

普通高等教育“十二五”规划教材

泛函分析引论

徐景实 林诗游◎编著

Introduction to Functional Analysis



机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

普通高等教育“十二五”规划教材

泛函分析引论

徐景实 林诗游 编著



机械工业出版社

本书是数学系高年级本科生或工科研究生的泛函分析课程入门教材。

全书主要内容有:度量空间、紧性、线性赋范空间、压缩映射原理、凸集与不动点、内积空间、线性算子和线性泛函的定义、Baire 纲推理、开映像定理、线性泛函延拓定理、共轭空间、弱收敛、自反空间、Riesz 定理及其应用、 L_p 的共轭空间、线性空间上的微分学、谱的概念和基本性质、紧算子及其谱性质、投影算子、自伴算子、正常算子和酉算子、Hilbert 空间上的紧自伴算子、谱定理、解析泛函演算等。每节后配有练习,书后配有名词索引。

本书可作为相关课程教材,也可作为教师和研究人员参考书。

图书在版编目(CIP)数据

泛函分析引论/徐景实, 林诗彦编著. —北京:机械工业出版社, 2014. 3

普通高等教育“十二五”规划教材

ISBN 978-7-111-45713-8

I. ①泛… II. ①徐…②林… III. ①泛函分析—高等学校—教材 IV. ①O177

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 023486 号

机械工业出版社(北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)

策划编辑:韩效杰 责任编辑:韩效杰 汤 嘉

封面设计:路恩中 责任印制:刘 岚

北京圣夫亚美印刷有限公司印刷

2014 年 3 月第 1 版第 1 次印刷

184mm × 260mm · 11.25 印张 · 231 千字

标准书号:ISBN 978-7-111-45713-8

定价:29.00 元

凡购本书,如有缺页、倒页、脱页,由本社发行部调换

电话服务

网络服务

社服务中心:(010)88361066

教材网:<http://www.cmpedu.com>

销售一部:(010)68326294

机工官网:<http://www.cmpbook.com>

销售二部:(010)88379649

机工官博:<http://weibo.com/cmp1952>

读者购书热线:(010)88379203

封面无防伪标均为盗版

前 言

泛函分析兴起于20世纪20年代,它是从变分法、数学物理方程、函数论等研究中发展起来的一门重要的独立学科.当时人们试图用统一的数学观点来阐述自19世纪以来取得的重大数学成果,并考虑将之从有穷维欧氏空间推广到无穷维抽象空间中去.此外,对量子力学方面的一些相关数学问题的研究也推动了泛函分析的形成和发展.1932年,波兰数学家Banach出版了第一部泛函分析专著,开启了泛函分析学科化的先河.

线性泛函分析的基本理念是通过各种映射来探寻两个拓扑线性空间之间的关系,其主要特点是运用几何与代数的思想方法研究分析学方面的相关课题,因此可以看作是无穷维的分析学.泛函分析以其他数理学科所提供的研究思路和成果来不断提取出自己的研究课题,并形成了许多重要分支;广泛应用于概率论、计算数学、量子物理、控制论、最优化理论等学科中,强有力地推动了科学的发展.

本书是一部关于泛函分析的入门教材,主要面向高校数学系本科生及工科研究生,内容包含了线性泛函分析中的基础知识和理论,本书关注有穷维空间相关定理在无穷维空间的推广及应用,力求以最简明的方式去阐述其中最为核心的内容,并更加接近科学研究中的实际应用.本书与已有的泛函分析教材在内容的处理方面主要有以下几个不同:①关于度量空间的完备化,是通过把它嵌入到一个完备空间从而得到完备化空间的存在性,这样省去了学生对经典的完备化构造过程理解的困难.②指出了开映像定理、闭图像定理、逆算子定理、范数等价定理的等价性,帮助学生更好的理解这些重要的定理.③证明凸函数控制的线性泛函的延拓定理,将次线性泛函的延拓定理作为推论,不但简化了证明,而且扩大了定理的应用范围.④对应用中很重要的Lebesgue函数空间的一致凸性作了详细的介绍,由此给出Lebesgue函数空间的对偶空间.⑤对无穷维空间上的微分理论和凸分析做了简单的介绍.这些内容将会促使学生继续学习现代数学的最新内容.

全书共分为3章.

第1章介绍度量空间的相关概念和性质,这是学习泛函分析需要的预备知识,其中包括完备赋范线性空间(Banach空间)、完备内积空间(Hilbert空间)、不动点定理以及应用等.

第2章讲解各类算子,特别是有界线性算子和线性泛函,介绍了Riesz定理、开映像定

理、共鸣定理、Hahn-Banach定理等一系列线性泛函分析中经典而重要的成果.

第3章论述了线性算子的谱的基本理论,特别是对紧算子的谱性质进行了较大篇幅的阐述.

全书的符号多是通用的,为了方便读者,向量在许多地方用黑体表示,但是在不至于混淆的地方也未用黑体表示,特别地,0可能表示数字零,零向量,零函数.读者是容易分辨它们在不同情况下的含义的.符号 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示内积也可能表示泛函对元素的作用.

本书是作者在多年给本科生、数学教育硕士和特岗硕士的授课讲义的基础上修改而成的.在此感谢同学们在学习过程中给我们提出的一些建议.由于作者水平有限,书中难免出现一些问题和疏漏,希望读者能不吝指出其中的不足之处,在此不甚感激.本书部分地得到国家自然科学基金(11226167,11361020),海南省自然科学基金(113004)和海南师范大学自编教材计划的资助,同时感谢他们的支持,最后也要特别感谢机械工业出版社编辑同志们的帮助和支持.

目 录

前言	III
第1章 度量空间	1
1.1 度量空间简介	1
练习1.1	7
1.2 紧性	8
练习1.2	14
1.3 线性赋范空间	14
1.3.1 线性赋范空间的定义与例子	14
1.3.2 最佳逼近	21
1.3.3 商空间	23
1.3.4 有穷维空间的刻画	24
练习1.3	24
1.4 压缩映射原理	26
练习1.4	30
1.5 凸集与不动点	31
1.5.1 定义与基本性质	31
1.5.2 Brouwer和Schauder不动点定理	36
练习1.5	38
1.6 内积空间	38
1.6.1 内积空间的定义	39
1.6.2 正交与正交基	43
练习1.6	49

第2章 线性算子与线性泛函	51
2.1 线性算子和线性泛函的定义	51
练习2.1	57
2.2 Baire纲推理	58
练习2.2	62
2.3 开映像定理等	63
练习2.3	66
2.4 线性泛函延拓定理	67
2.4.1 Hahn-Banach延拓定理	67
2.4.2 凸集的分离定理	70
2.4.3 凸规划的Lagrange乘子	73
练习2.4	76
2.5 共轭空间、弱收敛、自反空间	77
2.5.1 弱收敛	77
2.5.2 二次共轭空间	81
2.5.3 *弱拓扑	84
2.5.4 自反空间	86
2.5.5 算子空间上的拓扑	88
练习2.5	89
2.6 Riesz定理及其应用	90
练习2.6	97
2.7 L^p 的共轭空间	98
练习2.7	103
2.8 线性空间上的微分学	104
2.8.1 强微分(Fréchet微分)	104
2.8.2 弱微分(Gâteaux微分)	108
2.8.3 隐函数存在定理和逆映射定理	110
2.8.4 凸函数的弱可微性	112
练习2.8	120
第3章 线性算子的谱	122
3.1 谱的概念和基本性质	122
练习3.1	133
3.2 紧算子及其谱性质	134

练习3.2	143
3.3 投影算子、自伴算子、正常算子和酉算子	144
练习3.3	151
3.4 Hilbert空间上的紧自伴算子	152
练习3.4	155
3.5 谱定理	155
练习3.5	157
3.6 解析泛函演算	157
练习3.6	161
参考文献	163
索引	166

第 1 章 度量空间

泛函分析的研究对象是线性赋范空间. 它们是度量空间, 当然更是拓扑空间. 因此泛函分析的许多基本概念可以从度量空间或者拓扑空间说起. 虽然度量空间在数学分析中已经出现, 但是可能有些读者还不够熟悉, 所以本章先介绍度量空间, 然后再介绍线性赋范空间和内积空间.

1.1 度量空间简介

定义1.1.1 设 X 是一个非空集合, ρ 是 $X \times X$ 上一个实函数, 对所有 $x, y, z \in X$ 满足:

(i) $\rho(x, y) \geq 0$;

(ii) $\rho(x, y) = 0$, 当且仅当 $x = y$;

(iii) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(y, z)$, 即三角不等式.

则称 ρ 为 X 上的一个距离或度量. 此时 (X, ρ) 称为度量空间. 有时为了简便称 X 为度量空间.

若 ρ 是 X 上的一个度量, 则由条件(ii), 条件(iii)知对 $\forall x, y \in X$, 有 $\rho(x, y) = \rho(y, x)$, 即度量是对称函数.

常见的度量空间有:

例1.1.1 (a) 记 \mathbb{R} 为全体实数的集合. $\forall x, y \in \mathbb{R}$, 定义 $\rho(x, y) = |x - y|$, 则 (\mathbb{R}, ρ) 为一度量空间. 这就是数学分析中 \mathbb{R} 上的度量.

(b) 设 X 是一个非空集合, 定义 $\rho: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ 为

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{若 } x = y, \\ 1, & \text{若 } x \neq y. \end{cases}$$

则 (X, ρ) 为度量空间, 此时称 ρ 为离散度量, (X, ρ) 为离散度量空间.

例1.1.2 设 $1 \leq p < +\infty$, 定义 $\rho_p: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 为

$$\rho_p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p \right)^{1/p};$$

$$\rho_\infty(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max\{|x_i - y_i| : 1 \leq i \leq n\},$$

这里 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. 则 (\mathbb{R}^n, ρ_p) 为度量空间, 当 $p = 2$ 时, 称为欧氏空间.

显然 ρ_p 满足定义1.1.1中的条件(i)和条件(ii), 而条件(iii)可以由如下的Minkowski不等式得到,

$$\left(\sum_{i=1}^n |a_i + b_i|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^n |b_i|^p \right)^{1/p}, \quad \forall a_i, b_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n.$$

当 (X, ρ) 是一个度量空间时, 很容易将 \mathbb{R} 上的概念推广到 (X, ρ) 上. 设 $a \in X$, $r > 0$, 集合 $B(a, r) = \{x \in X : \rho(a, x) < r\}$ 称为以 a 为球心, r 为半径的开球. 集合 $\bar{B}(a, r) = \{x \in X : \rho(a, x) \leq r\}$ 称为以 a 为球心, r 为半径的闭球.

定义1.1.2 设 (X, ρ) 是一个度量空间, $E \subset X$.

(i) 若 $\exists r > 0$ 使得 $B(a, r) \subset E$, 则称 a 为 E 的内点, E 的所有内点的全体称为 E 的内部. 记为 $\text{int } E$ 或 $\overset{\circ}{E}$;

(ii) 若 a 为 E 的内点, 则称 E 为 a 的邻域;

(iii) 若 E 的每个点都是 E 的内点, 则称 E 为开集;

(iv) 若 a 的任意邻域有 E 中异于 a 的点, 则称 a 为 E 的聚点;

(v) E 与 E 的全体聚点的并集称为 E 的闭包. 记为 \bar{E} ;

(vi) 若 E 的聚点全体包含在 E 内, 则称 E 为闭集;

(vii) 若存在 $r > 0$ 使得 $B(a, r) \cap E = \{a\}$, 则称 a 为 E 的一个孤立点;

(viii) 若对任意 $r > 0$, $B(a, r) \cap E \neq \emptyset$, $B(a, r) \cap E^c \neq \emptyset$, 则称 a 为 E 的一个边界点. 边界点的全体称为边界.

例1.1.3 若 x 为离散度量空间中的任意点, 则 $\{x\}$ 既是开集又是闭集. 事实上离散度量空间中的任意点集既是开集又是闭集. 离散度量空间中的任意点集没有聚点, 因为每一个点都是孤立点.

只有离散度量空间具有上面的性质. 但是在后面我们要学习的空间多数不是离散度量空间. 习惯上约定空集既是开集又是闭集. 任意集合的内部为开集, 因为任意开球是开集. 任意集合的闭包是闭集, 因为若 a 是集合 E 的闭包的聚点, 则必是 E 的聚点. 下面的命题说明开集与闭集具有对偶性.

命题1.1.1 设 E 是度量空间 (X, ρ) 的子集, 则 E 是开集等价于 E 的余集 E^C 为闭集.

证明 若 E 为开集, 则对任意 $x \in E$, 存在 $r > 0$ 使得 $B(x, r) \subset E$, 即 x 不是 E^C 的聚点, 故 E^C 的聚点包含在 E^C 内, 所以 E^C 为闭集.

反之, 若 E^C 为闭集, 则 E 中的任意点不是 E^C 的聚点, 所以存在 $r > 0$ 使得 $B(x, r) \cap E^C = \emptyset$, 即 x 为 E 的内点. 故 E 为开集. \square

很容易证明任意个开集的并为开集, 任意个闭集的交为闭集. 有限个开集的交为开集, 有限个闭集的并为闭集.

若 E 是度量空间 (X, ρ) 的子集, 则 ρ 限制在 $S \times S$ 上也是一个度量, 称为由 ρ 在 S 上导出的度量, 此时称 (S, ρ) 为 X 的度量子空间. 若 $x \in S$, $r > 0$, 则 $S \cap B(x, r)$ 和 $S \cap \bar{B}(x, r)$ 分别是 x 在子空间 S 内以 x 为球心, r 为半径的开球和闭球. 不但 S 中的开球和闭球具有此形式, 一般地, 子空间 S 中的开集和闭集也有这种形式.

命题1.1.2 设 S 是度量空间 (X, ρ) 的子空间, A 是 S 中的子集, 则 A 是 S 内的开集, 当且仅当存在 X 中的开集 E 使得 $A = S \cap E$, A 是 S 内的闭集当且仅当存在 X 中的闭集 E 使得 $A = S \cap E$.

证明 只对开集的情况进行证明. 闭集的情况类似可证. 设 $A = S \cap E$, E 是 X 的开集, 若 $x \in A$, 则存在 $r > 0$ 使得 $B(x, r) \subset E$. 因此有

$$x \in S \cap B(x, r) \subset S \cap E.$$

而 $S \cap B(x, r)$ 即是 S 内中心在 x , 半径为 r 的球, 即 x 是 $S \cap E$ 在子空间 S 内的内点. 因此 $A = S \cap E$ 是 S 内的开集.

反之, 设 A 是 S 内的开集, $\forall x \in A$, 存在 $r_x > 0$ 使得 $S \cap B(x, r_x) \subset A$, 因此

$$A = \bigcup_{x \in A} (S \cap B(x, r_x)) = S \cap \bigcup_{x \in A} B(x, r_x).$$

而 $\bigcup_{x \in A} B(x, r_x)$ 是 X 中的开集. \square

定义1.1.3 设 (X, ρ) 为度量空间, $\{x_n\}$ 是 X 中的点列, $x \in X$. 若对于任意 $r > 0$, 存在 N 使得当 $n > N$ 时, 有 $x_n \in B(x, r)$, 则称 $\{x_n\}$ 收敛到 x . 记为 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$. 此时又称点列收敛.

由于 (X, ρ) 为度量空间, 因此若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 则此极限必是唯一的. 什么样的点列存在极限呢? 下面先看必要条件.

设 $\{x_n\}$ 是度量空间 (X, ρ) 中的点列, 若对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 N 使得当 $n, m > N$ 时有 $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$, 则称 $\{x_n\}$ 为基本列, 或Cauchy列. 由极限的定义可知, 若 $\{x_n\}$ 收敛, 则 $\{x_n\}$ 必为基本列. 但反之不成立.

若度量空间 X 中的每一个基本列在 X 中都存在极限, 则称 X 为完备空间.

在前面我们定义了闭集. 之所以称闭集为闭集, 是因为闭集对极限运算封闭.

命题1.1.3 S 是度量空间 X 中的闭集, 当且仅当若 $\{x_n\} \subset S$ 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 必有 $a \in S$.

证明 若 S 为闭集, 则 S^C 为开集, 若 $\{x_n\} \subset S$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 则必有 $a \in S$. 否则, 若 $a \in S^C$, 则存在一个 $r > 0$, 使得 $B(a, r) \subset S^C$. 由极限的定义知 a 不可能是 x_n 的极限.

反之, 若 S 不是闭集, 即 S^C 不是开集, 则存在 $a \in S^C$, 但 a 不是 S^C 的内点, 则对 $\forall n \in \mathbb{N}$, 存在 $x_n \in S$, 使得 $\rho(a, x_n) < 1/n$, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$. 这与假设 $a \in S^C$ 矛盾. \square

下面的命题说明了完备性与闭集的关系.

命题1.1.4 度量空间的完备子空间必是闭集, 完备度量空间的闭子空间必是完备的.

证明 设 S 是度量空间 X 的完备子空间. 若 $\{x_n\} \subset S$ 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$. 则 $\{x_n\}$ 是 S 中的基本列, 由 S 的完备性, 则 $x \in S$. 由命题1.1.3知 S 为闭集.

设 S 是完备度量空间 X 的闭子集. 若 $\{x_n\} \subset S$ 是基本列, 则有 $x \in X$, 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$. 由于 S 是闭集. 由命题1.1.3知 $x \in S$. 由此说明 S 是完备的. \square

例1.1.4 $[0, 1]$ 作为 \mathbb{R} 中的子空间是完备的, 但是 $(0, 1)$ 就不是完备的.

设 A, B 是 X 中的子集, 若 $B \subset \bar{A}$, 则称 A 是 B 的稠密集. 若 $\bar{A} = X$, 则称 A 在 X 内稠密, 或处处稠密. A 是 B 的稠密集等价于 B 中的任意元素可以由 A 中的元素任意逼近, 或者说对 $\forall y \in B$, 存在 A 中的点列 $\{x_n\}$ 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = y$.

若 X 存在一个可数的稠密集, 这里的可数包括空集、有限集和可数无穷集, 则称 X 为可分的. \mathbb{R} 是可分的是因为全体有理数是 \mathbb{R} 的可数稠密集; 同样的对于任意正整数 n , \mathbb{R}^n 也是可分的.

命题1.1.5 设 X 是一个可分的度量空间, 则 X 中的任何子集都是可分的.

证明 设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 X 的稠密子集. E 是 X 的一个非空子集. 对任意 $n \in \mathbb{N}$, $\forall k \in \mathbb{N}$, 则任取 $y_{n,k} \in B(x_n, \frac{1}{k}) \cap E$. 那么 $\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} \{y_{n,k}\}$ 至多为可数集. 下证此集合是 E 的稠密集.

对任意 $z \in E$, 任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $k \in \mathbb{N}$ 使得 $1/k < \varepsilon$, 则存在 x_n 使得 $z \in B(x_n, 1/2k)$. 这对于 $y_{n,2k}$, (此时 $y_{n, \frac{1}{2k}}$ 存在, 因为 $z \in B(x_n, \frac{1}{2k}) \cap E$), 则有 $z \in B(y_{n,2k}, \frac{1}{k}) \subset B(y_{n,2k}, \varepsilon)$. \square

这个结论导出在一般的拓扑空间中的一个定义, 设 X 是一个可分的拓扑空间, 若 X 中的任何子集都是可分的, 则称 X 是可分遗传的. 命题1.1.5说明可分的度量空间是可分遗传的.

由命题1.1.4知 $I = (0, 1]$ 在实数集 \mathbb{R} 上的通常度量下不完备. 虽然一个度量空间不一定完备, 但由命题1.1.4和练习1.1中14题, 它可以看成是某个完备空间的稠密子集. 设 X 为度

量空间, Y 是包含 X 的完备度量空间, 若 $\bar{X} = Y$, 则称 Y 是 X 的完备化空间. 由练习 1.1 中 14 题知任意度量空间必有完备化空间. 不难证明在等距同构的意义下完备化空间是唯一的.

设 X, Y 是度量空间, f 是从 X 到 Y 内的映射, 若对 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $x \in B(a, \delta)$ 时, 有 $f(x) \in B(f(a), \varepsilon)$, 则称 f 在 a 处连续. 否则称 f 在 a 处间断. 若 f 在 X 内的每一个点处都连续, 则称 f 在 X 上连续.

在整个空间 X 上的连续性, 有下列等价判别. 记 $f^{-1}(A) = \{a \in X : f(a) \in A\}$.

命题 1.1.6 设 X, Y 是度量空间, f 是从 X 到 Y 内的映射, 则下面三个陈述等价:

- (i) f 在 X 上连续;
- (ii) 对任意 Y 中的开集 A , $f^{-1}(A)$ 为 X 的开集;
- (iii) 对任意 Y 中的闭集 A , $f^{-1}(A)$ 为 X 的闭集.

证明 (i) \Rightarrow (ii) 设 f 在 X 上连续, A 是 Y 中的开集, 若 $a \in f^{-1}(A)$, 即 $f(a) \in A$. 由于 A 为开集, 则存在 $\varepsilon > 0$ 使得 $B(f(a), \varepsilon) \subset A$. 再由于 f 在 a 处连续, 则存在 $\delta > 0$ 使得当 $x \in B(a, \delta)$ 时有 $f(x) \in B(f(a), \varepsilon) \subset A$. 即 $B(a, \delta) \subset f^{-1}(A)$. 也就是 a 为 $f^{-1}(A)$ 的内点. 由 a 的任意性得 $f^{-1}(A)$ 为开集.

(ii) \Rightarrow (i) 若 $a \in X$, $\forall \varepsilon > 0$, 记 $A = B(f(a), \varepsilon)$, 则 A 为 Y 中的开集, 且 $a \in f^{-1}(A)$. 由于 $f^{-1}(A)$ 为开集, 所以存在 $\delta > 0$ 使得 $B(a, \delta) \subset f^{-1}(A)$, 即当 $x \in B(a, \delta)$, 就有 $f(x) \in B(f(a), \varepsilon)$. 因此 f 在 a 处连续. 由 a 的任意性知 f 在 X 上连续.

(ii) \Leftrightarrow (iii) 这是因为 A 为闭集, 当且仅当 A^C 为开集, 且 $[f^{-1}(A)]^C = f^{-1}(A^C)$. □

此命题说明若 f 是两个度量空间之间的映射, 则 f 在整个空间连续等价于任何开集的逆像(原像)都是开集, 但一般地, f 不是将开集映射到开集. 例如直线 \mathbb{R} 上的常量函数是连续的, 但是它将开集映射到闭集.

下面是映射的基本性质, 其证明留作练习.

命题 1.1.7 设 X, Y, Z 是度量空间, f, g 是从 X 到 Y 内的映射, h 是从 Y 到 Z 内的映射.

- (i) 若 f 在 a 处连续, 而 h 在 $f(a)$ 处连续, 则 $h \circ f$ 在 a 处连续;
- (ii) 若 Y 为数域 \mathbb{R} , f, g 在 a 处连续, 则 $f \pm g, f \cdot g, \max\{f(x), g(x)\}, \min\{f(x), g(x)\}, f(x)/g(x) (g(a) \neq 0)$ 都在 a 处连续.

定义 1.1.4 设 $(X, \rho), (Y, d)$ 为度量空间, f 是从 X 到 Y 内的映射, 若 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使得当 $\rho(x, y) < \delta$ 时, 有 $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$, 则称 f 一致连续.

若对任意 $x, y \in X$, 有 $d(f(x), f(y)) < \rho(x, y)$, 则称 f 为非扩张映射.

因此, 非扩张映射必是一致连续的. 下面的延拓定理是非常有用的.

定理1.1.1 设 (X, ρ) 是度量空间, (Y, d) 是完备度量空间, D 是 X 的稠密子集. 若 f 是从 D 到 Y 内的一致连续映射, 则存在 X 上的唯一连续映射使得 $F(x) = f(x), \forall x \in D$ 且 F 在 X 上一致连续.

证明 由 F 在 D 上一致连续, 则有对 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $x, y \in D$ 且 $\rho(x, y) < \delta$ 时, 有 $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$. 由于 D 是 X 的稠密子集, $\forall x \in X$, 存在 $x_n \in D$ 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$. 即 $\exists N$ 使得当 $n, m > N$ 时有 $\rho(x_n, x_m) < \delta$. 此时有 $d(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon$. 因此 $f(x_n)$ 是 Y 的基本列. 由 Y 的完备性, 存在极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$, 记此极限为 $F(x)$. 则 $F(x)$ 与 x_n 的选取无关. 因为若 $x'_n \rightarrow x$, 则 $x_1, x'_1, x_2, x'_2, \dots, x_n, x'_n, \dots$ 也收敛到 x , 且 $f(x_1), f(x'_1), f(x_2), f(x'_2), \dots, f(x_n), f(x'_n), \dots$ 收敛. 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x'_n)$. 显然 $\forall x \in D$, 有 $F(x) = f(x)$. 下面说明 $F(x)$ 一致连续, $\forall \varepsilon > 0$, 设 $x, y \in X$, 若 $\rho(x, y) < \delta/3$, 任取 $x_n, y_n \in D$ 使得 $x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow y$. 因此有 $F(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n), F(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n)$, 且 $\rho(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, y_n)$. 所以存在 N , 当 $n > N$ 时有 $d(F(y), f(y_n)) < \varepsilon, d(F(x), f(x_n)) < \varepsilon$ 且 $\rho(x_n, y_n) < \delta$. 因此

$$d(F(x), F(y)) \leq d(F(x), f(x_n)) + d(f(x_n), f(y_n)) + d(f(y_n), F(y)) < 3\varepsilon.$$

故 $F(x)$ 在 D 上一致连续. □

上面的延拓结论是对一般的映射而言, 对连续函数, 则有如下的Tietze延拓定理.

定理1.1.2 设 X 是度量空间, Y 是 X 的闭子空间, f 是从 Y 到 \mathbb{R} 内的有界连续函数, 则存在从 X 到 \mathbb{R} 内的有界连续函数 F , 满足:

- (i) $F(y) = f(y), \forall y \in Y$;
- (ii) $\inf\{F(x) : x \in X\} = \inf\{F(y) : y \in Y\}$;
- (iii) $\sup\{F(x) : x \in X\} = \sup\{F(y) : y \in Y\}$.

此定理的证明在这里略去, 有兴趣的读者可见参考文献[5]的144-145页.

若 S 是 X 的非空子集, $x \in X$, 则 x 到集合 S 的距离定义为

$$\rho(x, S) = \inf\{\rho(x, s) : s \in S\}.$$

第一个问题是 $\rho(x, S)$ 能否取到? 若对任意 $x \in X$, 存在 $u \in S$ 使得 $\rho(x, S) = \rho(x, u)$, 则称 S 为可近集. 同时称 u 为 x 在 S 中的最佳逼近元. 第二个问题是当 S 是可近集时, 最佳逼近元是否唯一. 如果对任意 $x \in X$ 在 S 内存在唯一的逼近元, 则称 S 为Chebyshev集. 第三个问题是最佳逼近元具有什么性质或函数 $\rho(x, S)$ 具有什么性质. 在这里我们不想深入讨论这三个问题. 在后面章节里我们会讨论第一个问题和第二个问题.

若 T 是 X 的非空子集, 则定义 S 与 T 之间的距离为

$$\rho(S, T) = \inf\{\rho(s, t) : s \in S, t \in T\}.$$

下面的命题说明 $\rho(x, S)$ 是 X 上的一致连续函数, 其证明留作练习.

命题1.1.8 设 S 是 X 的非空子集, $\forall x, y \in X$, 则有

$$|\rho(x, S) - \rho(y, S)| \leq \rho(x, y).$$

若 S 是 X 的非空子集, S 的直径定义为

$$\text{diam}(S) = \sup\{\rho(x, y) : x \in S, y \in S\}.$$

设 S 为 X 的子集, 若 S 的直径有限, 则称 S 为有界集. 换言之, 若 S 能被一个球所覆盖, 则 S 就是有界集.

练习1.1

1. 设 $C^m[a, b]$ 为闭区间 $[a, b]$ 上有直到 m 阶连续导数的一切函数的全体, 对任意 $x, y \in C^m[a, b]$, 令

$$\rho(x, y) = \sum_{k=0}^m \max_{t \in [a, b]} |x^{(k)}(t) - y^{(k)}(t)|.$$

证明 ρ 是 $C^m[a, b]$ 上的度量.

2. 设 $C(\mathbb{R})$ 为 \mathbb{R} 上所有连续函数的全体, 对任意 $x, y \in C(\mathbb{R})$, 令

$$\rho(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{\max_{-k \leq t \leq k} |x(t) - y(t)|}{1 + \max_{-k \leq t \leq k} |x(t) - y(t)|}.$$

证明 ρ 是 $C(\mathbb{R})$ 上的度量.

3. 证明命题1.1.1.

4. 设 X 为度量空间, 证明:

- (i) X 中任意个开集的并为开集, 有限个开集的交为开集;
- (ii) X 中任意个闭集的交为闭集, 有限个闭集的并为闭集;
- (iii) 举例说明可列个开集的交不一定为开集;
- (iii) 举例说明可列个闭集的并不一定为闭集.

5. 设 A 为度量空间 X 中的子集. 证明 A 在 X 内稠密当且仅当 X 中的非空开集含有 A 中的点.

6. 证明度量空间 X 中可数个可分子空间的并是可分的.

7. 设 x 是度量空间 X 中的点, 若存在 $r > 0$ 使得 $B(x, r) = \{x\}$, 则称 x 为 X 中的孤立点, 证明可分度量空间的孤立点全体为可数集.
8. 证明可分度量空间中一族互不相交开集的全体为可数集.
9. 设 S 是度量空间 X 中的非空集, 则 S 是闭的当且仅当 $\forall x \in X, \rho(x, S) > 0$.
10. 举例说明存在 \mathbb{R} 上非空集 S 和 $T, \rho(S, T) = 0$, 但 $S \cap T = \emptyset$.
11. 度量空间 X 是完备的充要条件是 X 中半径趋于0的闭球套有非空的交.
12. 记 $I = (0, 1]$. 定义 $I \times I$ 上的映射 ρ 为: $\rho(x, y) = |1/x - 1/y|, \forall x, y \in I$. 证明 (I, ρ) 为完备空间.
13. 设 A, B 是度量空间的完备子集, 证明 $A \cup B$ 和 $A \cap B$ 都是完备子集.
14. 设 (X, d) 为度量空间, 记 $\ell^\infty(X)$ 是由 X 上的所有有界实函数组成的度量空间, 其度量为

$$\rho(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in X\}.$$

证明: (i) $\ell^\infty(X)$ 为完备的;

(ii) (X, d) 可以等距嵌入到 $\ell^\infty(X)$. (提示: 任选一个基点 $x_0 \in X$, 考虑映射 $x \mapsto f_x : X \rightarrow \mathbb{R}, f_x(z) := d(x, z) - d(y_0, z)$)

15. 设 $Tx(t) = \int_a^b K(t, s)|t - s|^{-\alpha} x(s) ds$.
 - (i) 若 $K(t, s)$ 在 $[a, b] \times [a, b]$ 上连续且 $\alpha < 1$, 证明 T 是从 $C[a, b]$ 到 $C[a, b]$ 内连续的;
 - (ii) 若 $K(t, s)$ 在 $[a, b] \times [a, b]$ 上有界可测且 $\alpha < 1/2$, 证明 T 是从 $L^2[a, b]$ 到 $L^2[a, b]$ 内连续的;
 - (iii) 若 $K(t, s)$ 在 $[a, b] \times [a, b]$ 上连续且 $\alpha < 1/2$, 证明 T 是从 $L^2[a, b]$ 到 $C[a, b]$ 内连续的.
16. 设 $Tx(t) = \int_a^b K(t, s)x(s) ds$. 若 $K(t, s)$ 在 $[a, b] \times [a, b]$ 上连续可微, 证明 T 是从 $C[a, b]$ 到 $C^1[a, b]$ 内连续的映射.
17. 证明命题1.1.8.
18. 证明Uryson引理: 设 S 和 T 是度量空间 X 中不相交的闭子集. 存在连续函数 $f : X \rightarrow [0, 1]$ 使得 $f(S) = \{0\}, f(T) = \{1\}$. (提示: 函数 $f(x) = \frac{\rho(x, S)}{\rho(x, S) + \rho(x, T)}$ 即是所求)

1.2 紧性

设 S 是度量空间 (X, ρ) 的子集, \mathcal{U} 是 X 的子集族, 若 $S \subset \bigcup_{V \in \mathcal{U}} V$, 则称 \mathcal{U} 覆盖 S .

若每一个 $V \in \mathcal{U}$ 都是开集, 则称 \mathcal{U} 是 S 的开覆盖. 若 \mathcal{U} 还是有限集, 则称 \mathcal{U} 为 S 的有限覆盖. 若 F 是 \mathcal{U} 的子集且覆盖 S , 则称 F 是 S 的一个子覆盖.

若 X 的任意开覆盖都存在有限的子覆盖, 称 X 为紧的度量空间. 若 S 是 X 的子集, 且 S 由 ρ 导出的度量空间为紧时, 称 S 为 X 内的紧子集. 由前面的命题1.1.2知 S 为 X 内的紧子集等价于 S 在 X 内的任意开覆盖存在有限的子覆盖. 由数学分析知道 \mathbb{R}^n 中的有界闭集为紧集.

命题1.2.1 度量空间的紧子集必是可分的有界集.

证明 不妨设 S 是度量空间 X 的非空紧子集. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\{B(s, n^{-1}) : s \in S\}$ 是 S 的一个开覆盖, 因此存在 S 的有限子集 F_n , 使得 $S \subset \bigcup_{s \in F_n} B(s, n^{-1})$. 故 $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ 在 S 内稠密. 而 $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ 为可数子集, 所以 S 可分.

任取 $s_1 \in F_1$, 记 $R = \max\{\rho(s, s_1), s \in F_1\}$. $\forall x \in S$, 任取 $s \in F_1$, 使得 $\rho(x, s) < 1$, 则有

$$\rho(x, s_1) \leq \rho(x, s) + \rho(s, s_1) < 1 + R.$$

故 S 为有界集. □

命题1.2.2 度量空间中的紧集是闭的.

证明 设 S 为 X 中的一个紧子集. 不妨设 $X \setminus S = S^C$ 非空, 只需证 S^C 为开集.

设 $x \in S^C$, $\forall y \in S$. 则 $x \neq y$. 因此有 $B(x, r_{xy}) \cap B(y, r_{xy}) = \emptyset$. 这里 $0 < r_{xy} < \rho(x, y)/2$. 显然 $S \subset \bigcup_{y \in S} B(y, r_{xy})$. 由于 S 为紧集, 因此存在 $y_1, \dots, y_m \in S$, 使得 $S \subset \bigcup_{i=1}^m B(y_i, r_{xy_i})$.

令 $r = \min\{r_{xy_i}, i = 1, \dots, m\}$. 则有 $B(x, r) \cap B(y, r_{xy_i}) = \emptyset$. 因此 $B(x, r) \cap S = \emptyset$. 即 $B(x, r) \subset S^C$. 由 x 的任意性知 S^C 为开集, 所以 S 为闭集. □

命题1.2.3 紧度量空间必是完备的.

证明 设 X 是紧度量空间, 它的完备化空间记为 \hat{X} . 则由命题1.2.2知 X 是 \hat{X} 的一个闭子空间. 由于 \hat{X} 是完备的, 因此由命题1.1.4知 X 也是完备的. □

命题1.2.4 紧度量空间的闭子集必是紧的.

证明 设 S 是紧度量空间 X 的闭子集, 设 \mathcal{U} 是 S 的一个开覆盖, 由命题1.1.2知对任意 $U \in \mathcal{U}$ 存在 X 内的开子集 V_U 使得 $U = S \cap V_U$. 因此 S^C 和 $V_U, U \in \mathcal{U}$ 构成了 X 的一个开覆盖. 由于 X 是紧的, 存在 \mathcal{U} 内的有限个集合 U_1, \dots, U_m 使得

$$S^C \cup \{V_{U_1}, \dots, V_{U_m}\}$$

为 X 的一个开覆盖. 显然 $\{V_{U_1}, \dots, V_{U_m}\}$ 为 S 的有限开覆盖, 故 S 为紧的. □

命题1.2.5 设 f 是从紧度量空间 X 到度量空间 Y 内的连续映射, 则 $f(X)$ 也是紧集.

证明 设 \mathcal{U} 是 $f(X)$ 的一个开覆盖, 则 $\{f^{-1}(U)\}_{U \in \mathcal{U}}$ 就是 X 的一个开覆盖. 由于 X 是紧的, 则存在 \mathcal{U} 的有限个子集 U_1, \dots, U_m , 使得 $\{f^{-1}(U_i) : i = 1, \dots, m\}$ 为 X 的开覆盖, 所以 $\{U_i : i = 1, \dots, m\}$ 就是 $f(X)$ 的开覆盖, 即 $f(X)$ 为紧集. □