严格依据 2014 年考研数学考试大纲编写

高教版 2014

全国硕士研究生入学统一考试
数学考试大纲解析

（数学一和数学二适用）

全国硕士研究生入学统一考试
辅导用书编委会

最佳搭配：数学考试大纲解析 + 大纲配套 1000 题 + 历年真题标准解析

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

严格依据2014年考研数学考试大纲编写

2014

全国硕士研究生入学统一考试
数学考试大纲解析
（数学一和数学二适用）

全国硕士研究生入学统一考试
辅导用书编委会

2014 QUANGUO SHUOSHI YANJIUSHENG RUXUE TONGYI KAOSHI
SHUXUE KAOSHI DAGANG JIEXI (SHUXUE YI HE SHUXUE ER SHIYONG)

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

内容提要

在数学考试命题已经规范、成熟和稳定的今天，也是该书出版的第十年，我们联合原考研数学命题和阅卷专家对《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲解析(数学一和数学二适用)》进行了全新修订。这次修订更加注重本书的参考功能——通过对考试内容的归纳总结让考生掌握重点、学透数学；通过对大量典型例题的分析让考生对数学产生兴趣并掌握数学的经典思想和方法。

本书的每一章分为三个部分：

第一，考试内容与考试要求。这里明确指出了《考试大纲》对考生提出的要求，考生需严格按照该要求复习，不遗漏任何知识点，也不要超纲复习。

第二，考试内容与考试要求解析。这里对考试大纲的知识点进行了归纳、总结。考生一定要在复习的过程中详细理解每个知识点，掌握每种方法，温故知新，熟稔于心。

第三，典型例题解析。这部分通过大量的典型例题分析，洞悉考试命题规律、考生应对策略，其中包括考研数学的经典数学思想和方法、考生易错易混知识点的提醒等，让考生知己知彼。

图书在版编目(CIP)数据

2014全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲解析/全国硕士研究生入学统一考试辅导用书编委会编.—北京:高等教育出版社,2013.8

数学一和数学二适用

ISBN 978-7-04-038138-2

Ⅰ.①2… Ⅱ.①全… Ⅲ.①高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第198812号

策划编辑 张耀明　　责任编辑 雷旭波　　封面设计 于 涛　　版式设计 范晓红
责任校对 王 雨　　责任印制 毛斯璐

出版发行 高等教育出版社
社　　址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100120
印　　刷 北京中科印刷有限公司
开　　本 787mm×1092mm 1/16
印　　张 18
字　　数 430千字
购书热线 010-58581118

咨询电话 400-810-0598
网　　址 http://www.hep.edu.cn
　　　　 http://www.hep.com.cn
网上订购 http://www.landraco.com
　　　　 http://www.landraco.com.cn
版　　次 2013年8月第1版
印　　次 2013年8月第1次印刷
定　　价 38.00元

物 料 号 38138-00

前　言

全国硕士研究生入学统一考试从测量学角度来说，它应是“常模参照”考试，即选拔性考试。命题工作应坚持既有利于为国家选拔高层次的专门人才，又符合高等学校教学的原则，强调在考查知识的基础上重点考查考生的分析问题和解决实际问题的能力，并且要采用科学的办法，保持考试水平的稳定。

为了进一步总结命题工作的经验，同时也是为了让社会和考生进一步了解《考试大纲》的内容和要求，增加考试的透明度，消除考生对命题的神秘感，缓解考生在考试中的焦虑心理，以有利于考生正常发挥水平，继 2003 年出版《数学考试参考书》以后，今年我们又组织部分多年参加大纲制订和修订的原命题专家及阅卷专家编写了这套《数学考试大纲解析》。

《数学考试大纲解析》分数学一、数学二适用和数学三适用两册出版，对考试内容和要求做进一步的展开，并通过一定量的典型例题对考试中的重点和难点予以阐释，力求体现研究生数学考试试题的特点。期望能够帮助考生掌握学习中的重点和难点，提高数学水平，在考试中取得好的成绩。

本书的每一章分为三个部分：

第一，考试内容与考试要求。这里明确指出了《考试大纲》对考生提出的要求，考生需严格按照该要求复习，不遗漏任何知识点，也不要超纲复习。

第二，考试内容与考试要求解析。这里对考试大纲的知识点进行了归纳、总结。考生一定要在复习的过程中详细理解每个知识点，掌握每种方法，温故知新，熟稔于心。

第三，典型例题解析。这部分通过大量的典型例题分析，洞悉考试命题规律、考生应对策略，其中包括考研数学的经典数学思想和方法、考生易错易混知识点的提醒等，让考生知己知彼。

由于编写时间和经验不足，本书难免有疏漏和不足之处，恳请读者指正。

编　者

2013 年 8 月

目　录

第一部分　高等数学

第二部分　线性代数

第三部分　概率论与数理统计

第一部分

高等数学

第一章　函数、极限、连续

微积分学的研究对象是函数.许多重要的概念需要用极限理论精确定义,因此极限是微积分学的重要基础,对后续内容的学习影响深远,应重点掌握.

考试内容与考试要求

考试内容

函数的概念及表示法,函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性,复合函数、反函数、分段函数和隐函数,基本初等函数的性质及其图形,初等函数,函数关系的建立,数列极限与函数极限的定义及其性质,函数的左极限和右极限,无穷小量和无穷大量的概念及其关系,无穷小量的性质及无穷小量的比较,极限的四则运算,极限存在的两个准则:单调有界准则和夹逼准则,两个重要极限:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}.$$

函数连续的概念,函数间断点的类型,初等函数的连续性,闭区间上连续函数的性质.

考试要求

1. 理解函数的概念,掌握函数的表示法,会建立应用问题的函数关系.
2. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.
3. 理解复合函数及分段函数的概念,了解反函数及隐函数的概念.
4. 掌握基本初等函数的性质及其图形,了解初等函数的概念.
5. 理解极限的概念,理解函数左极限与右极限的概念以及函数极限存在与左极限、右极限之间的关系.
6. 掌握极限的性质及四则运算法则.
7. 掌握极限存在的两个准则,并会利用它们求极限,掌握利用两个重要极限求极限的方法.
8. 理解无穷小量、无穷大量的概念,掌握无穷小量的比较方法,会用等价无穷小量求极限.
9. 理解函数连续性的概念(含左连续与右连续),会判别函数间断点的类型.
10. 了解连续函数的性质和初等函数的连续性,理解闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值和最小值定理、介值定理),并会应用这些性质.

考试内容与考试要求解析

本部分内容包括三个部分,即函数、极限和函数的连续性,考查的主要内容和能力有:

1. 函数的几种特性，包括有界性、单调性、周期性和奇偶性，能够利用定义验证和判断所给函数是否具有上述某种特性.

2. 函数的常见类型，包括初等函数、反函数、复合函数、分段函数和隐函数，要做到：

(1) 准确使用函数的记号，因为错用函数及其导数的记号是丢分的原因之一.

(2) 清楚函数的复合关系，尤其要会求分段函数的复合函数的表达式.

(3) 熟悉函数的几种表示法，并能够识别函数的类型.

其中复合函数和分段函数是考查的主要对象，在后续的学习中还有积分上限函数和级数的和函数也是考查的重点.

3. 本部分的重点内容是极限，前后内容交叉的地方多，综合性强. 要求考生既要准确理解极限的概念、性质和极限存在的充分必要条件，又要掌握求极限的方法. 从整体上看，求极限的方法很多，要能够针对不同类型的极限采用相应的方法求解. 主要考查的方法有：

(1) 利用极限的四则运算法则求极限.

(2) 利用函数的连续性求极限.

(3) 利用两个重要极限求极限.

(4) 利用等价无穷小量代换简化极限的计算.

(5) 利用准则证明极限的存在性，并求出极限. 包括利用“单调有界准则”证明数列极限的存在性，并能够利用关系式求出极限；利用“夹逼准则”证明数列和函数极限的存在性，并能够根据结论确定极限. 利用准则证明极限的存在性要特别注意主要的解题步骤、模式和方法.

(6) 重视导数的定义与极限的联系，能够根据导数的定义计算出相关形式的极限，但要注意函数可导的充分必要条件.

(7) 利用洛必达法则求未定式的极限，熟悉求七种常见未定式极限的方法并能准确计算.

(8) 利用泰勒公式(主要是麦克劳林公式)求未定式的极限，熟记几个简单初等函数的麦克劳林公式.

(9) 利用定积分的定义和性质求极限.

这些求极限的方法中，每种方法一般都对应不同类型的极限问题，某些极限问题会涉及几种不同的方法. 要区别不同方法的针对性，熟练掌握其解题模式和规律.

4. 函数连续性的概念、判断和讨论，要求：

(1) 能够找到间断点，并能够根据定义结合求极限的方法判断间断点的类型.

(2) 熟记闭区间上连续函数的性质，能够根据介值定理讨论连续函数在给定区间的零点或方程根的存在性.

5. 熟悉本部分内容的常考题型，主要有：

(1) 直接计算各种极限.

(2) 极限的局部逆问题，即给定极限值或函数的连续点，反过来确定式子中的常数.

(3) 无穷小量阶的比较和确定，能够判断谁是更高阶的无穷小量、阶数是多少.

(4) 讨论函数的连续性，判断间断点的类型.

(5) 讨论函数的零点或方程根的个数，这部分内容往往与微分中值定理构造出综合性的证明题，也是考生普遍感到较难掌握的地方.

整体来看，广大考生对这一部分内容普遍掌握得比较好，但由于需要与后续内容进行交叉，因此要不断勤思多练，做到前后知识融会贯通、灵活应用.

典型例题解析

例 1.1.1 设函数 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$ 则 $f[f(x)]=$______.

【答案】 1

【考点】 本题考查分段函数的复合函数.

【解】 由 $f(x)$ 的定义知，对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$，都有 $|f(x)|\leqslant 1$. 由 $f[f(x)]$ 的定义知，当 $|f(x)|\leqslant 1$ 时，$f[f(x)]=1$，因而对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$，都有 $f[f(x)]=1$.

【典型错误】 由于没有看到 $|f(x)|\leqslant 1$ 而将复合函数的表达式写错.

例 1.1.2 设数列 x_n 与 y_n 满足 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n=0$，则下列断言正确的是（　　）

(A) 若 x_n 发散，则 y_n 必发散.　　(B) 若 x_n 无界，则 y_n 必有界.

(C) 若 x_n 有界，则 y_n 必为无穷小量.　　(D) 若 $\dfrac{1}{x_n}$ 为无穷小量，则 y_n 必为无穷小量.

【答案】 (D)

【考点】 本题考查数列极限及其运算规律.

【解】 若取 $x_n=n$，$y_n\equiv 0$，则排除(A).

若取 $x_n=n+(-1)^{n-1}n$，$y_n=n+(-1)^n n$，则排除(B).

若取 $x_n\equiv 0$，则 y_n 可以为任何数列而不必是无穷小量，这也排除(C).

事实上，当 $\dfrac{1}{x_n}$ $(n\to\infty)$ 为无穷小量时，$y_n=(x_n y_n)\cdot\dfrac{1}{x_n}$ 为无穷小量 $x_n y_n$ 与无穷小量 $\dfrac{1}{x_n}$ 的乘积，从而必为无穷小量，故选(D).

【典型错误】 部分考生由于没有掌握"无界"与"无穷大"的区别而选(B).

例 1.1.3 设 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$ 均为非负数列，且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n=1$，$\lim\limits_{n\to\infty} c_n=\infty$，则必有（　　）

(A) $a_n<b_n$ 对任意 n 成立.　　(B) $b_n<c_n$ 对任意 n 成立.

(C) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n c_n$ 不存在.　　(D) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n c_n$ 不存在.

【答案】 (D)

【考点】 本题考查收敛数列的性质.

【解】 设 $a_n=\dfrac{1+(-1)^n}{n}$，$b_n=\dfrac{n-1}{n}$，它们满足题目的条件，但 $1=a_2>b_2=\dfrac{1}{2}$，故选项(A)不正确.

若取 $b_n=\dfrac{n+1}{n}$，$c_n=\ln n$，则选项(B)不正确.

若取 $a_n=\dfrac{1}{n^2}$，$c_n=n$，可以看出选项(C)不正确.

故只有选项(D)正确. 事实上,由于 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=1$,所以当 n 充分大时必有 $b_n>0$,且极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{b_n}=1$. 若极限 $\lim\limits_{n\to\infty} b_nc_n$ 存在,设为 A,则 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{b_n}\cdot b_nc_n\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{b_n}\cdot\lim\limits_{n\to\infty} b_nc_n=A$,与 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n=\infty$ 矛盾,即 $\lim\limits_{n\to\infty} b_nc_n$ 不存在.

【典型错误】 由于对收敛数列的保号性理解不准确而误选(A)或(B).

例 1.1.4 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\dfrac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{\sin\frac{n\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}}\right)$.

【考点】 本题考查判断数列极限存在的夹逼准则和用定积分的定义求极限的方法.

【解】 由于

$$\frac{1}{n+1}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{n\pi}{n}\right)<\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{\sin\frac{n\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}}$$
$$<\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{n\pi}{n}\right),$$

而由定积分的定义知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}=\int_0^1\sin\pi x\,dx=\frac{2}{\pi},$$

另一方面,因为

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}=\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n},$$

故有
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}=\frac{2}{\pi},$$

所以由夹逼准则得

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{\sin\frac{n\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}}\right)=\frac{2}{\pi}.$$

【典型错误】 主要问题是不会将极限化为定积分.

例 1.1.5 (1) 比较 $\int_0^1|\ln t|[\ln(1+t)]^n dt$ 与 $\int_0^1 t^n|\ln t|dt$ $(n=1,2,\cdots)$ 的大小,说明理由;

(2) 记 $u_n=\int_0^1|\ln t|[\ln(1+t)]^n dt$ $(n=1,2,\cdots)$,求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

【考点】 本题考查定积分的性质和利用夹逼准则求极限的方法.

【解】 (1) 当 $0\leqslant t\leqslant 1$ 时,因为 $0\leqslant\ln(1+t)\leqslant t$,所以

$$0\leqslant|\ln t|[\ln(1+t)]^n\leqslant t^n|\ln t|,$$

因此 $$\int_0^1 |\ln t|[\ln(1+t)]^n \mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t^n |\ln t| \mathrm{d}t.$$

(2) 因为

$$0 \leqslant u_n = \int_0^1 |\ln t|[\ln(1+t)]^n \mathrm{d}t \leqslant \ln^n 2 \cdot \int_0^1 |\ln t| \mathrm{d}t,$$

而反常积分 $\int_0^1 |\ln t| \mathrm{d}t$ 收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty} \ln^n 2 = 0$，故由夹逼准则知 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

【典型错误】 不知道 $\int_0^1 |\ln x| \mathrm{d}x = 1$.

例 1.1.6 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调有界，$\{x_n\}$ 为数列，下列命题正确的是(　　)

(A) 若 $\{x_n\}$ 收敛，则 $\{f(x_n)\}$ 收敛.　　(B) 若 $\{x_n\}$ 单调，则 $\{f(x_n)\}$ 收敛.

(C) 若 $\{f(x_n)\}$ 收敛，则 $\{x_n\}$ 收敛.　　(D) 若 $\{f(x_n)\}$ 单调，则 $\{x_n\}$ 收敛.

【答案】 (B)

【考点】 本题考查数列的单调有界准则.

【解】 在选项(B)中，因为数列 $\{x_n\}$ 单调，考虑到 $f(x)$ 是一个单调有界函数，所以数列 $\{f(x_n)\}$ 不仅单调，而且有界，从而数列 $\{f(x_n)\}$ 收敛.

事实上，若取 $f(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant 0,\\ -1, & x<0\end{cases}$ 和 $x_n=\dfrac{(-1)^n}{n}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$，且 $f(x_n)=\begin{cases}1, & n\text{ 为偶数},\\ -1, & n\text{ 为奇数},\end{cases}$ 这样就排除了选项(A)；若取 $f(x)=\arctan x$，$x_n=n$，则能排除(C)和(D).

例 1.1.7 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $0<x_1<\pi$，$x_{n+1}=\sin x_n$ $(n=1,2,\cdots)$.

(1) 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在，并求该极限；

(2) 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$.

【考点】 本题考查单调有界准则、等价无穷小量代换和洛必达法则.

【证】 (1) 由于当 $0<x<\pi$ 时，$0<\sin x<x$，所以当 $0<x_n<\pi$ 时，

$$0<x_{n+1}=\sin x_n<x_n<\pi.$$

已知 $0<x_1<\pi$，故由数学归纳法知对一切 $n=1,2,\cdots$，有 $0<x_{n+1}=\sin x_n<x_n$，即 $\{x_n\}$ 单调减少且 $x_n>0$.

由单调有界准则知 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在，记为 a，则 $a\geqslant 0$. 将 $x_{n+1}=\sin x_n$ 两边取极限，得 $a=\sin a$，易知 $a=0$，即有 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$.

(2) 因为 $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin x_n}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}},$$

又由(1)知 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$，故上式变形为

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0} \mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}\ln\frac{\sin x}{x}}.$$

因为 $$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\left(1+\frac{\sin x}{x}-1\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{\sin x}{x}-1\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{3x^2}=-\frac{1}{6},$$

所以 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=e^{-\frac{1}{6}}$，从而 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}=e^{-\frac{1}{6}}$.

【典型错误】 部分考生推理不严密，不会证单调性.

例 1.1.8 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3+x^2+1}{2^x+x^3}(\sin x+\cos x)=$______.

【答案】 0

【考点】 本题考查求"$\frac{\infty}{\infty}$"型未定式的极限和无穷小量的性质.

【解】

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+x^2+1}{2^x+x^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2+2x}{2^x\ln 2+3x^2}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{6x+2}{2^x\ln^2 2+6x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{6}{2^x\ln^3 2+6}=0,$$

且对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$，有 $|\sin x+\cos x|\leqslant\sqrt{2}$，即 $\sin x+\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界. 因为有界变量与无穷小量的乘积仍为无穷小量，所以原式为零.

【典型错误】 部分考生不知道有界变量与无穷小量的乘积仍为无穷小量而没有得出结果.

例 1.1.9 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}$.

【考点】 本题考查"$\frac{0}{0}$"型未定式极限的求法，涉及的知识点和方法有：等价无穷小量代换、重要极限或洛必达法则、泰勒公式（或麦克劳林公式）.

【解法 1】

$$\lim_{x\to 0}\frac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\sin(\sin x)}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos(\sin x)\cdot\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(\sin x)}{3x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\sin^2 x}{3x^2}=\frac{1}{6}.$$

【解法 2】 因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\sin(\sin x)}{x^3},$$

且

$$\sin(\sin x)=\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x+o(x^3),$$

所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\left[\sin x-\frac{1}{6}\sin^3 x+o(x^3)\right]}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{6}\sin^3 x+o(x^3)}{x^3}=\frac{1}{6}.$$

【解法 3】 令 $t=\sin x$，则

$$\lim_{x\to 0}\frac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}=\lim_{t\to 0}\frac{(t-\sin t)t}{t^4}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{t-\sin t}{t^3}=\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{3t^2}=\frac{1}{6}.$$

例 1.1.10 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^{\frac{1}{x}}-1)^{\frac{1}{\ln x}}$.

【答案】 e^{-1}

【考点】 本题考查"1^{∞}"型未定式极限的求法.

【解】 设 $y=(x^{\frac{1}{x}}-1)^{\frac{1}{\ln x}}$,则 $\ln y=\frac{\ln(x^{\frac{1}{x}}-1)}{\ln x}$,当 $x\to+\infty$时,$\frac{\ln x}{x}\to 0$,所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln y$ 是"$\frac{\infty}{\infty}$"型,从而

$$\lim_{x\to+\infty}\ln y=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(e^{\frac{\ln x}{x}}-1)}{\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{xe^{\frac{\ln x}{x}}}{e^{\frac{\ln x}{x}}-1}\cdot\frac{1-\ln x}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{\ln x}{x}}}{\frac{\ln x}{x}}\cdot\frac{1-\ln x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\ln x}{\ln x}=-1,$$

得 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^{\frac{1}{x}}-1)^{\frac{1}{\ln x}}=e^{-1}$.

例 1.1.11 若 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=0$,则 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{6+f(x)}{x^2}$ 等于(　　)

(A) 0.　　(B) 6.　　(C) 36.　　(D) ∞.

【答案】 (C)

【考点】 本题考查函数极限的计算和泰勒公式的应用.

【解法 1】 $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{6+f(x)}{x^2}+\frac{\sin 6x-6x}{x^3}\right]$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{6+f(x)}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{6\cos 6x-6}{3x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{6+f(x)}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{-36\sin 6x}{6x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{6+f(x)}{x^2}-36\right]=0,$$

故选(C).

【解法 2】 $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{6x-\frac{1}{3!}(6x)^3+o(x^3)+xf(x)}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{6+f(x)}{x^2}-36\right]=0,$$

故选(C).

【典型错误】 选(A). 错在:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x\left[\frac{\sin 6x}{x}+f(x)\right]}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 6x}{x}+f(x)}{x^2}=0,$$

再把$\frac{\sin 6x}{x}$用 6 代替，便得此极限为 0. 一定要注意在有加、减的式子中不能随便用等价无穷小量替换.

此外，不看 $f(x)$ 是否满足条件就用洛必达法则也是错误的.

例 1.1.12 求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)$.

【考点】 本题考查分段函数在分段点处极限存在的充分必要条件.

【解】 因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{2e^{-\frac{4}{x}}+e^{-\frac{3}{x}}}{e^{-\frac{4}{x}}+1}+\frac{\sin x}{x}\right)=0+1=1$,

$$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}-\frac{\sin x}{x}\right)=2-1=1,$$

所以
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=1.$$

【典型错误】 没有讨论左、右极限.

例 1.1.13 极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{x^2}{(x-a)(x+b)}\right]^x=($　　$)$

(A) 1.　　(B) e.　　(C) e^{a-b}.　　(D) e^{b-a}.

【答案】 (C)

【考点】 本题考查“1^∞”型未定式极限的求法，涉及如下主要方法：利用重要极限求极限，利用洛必达法则求极限.

【解法 1】 当 $a=b$ 时，

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2}{(x-a)(x+b)}\right]^x=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{a^2}{x^2-a^2}\right)^{\frac{x^2-a^2}{a^2}}\right]^{\frac{a^2x}{x^2-a^2}}=e^0=1;$$

当 $a\neq b$ 时，

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2}{(x-a)(x+b)}\right]^x=\lim_{x\to\infty}\left\{\left[1+\frac{(a-b)x+ab}{(x-a)(x+b)}\right]^{\frac{(x-a)(x+b)}{(a-b)x+ab}}\right\}^{\frac{(a-b)x+ab}{(x-a)(x+b)}\cdot x}=e^{a-b}.$$

综上可知应选(C).

【解法 2】 $\lim\limits_{x\to\infty}\ln\left[\frac{x^2}{(x-a)(x+b)}\right]^x=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2\ln x-\ln(x-a)-\ln(x+b)}{\frac{1}{x}}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{x}-\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+b}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{(a-b)x^3+2abx^2}{x(x-a)(x+b)}=a-b,$$

所以
$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2}{(x-a)(x+b)}\right]^x=e^{a-b}.$$

例 1.1.14 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_0^x(1+t^2)e^{t^2-x^2}\,dt$.

【考点】 本题主要考查“$\frac{\infty}{\infty}$”型极限的计算方法和积分上限函数的求导方法.

【解】 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\int_0^x(1+t^2)e^{t^2-x^2}dt=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\int_0^x(1+t^2)e^{t^2}dt}{xe^{x^2}}$ （"$\dfrac{\infty}{\infty}$"型）

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(1+x^2)e^{x^2}}{(1+2x^2)e^{x^2}}=\frac{1}{2}.$$

【典型错误】 部分考生对积分号下的 e^{-x^2} 没有提出来而直接用洛必达法则.

例 1.1.15 已知 $f(x)$在 $x=0$ 处可导，且 $f(0)=0$，则$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2f(x)-2f(x^3)}{x^3}=$（ ）

(A) $-2f'(0)$. (B) $-f'(0)$. (C) $f'(0)$. (D) 0.

【答案】 (B)

【考点】 本题考查利用导数定义求极限的方法.

【解】 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2f(x)-2f(x^3)}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2f(x)-x^2f(0)-2f(x^3)+2f(0)}{x^3}$

$$=\lim_{x\to0}\left[\frac{f(x)-f(0)}{x}-2\frac{f(x^3)-f(0)}{x^3}\right]$$

$$=f'(0)-2f'(0)=-f'(0),$$

故应选(B).

【典型错误】 使用洛必达法则计算.

例 1.1.16 已知函数 $F(x)=\dfrac{\int_0^x\ln(1+t^2)dt}{x^a}$，设 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=\lim\limits_{x\to0^+}F(x)=0$，求 a 的取值范围.

【考点】 本题考查积分上限函数的求导方法和洛必达法则.

【解】 当 $a\leqslant0$ 时，

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x\ln(1+t^2)dt}{x^a}=\lim_{x\to+\infty}x^{-a}\int_0^x\ln(1+t^2)dt=+\infty,$$

与已知条件矛盾，故 $a>0$.

因为

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^x\ln(1+t^2)dt}{x^a}=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(1+x^2)}{ax^{a-1}}=\lim_{x\to0^+}\frac{x^2}{ax^{a-1}}=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{a}x^{3-a}=0,$$

所以 $3-a>0$，即 $a<3$.

又因为

$$0=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x\ln(1+t^2)dt}{x^a}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+x^2)}{ax^{a-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2x}{1+x^2}}{a(a-1)x^{a-2}}=\frac{2}{a(a-1)}\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{3-a}}{1+x^2},$$

所以 $3-a<2$，即 $a>1$.

综上得 $1<a<3$.

【典型错误】 不知道反常积分 $\int_0^{+\infty}\ln(1+x^2)\mathrm{d}x$ 是发散的.

例 1.1.17　已知函数 $f(x)$ 连续,且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos[xf(x)]}{(\mathrm{e}^{x^2}-1)f(x)}=1$,则 $f(0)=$______.

【答案】 2

【考点】 本题考查利用等价无穷小量代换求极限的方法及函数连续的概念.

【解】 因为函数 $f(x)$ 连续,故 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)$. 由题设知

$$1=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos[xf(x)]}{(\mathrm{e}^{x^2}-1)f(x)}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2f^2(x)}{x^2f(x)}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}f(x)=\frac{1}{2}f(0),$$

故 $f(0)=2$.

例 1.1.18　设 $f(x)=\ln^{10}x,g(x)=x,h(x)=\mathrm{e}^{\frac{x}{10}}$,则当 x 充分大时有(　　)

(A) $g(x)<h(x)<f(x)$.　　(B) $h(x)<g(x)<f(x)$.

(C) $f(x)<g(x)<h(x)$.　　(D) $g(x)<f(x)<h(x)$.

【答案】 (C)

【考点】 本题考查无穷大量的比较.

【解】 由于

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{f(x)}=+\infty,\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{h(x)}{g(x)}=+\infty,$$

所以当 x 充分大时,有 $f(x)<g(x)<h(x)$,故选(C).

【典型错误】 不会利用求极限的方法进行比较.

例 1.1.19　确定常数 a,b,c 的值,使 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{ax-\sin x}{\int_b^x\frac{\ln(1+t^3)}{t}\mathrm{d}t}=c\ (c\neq0)$.

【考点】 本题考查无穷小量的比较、洛必达法则和积分上限函数的导数.

【解】 由于当 $x\to0$ 时 $ax-\sin x\to0$,且由已知 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{ax-\sin x}{\int_b^x\frac{\ln(1+t^3)}{t}\mathrm{d}t}=c\neq0$,所以应有当 $x\to0$ 时 $\lim\limits_{x\to0}\int_b^x\dfrac{\ln(1+t^3)}{t}\mathrm{d}t=0$,从而 $b=0$.

再用洛必达法则,有

$$\lim_{x\to0}\frac{ax-\sin x}{\int_b^x\frac{\ln(1+t^3)}{t}\mathrm{d}t}=\lim_{x\to0}\frac{a-\cos x}{\frac{\ln(1+x^3)}{x}}=\lim_{x\to0}\frac{a-\cos x}{\frac{x^3}{x}}=\lim_{x\to0}\frac{a-\cos x}{x^2},$$

同样,应有 $a-\cos x\to0\ (x\to0)$,故 $a=1$. 继续用洛必达法则或用等价无穷小量代换,可得 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$,于是得 $c=\dfrac{1}{2}$.

【典型错误】 答 b 可为任意常数. 其原因是考生第一步就用洛必达法则,而没有考察运用洛必达法则的条件之一:"分母的极限为 0". 由于在后续的计算过程中不再出现常数 b,就断言 b 可为任意常数.

例 1.1.20 设数列的通项为 $x_n=\begin{cases}\dfrac{n^2+\sqrt{n}}{n}, & \text{若 } n \text{ 为奇数},\\ \dfrac{1}{n}, & \text{若 } n \text{ 为偶数},\end{cases}$ 则当 $n\to\infty$ 时，x_n 是(　　)

(A) 无穷大量.　　(B) 无穷小量.　　(C) 有界变量.　　(D) 无界变量.

【答案】 (D)

【考点】 本题主要考查无穷大量、无穷小量、有界变量和无界变量等概念及判断方法.

【解】 应选择(D). 这是因为

$$\lim_{n\to\infty} x_{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)^2+\sqrt{2n-1}}{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\left(2n-1+\frac{1}{\sqrt{2n-1}}\right)=+\infty,$$

所以 x_n 不是有界变量，更不可能是无穷小量，故选项(B)和(C)不正确.

又因为

$$\lim_{n\to\infty} x_{2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}=0,$$

所以对于任意的 $M>0$，不可能存在 N，当 $n>N$ 时，恒有 $|x_n|>M$，即选项(A)也不正确.

【典型错误】 部分考生没有弄清无穷大量与无界变量之间的区别而选(A).

例 1.1.21 设 $f(x)=\int_0^{1-\cos x}\sin(t^2)\mathrm{d}t$，$g(x)=\frac{x^5}{5}+\frac{x^6}{6}$，则当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 是 $g(x)$ 的(　　)

(A) 低阶无穷小量.　　(B) 高阶无穷小量.

(C) 等价无穷小量.　　(D) 同阶但不等价的无穷小量.

【答案】 (B)

【考点】 本题主要考查无穷小量阶的比较和积分上限函数的求导方法.

【解】 因为 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^{1-\cos x}\sin(t^2)\mathrm{d}t}{\frac{x^5}{5}+\frac{x^6}{6}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(1-\cos x)^2\cdot\sin x}{x^4+x^5}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)^2 x}{x^4+x^5}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^4}{4}x}{x^4+x^5}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{4}}{x+1}=0,$$

所以 $f(x)$是 $g(x)$的高阶无穷小量.

这里用到等价无穷小量代换：

$$\sin(1-\cos x)^2\sim(1-\cos x)^2\sim\frac{x^4}{4}.$$

【典型错误】 有的考生用下述方法求解：

由
$$f'(x)=\sin(1-\cos x)^2\sin x\sim(1-\cos x)^2 x\sim\frac{x^5}{4},$$

推知 $f(x)$应是与 x^6 同阶的无穷小量，又 $g(x)=\frac{x^5}{5}+\frac{x^6}{6}$的最高次项是$\frac{x^6}{6}$，所以 $f(x)$与 $g(x)$是同阶但不等价的无穷小量，从而选择(D).

例 1.1.22 已知当 $x\to 0$ 时，$f(x)=3\sin x-\sin 3x$ 与 cx^k 是等价无穷小量，则(　　)