	(238)
7.2 单周期随机存储模型	(245)
7.3 (s, S) 随机存储模型	(249)
7.4 飞机票超额预订模型	(254)
7.5 最优广告费模型	(257)

7.6	经济轧钢模型	(261)
7.7	随机性人口模型	(264)
第八章	统计应用模型	(267)
8.1	回归分析模型	(267)
8.2	独立性检验模型	(280)
8.3	主成分分析模型	(283)
8.4	聚类分析模型	(290)
8.5	马尔可夫链模型	(294)
第九章	运筹管理应用模型	(306)
9.1	线性规划模型	(306)
9.2	对偶规划与影子价格模型	(315)
9.3	特殊线性规划模型	(323)
9.4	目标规划模型	(336)
9.5	投资组合的规划模型	(343)
9.6	动态规划模型	(350)
9.7	非线性规划模型	(356)
9.8	对策论模型	(364)
9.9	排队论模型	(374)
参考文献		(384)

第一章

经济数学模型绪论

1.1 导 言

数学模型的历史可以追溯到人类开始使用数字的时代。人类使用数字的过程就是不断地建立各种数学模型的过程。特别是在 20 世纪 70 年代后,由于数学模型的广泛性与实用性而被迅速推广开来。从 20 世纪 80 年代起,运用数学模型研究实际问题的风气越来越浓,正像人们所说的“数学无处不在”已成为不可争辩的事实。不论是经济、法律、医学、农业、交通、军事等领域,数学模型已不再是陌生的名词。在工程领域,电气工程师必须建立所要控制的生产过程的数学模型,以便对控制装置做出相应的设计和计算,才能实现有效的过程控制。气象工作者为了得到准确的天气预报,一刻也离不开根据气象站、气象卫星汇集的气压、雨量、风速等资料建立数学模型。生理医学专家有了药物浓度在人体内随时间、空间变化的数学模型,就可以分析药物的疗效,有效地指导临床用药。城市规划师需要建立一个包括人口、经济、交通、环境等大系统的数学模型,为领导层对城市发展规划的决策提供科学依据。厂长经理们根据产品的需求状况、生产条件和成本、贮藏费用等信息,筹划出合理安排生产和销售数学模型。最值得一提的是经济领域,自从 1969 年首届诺贝尔经济学奖授予将数学和统计方法应用于经济分析的荷兰经济学家廷贝亨以后,在世界范围内出现了一股经济研究数学化的热潮。在这个风向标的作用下,经济研究内容和方法发生了天翻地覆的变化,经济学研究也出现了和数学关系极为密切的新兴内容,如数理金融、计量经济学、金融工程等,过去的一些传统专业诸如人口学、市场学、价格学、财政学、金融学、会计学等等都无一不和数学模型有关。特别是随着计算机的出现及飞速发展,一些复杂的计算问题得以解决,更使数学在经济管理领域中大显身手,数学正在以空前的广度和深度向经济管理领域渗透。

建立数学模型的工作是综合性的,所需要的知识和工具是综合性的,所研究的问题是综合性的,所需要的能力当然也是综合性的。所以学习数学模型是

在学习综合的数学知识和方法。如果想要用数学模型解决实际中较大、较复杂的问题,必须与掌握各种不同知识的人协同合作,发挥每个人的专长,用集体智慧解决问题,这是数学模型解决实际问题的一个特点。这本书将向读者介绍一些经济管理中常见的模型,旨在引导读者初步掌握数学建模的方法,同时提高数学思维和计算能力。

1.2 什么是数学模型?

一、原型与模型

原型是指人们在现实世界里关心、研究或从事生产、管理的实际对象。例如在科技领域中的电力系统、生态系统、环境污染过程等;在经济领域里的社会经济系统、生产销售过程、计划决策过程等都可能是人们关心的原型。模型是指为了某个特定目的将原型的某一部分信息简缩、提炼而构造的原型替代物。模型不是原型,既简单于原型,又高于原型。例如飞机模型,虽然在外观上比飞机原形简单,而且也不一定会飞,但是它很逼真,也足以让人们想象飞机在飞行的过程中机翼的位置与形状的影响和作用。一个城市的交通图是该城市(原型)的模型,看模型比看原型清楚得多,此时城市的人口、道路、车辆、建筑物的形状等都不重要,但城市的街道、交通线路和各单位的位置等信息都一目了然,这比看原型清楚得多。类似的例子举不胜举。

同一个原型,为了不同的目的可以有許多不同的模型。因为人们对原型有不同方面目的的要求,所以模型只要求能反映与某种目的有关的那些方面的特征。模型的形式很多,大体上可以分为形象模型和抽象模型,前者包括直观模型、物理模型等,后者包括思维模型、符号模型、数学模型等。本书专门讨论数学模型。

二、数学模型

当一个数学结构作为某种形式语言(即包括常用符号、函数符号、谓词符号等符号集合)解释时,这个数学结构就称为数学模型。换言之,数学模型可以描述为:对于现实世界的一个特定对象,为了一个特定目的,根据特有的内在规律,做出一些必要的简化假设,运用适当的数学工具得到的一个数学结构。也就是说,数学模型是通过抽象、简化过程,使用数学语言对实际现象的一个近似的刻画,以便于人们更深刻地认识所研究的对象。

数学模型并不是新的事物,自从有了数学,也就有了数学模型。事实上,人

所共知的欧几里德几何、微积分、柯西积分公式、万有引力定律、能量转换定律、广义相对论等都是非常好的数学模型。我们设想,如果现在没有这些数学模型,那么世界将是什么样子。

实际中,能够直接使用数学方法解决的实际问题是不多的,通过合理假设,从形式上杂乱无章的现象中抽象出恰当的数学关系,构建并求解这个实际问题的数学模型,这要比定性思维和领导拍板决策科学得多。我们后面将表述问题、建立模型、求解模型、解释模型、检验模型这一过程称为数学建模。

三、数学模型的分类

数学模型的分类方法有多种,下面是常用的几种分类。

(1) 按照建模所用的数学方法的不同,可分为:初等数学模型;微积分模型;线性代数模型;概率统计模型;运筹学模型;控制论模型、模糊数学模型、灰色系统模型等。

(2) 按照数学模型应用领域的不同,可分为人口模型、交通模型、体育模型、经济预测模型、金融模型、环境模型、生态模型、企业管理模型等。

(3) 按照模型的表现特性可分为:确定性与不确定性模型,静态模型与动态模型;离散模型与连续模型;线性模型与非线性模型等。

(4) 按照人们对建模机理的了解程度的不同,有所谓的白箱模型、灰箱模型、黑箱模型。

这是把研究对象比喻为一只箱子里的机关,通过建模过程来揭示它的奥妙。白箱主要指物理、力学等一些机理比较清楚的学科所描述的现象,以及相应的工程技术问题,这些方面的数学模型大多已经建立起来,还需深入研究的主要是针对具体问题的特定目的进行修正与完善,或者是进行优化设计与控制等。灰箱主要指生态、经济等领域中遇到的模型,人们对其机理虽有所了解,但还不很清楚,故称为灰箱模型,在建立和改进模型方面还有不少工作要做。黑箱主要指生命科学、社会科学等领域中遇到的模型,机理知之甚少,甚至完全不清楚,故称为黑箱模型。

应该指出的是,这三者之间并没有严格的界限,而且随着科学技术的发展,情况也是不断变化的。

四、经济数学模型

当把数学模型与经济问题有机结合在一起时,就产生了经济数学模型。所谓经济数学模型,是以经济问题为研究对象,以社会经济活动为内容,以数学方法为工具,把各经济因素间的数量关系抽象为数学表达式,以再现所研究的经

济现象。所以,经济数学模型是对客观经济数量关系的简化反映,是经济分析中科学抽象和高度综合的一种重要形式。

经济数学模型是研究分析经济数量关系的重要工具,它是经济理论和经济现实的中间环节。它在经济理论的指导下对经济现实进行简化,但在主要的本质方面又近似地反映了经济现实,所以是经济现实的抽象。经济数学模型能起明确思路、加工信息、验证理论、计算求解、分析和解决经济问题的作用,特别在对量大面广、相互联系、错综复杂的数量关系进行分析研究时,更离不开经济数学模型。运用经济数学模型来分析经济问题,预测经济走向,提出经济对策已是大势所趋。诸如最优价格模型、经济学中的边际弹性理论、金融工程中的期货期权理论、最优化和影子价格等都是经济和数学的完美结合。数学模型使经济学从定性研究向定量研究转化,更加具有理性。

在经济数学模型中,用到的数学知识非常广泛,其中包括微积分、概率论、数理统计、随机过程、矩阵理论、微分方程、对策论、线性规划、非线性规划、控制理论、动态规划、图论等等,它们应用于经济学的许多学科,特别是数理经济学和计量经济学。

1.3 建立数学模型的基本方法和步骤

数学建模面临的实际问题是多种多样的,而且大多比较复杂,所以建立数学模型需要哪些方法和步骤并没有固定的模式。建模的目的不同,分析的方法不同,采用的数学工具不同,所得的模型的类型也不同。不可能有一定的准则和适用于一切实际问题的数学建模方法。但是建立数学模型的方法和步骤也有一些共性的东西,掌握这些共同的规律,将有助于数学模型的建立。

一、数学建模的方法

数学建模的方法按大类来分,大体上可分为三类:

1. 机理分析法

机理分析法就是根据人们对现实对象的了解和已有的知识、经验等,分析研究对象中各变量(因素)之间的因果关系,找出反映其内部机理规律的一类方法。建立的模型常有明确的物理或现实意义。使用这种方法的前提是我们对研究对象的机理应有一定的了解,模型也要求具有反映内在特征的意义。机理分析要针对具体问题来做,因而没有统一的方法。

2. 测试分析法

测试分析法是一种统计分析法。当我们将研究对象视为一个“黑箱”系统,

对系统的输入、输出数据进行观测,并以这些实测数据为基础进行统计分析,按照一定准则找出与数据拟合最好的模型。当我们对对象的内部规律基本不清楚,就可以用测试分析建立数学模型。测试分析有一套完整的数学方法。

3. 综合分析法

对于某些实际问题,人们常将上述两种建模方法结合起来使用,例如用机理分析法确定模型结构,再用测试分析法确定其中的参数。

二、数学建模的基本步骤

1. 模型准备

对原始实际问题进行调查了解,抽象出语言叙述的模型及相应的数据条件等,称为原始模型。实际上抽象出原始模型时常常已对模型的进一步建立及求解有了一些想法,比如采用哪种类型模型等。此步骤注意要将所有搜集到的信息表述出来,不要遗漏。

2. 模型假设

这是非常关键的步骤,不同的假设将导致建立不同的模型。利用合理的、必要的假设,可简化模型使无法下手的问题易于解决。但过度的简化而得到模型可能无实用价值,舍不得简化又可能导致得到一个无法求解的模型或模型的解非常复杂,以致无法应用。到底简化到什么程度要看问题的性质与建模的目的以及建立模型中的某些需要。这里要提醒注意,对于一个假设,最重要的是它是否符合实际情况,而不是为了解决问题的方便。

通常做出合理假设的依据,一是出于对问题内在规律的认识,二是来自对数据或现象的分析,也可是两者的综合。作假设时既要运用与问题相关的物理、化学、生物、经济等方面的知识,又要充分发挥想象力、洞察力和判断力,善于辨别问题的主次,抓住主要因素,舍弃次要因素,尽量使问题简化(比如线性化、均匀化等)。经验在这里也常起重要作用

有些假设在建模过程中才会发现。因此在建模时要注意调整假设。

3. 模型建立

根据所做的假设,利用适当的数学工具,建立各个量之间的等式或不等式关系,列出表格,画出图形或确定其他数学结构。为了完成这项数学模型的主体工作,常常需要广博的应用数学知识,除了微积分、微分方程、线性代数及概率统计等基础知识外,还将用到诸如规划论、排队论、图与网络及对策论等。推而广之,可以说任何一个数学分支都可能应用到建模过程中。当然,这并非要求你对数学的各个分支都精通,事实上,建模有一个原则,即尽量采用简单的数学工具,以便使更多的人了解和使用。当然建模时需要有灵活、清醒的头脑和创造

性思维的能力。

4. 模型求解

根据模型的性质,选择适当方法求解。目前各种算法的数学软件很多,为提高计算效率,尽可能多用计算机软件解决问题。求解的结果可能是解析方法,也可能是近似解,再根据建模目的对系统进行预测,决策与控制。

5. 模型检验

把上述结果翻译回原问题,并与实际数据进行比较,检验模型的适用性与合理性。如果模型不实用,必须从模型假设那里重新开始,直到得到可用模型。

6. 模型推广

在一个领域里解决问题时建立的模型,常常简单地稍加处理后即可以推广到其他领域。讨论一下这方面内容可增加模型的应用价值。

三、构建经济数学模型应注意的问题

经济数学模型的特点是在对客观经济现象研究时许多假设是相对的、有条件的。经济研究中应用数学方法时,必须以客观经济活动的实际为基础,以最初的基本假设为条件,一旦突破了最初的基本假设,就需要研究探索使用新的数学方法;一旦脱离客观经济实际,数学的应用就失去了意义。因此,在构建和运用经济数学模型时须注意以下问题。

(1) 首先对所研究的经济问题要有明确的了解、细致周密的调查。分析经济问题运行的规律,获取相关的信息和数据,明确各经济变量之间的数量关系。如果条件不太明确,则要通过假设来逐渐明确,从而简化问题。

(2) 明确建模的目的。出于不同的目的,所建模型可能会有很大的差异。建模目的可能是为了描述或解释某一经济现象,可能是预报某一经济事件是否发生,或者发展趋势如何,还可能为了优化管理、决策或控制等。总之,建立经济数学模型是为了解决实际经济问题,所以建模过程中不仅要建立经济变量之间的数学关系表达式,还必须清楚这些表达式在整个模型中的地位 and 作用。

(3) 在经济实际中只能对可量化的经济问题进行数学分析和构建数学模型,对不可量化的事物只能建造模型概念,而模型概念是不能进行数量分析的。尽管经济模型是反映事物的数量关系的,但必须从定性开始,离开具体理论所界定的概念,就无从对事物的数量进行分析和讨论。

(4) 不同数学模型的求解一般涉及不同的数学分支的专门知识,所以建模时应尽可能利用自己熟悉的数学分支知识。同时,也应针对问题学习了解一些新的知识,特别是计算机科学的发展为建模提供了强有力的辅助工具,熟练掌握一些数学软件或经济软件如 Matlab、Mathematic、Lindo 也是必不可少的。

(5) 根据调查或搜集的数据建立的模型,只能算作一个“经验公式”,只能对经济现象做出粗略大致的描述,据此公式计算出来的数据只能是个估计值。同时,模型相对于客观实际不可避免地产生一定误差,一方面要根据模型的目的确定误差允许的范围;另一方面,要分析误差来源,若误差过大,须寻找补救方案。

(6) 用所建经济数学模型去说明或解释处于动态中的经济现象时,必须注意时空条件的变化,必须考虑不可量化因素的影响作用以及在一定条件下次要因素转变为主要因素的可能性。

经济数学模型有它的局限性。这种局限性既表现在它的建立要受人们对客观经济现实认识能力和仿真手段的限制,还表现在它的应用是有条件的,不能脱离应用者的学识、经验和判断能力。模型所说明的问题一旦触犯了人们的利益,模型本身常会遭到强烈的反对。在阶级、社会集团的经济利益相互冲突的情况下,客观的经济发展过程绝不会完全按照经济数学模型所反映的途径发展。

1.4 数学建模举例

数学的应用已渗透到了各个领域,数学无处不在。有的问题貌似无法和数学问题关联,但在一定的假设下也可以建立数学模型。本节给出两个不同领域的数学建模应用例子,分别是生活中的问题和经济问题。

一、椅子能在不平的地面上放稳吗?

把椅子往不平的地面上一放,通常只有三只脚着地,放不稳,然而只要稍挪动几次,就可以四脚着地,放稳了。对这个问题,下面用数学语言给以表达。

1. 模型假设

为了明确问题,对上述现象中的有关因素在符合日常生活的前提下,对椅子和地面都要作一些必要的假设。

(1) 椅子四条腿一样长,椅脚与地面接触可视为一个点,四脚的连线呈正方形。

(2) 地面高度是连续变化的,沿任何方向都不会出现间断(没有像台阶那样的情况),即地面可视为数学上的连续曲面。

(3) 对于椅脚的间距和椅腿的长度而言,地面是相对平坦的,使椅子在任何位置至少有三只脚同时着地。为保证这一点,要求对于椅脚的间距和椅腿的长度而言,地面是相对平坦的。因为在地面上与椅脚间距和椅腿长度的尺寸大小相当的范围内,如果出现深沟或凸峰(即使是连续变化的),此时三只脚是无法

同时着地的。

2. 模型建立

中心问题是用数学语言表示四只脚同时着地的条件、结论。

首先用变量表示椅子的位置,由于椅脚的连线呈正方形,以中心为对称点,正方形绕中心的旋转正好代表了椅子的位置的改变,于是可以用旋转角度 θ 这一变量来表示椅子的位置。如图 1.1 所示,对角线 AC 与 x 轴重合,椅子绕中心点 O 旋转后,正方形 $ABCD$ 转至 $A'B'C'D'$ 位置,对角线 AC 与 x 轴夹角 θ 表达了椅子的位置。

其次要把椅脚着地用数学符号表示出来,如果用某个变量表示椅脚与地面的竖直距离,当这个距离为 0 时,表示椅脚着地了。椅子要挪动位置说明这个距离是位置变量的函数。

由于正方形的中心对称性,只要设两个距离函数就行了,记 A, C 两脚与地面距离之和为 $f(\theta)$, B, D 两脚与地面距离之和为 $g(\theta)$,显然 $f(\theta), g(\theta) \geq 0$,由假设(2)知 f, g 都是连续函数,由假设(3)知 $f(\theta), g(\theta)$ 至少有一个为 0。当 $\theta = 0$ 时,不妨设 $g(\theta) = 0, f(\theta) > 0$ 。这样改变椅子的位置使四只脚同时着地,就归结为如下命题:

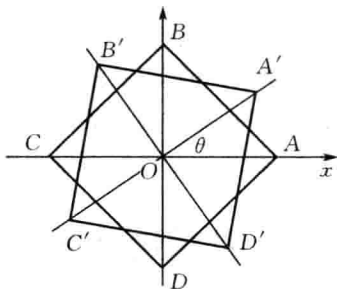


图 1.1

已知 $f(\theta), g(\theta)$ 是 θ 的连续函数,对任意 $\theta, f(\theta), g(\theta) = 0$, 且 $g(0) = 0, f(0) > 0$, 则存在 θ_0 , 使 $g(\theta_0) = f(\theta_0) = 0$ 。

3. 模型求解

将椅子旋转 $\pi/2$, 对角线 AC 和 BD 互换, 由 $g(0) = 0, f(0) > 0$ 可知 $g(\pi/2) > 0, f(\pi/2) = 0$ 。令 $h(\theta) = f(\theta) - g(\theta)$, 则 $h(0) > 0, h(\pi/2) < 0$ 。由 f, g 的连续性知 h 也是连续函数, 由连续函数的介值定理, 必存在 $\theta_0 (0 < \theta_0 < \pi/2)$ 使 $h(\theta_0) = 0, g(\theta_0) = f(\theta_0)$ 。由 $g(\theta_0) \cdot f(\theta_0) = 0$, 所以 $g(\theta_0) = f(\theta_0) = 0$ 。

4. 模型评注和推广

本模型用函数的观点来解决问题, 引入合适的函数是关键。模型的巧妙之处就在于用变量 θ 表示椅子的位置, 用 θ 的两个函数表示椅子四只脚与地面的竖直距离。运用这个模型, 不但可以确信椅子能在地面上放稳, 而且可以指导我们如何通过旋转将地面上放不稳的椅子放稳。

进一步分析这个问题的假设, 四脚连线成正方形并不是本质的。例如考虑

椅子四脚呈长方形的情形,仍将椅子的一条对角线作为 x 轴,将椅子绕对称中心旋转 π ,用类似方法也可得到相同结论。读者还可以进一步讨论四脚连线为不规则四边形的椅子能在不平的地面上放稳的问题。

二、连续投资问题

1. 问题的提出

某部门在今后五年内考虑给下列项目投资,已知如下条件:

项目 A,从第一年到第四年每年年初均需投资,并于次年末回收本利 115%;

项目 B,第三年初需要投资,到第五年末回收本利 125%,但规定最大投资额不超过 4 万元;

项目 C,第二年初需要投资,到第五年末回收本利 140%,但规定最大投资额不超过 3 万元;

项目 D,五年内每年年初可购买公债,于当年末归还,可获利息 6%。

该部门现有资金 10 万元,问它应如何确定给这些项目每年的投资额,使到第五年末部门所拥有的资金的本利总额最大。

2. 建模与求解

这是一个连续投资问题,可以用多种数学方法建模求解。下面用线性规划模型来建立数学关系式。用 $x_{jA}, x_{jB}, x_{jC}, x_{jD}$ ($j = 1, 2, 3, 4, 5$) 表示第 j 年初分别用于项目 A, B, C, D 的投资额(即决策变量),根据题设条件,用表格(见表 1.1)将变量列出(表中空格部分表示该项目当年的投资为 0):

表 1.1

项目 \ 年份	1	2	3	4	5
A	x_{1A}	x_{2A}	x_{3A}	x_{4A}	
B			x_{3B}		
C		x_{2C}			
D	x_{1D}	x_{2D}	x_{3D}	x_{4D}	x_{5D}

下面讨论这些决策变量 $x_{jA}, x_{jB}, x_{jC}, x_{jD}$ ($j = 1, 2, 3, 4, 5$) 应满足的线性约束条件。

第一年年初仅对项目 A、D 进行投资,因年初拥有资金 10 万元,设项目 A、D 的投资额分别为 x_{1A}, x_{1D} ,则有: