"十二五"高等学校规划教材

普通物理实验

杨 韧 主编　李宏杰 副主编

化学工业出版社

"十二五"高等学校规划教材

普通物理实验

杨 韧 主编 李宏杰 副主编
李延芬 赵 昆 高新存 张丽娇
郑 滨 李世强 李新政 李 燕 参编

化学工业出版社

普通物理实验是理工科学生必修的一门重要基础实验课程，是进行科学实验方法和实验技能训练的重要基础，是培养学生独立思考和判断能力，提高学生综合素质的开端。

本书根据高等工业学校物理实验课程教学基本要求编写，全书共分为两章：第一章实验误差与数据处理；第二章实验，包括力学、热学、电磁学、光学及近代物理实验共32个。

本书可作为高等院校的大学物理实验教学用书，也可供相关实验人员参考。

图书在版编目（CIP）数据

普通物理实验/杨韧主编. —北京：化学工业出版社，2014.1

“十二五”高等学校规划教材

ISBN 978-7-122-18974-5

Ⅰ.①普… Ⅱ.①杨… Ⅲ.①普通物理学-实验-高等学校-教材 Ⅳ.①04-33

中国版本图书馆CIP数据核字（2013）第269415号

责任编辑：郝英华

责任校对：宋 玮　　　　装帧设计：张 辉

出版发行：化学工业出版社（北京市东城区青年湖南街13号 邮政编码100011）

印 装：大厂聚鑫印刷有限责任公司

787mm×1092mm 1/16 印张 9½ 字数235千字 2014年2月北京第1版第1次印刷

购书咨询：010-64518888（传真：010-64519686） 售后服务：010-64518899

网 址：http://www.cip.com.cn

凡购买本书，如有缺损质量问题，本社销售中心负责调换。

定 价：22.00元

前　言

物理实验课是一门独立设置的必修课，通过多年教学改革的实践，我们越来越清楚地认识到，物理实验教学的根本目的是培养学生独立思考和判断的能力，提高学生的综合素质，并通过物理实验教学，使学生获得具有一定系统性的物理实验的基本知识、方法和技能。

本书在绪论后，首先阐述了测量误差和数据处理的基本知识、引入了不确定度和标准偏差的概念，并把这一误差理论运用到实验中，对实验结果进行科学的数据处理分析；本书对每个实验的原理都做了简明扼要的论述，这样，通过实验课，学生可以较好地掌握和运用理论知识；在每个实验中详细介绍了主要仪器的基本原理和实验方法，使学生通过实践提高自己的实验技能；本书可供学生选择的实验有 32 个，除了常规的基础实验外，还增加了近代物理实验和设计性实验，这些实验体现了现代科学技术的发展和应用，通过这些实验可以扩大学生的知识面，增加对现代科技的了解和加强综合能力的培养。每个实验后有思考题，可以帮助学生做好课前预习和实验后的分析讨论，加深理解。为满足不同层次学生的需要，有些实验的部分内容可以作为选做内容，思考题也有难有易，可供选择，书中收录了附表一～九，以供参考。

实验教学是一项集体的事业，离不开实验室的建设和发展。经过 30 多年的教学实践，普通物理实验教材做过多次调整，才达到现在的规模和水平，其中凝聚了许多教师和实验技术人员（包括已退休和调离的同志）的智慧和劳动，本书实际上是一项集体创作成果，在此对为本书做出过贡献的所有同志表示衷心的感谢。

本书由杨韧担任主编、李宏杰担任副主编，具体编写分工如下：第一章和实验一、二、六、七由杨韧编写；实验三、十六、二十、二十四由李延芬编写；实验四、三十由赵昆编写；实验五、十二、十八、二十六由李宏杰编写；实验八、九、十三、二十三由高新存编写；实验十、十一、二十一由张丽娇编写；实验十四由郑滨和李世强编写；实验十五、十七由郑滨编写；实验十九、二十二由李世强编写；实验二十五、二十七、三十一由李新政编写；实验二十八、二十九、三十二由李燕编写；全书由杨韧、李宏杰统稿。

限于编者水平，书中难免有不妥之处，恳请批评指正，以便改进和提高。

编　者

2013 年 11 月

目录

绪 论

物理学是一门实验科学，它是在生产实践和科学实验的基础上建立和发展起来的。因此，物理实验是物理理论的基础和源泉，而且也是检验物理理论正确与否的唯一标准。但是，实验又必须有理论作指导，两者相辅相成，不得有任何偏差。更重要的是物理实验有它本身的一套实验知识、方法和技能，学好这门课可以使同学们受到基本的实验方法、实验思想和实验技能的训练，为今后从事生产、科研等工作打下坚实的基础。

自然界发生的物理现象极为复杂，在这复杂的物理现象中，要想深入了解我们所研究的某一物理变化的规律，就必须在实验室里通过仪器和一定的措施，人为地控制条件，削减次要现象和因素的干扰，集中地对主要现象加以反复观察和测量，找出在一定条件下这一物理变化的本质，测出有关的数据，以找出物理量之间的关系。

为此，我们认为开设大学物理实验课的目的主要有以下几个方面。

(1) 学习并掌握物理实验的基本知识、基本方法和基本技能、技巧——包括实验理论的掌握、仪器的使用和选择、测量的技术和方法、实验数据的处理方法和有效数字的运算、实验结果的分析和正确写出实验报告。

(2) 培养分析问题和解决问题的能力。要求理论联系实际，加深对物理概念和规律的理解。对实验中出现的问题能根据理论做出正确的分析、判断和归纳，并提出处理意见。

(3) 培养和树立严肃认真的工作作风、实事求是的科学态度和爱护国家财物、遵守纪律的优良品德。

为了有助于同学们达到实验的预期目的，必须做到以下几点。

(1) 预习实验教材。实验是由同学分组独立进行，在课前必须预习实验教材，明确实验目的，理解实验原理，了解所用的测量仪器、测量方法和具体步骤，在做实验前，一定要心中有数。

(2) 做好实验记录和计算的准备。每人准备一个物理实验的笔记本，在实验前，把自己预习的实验名称、计算公式、基本原理和主要实验步骤摘要记下，画出测量数据表格，以免在做实验时乱记数据，造成数据紊乱，计算错误，更不能事后凭回忆追加数据。

(3) 熟悉仪器。上课时，首先熟悉仪器调整和使用方法，然后进行实验，才能顺利完成。实验的失败和仪器的损坏，多是由于调整和使用方法不正确而造成的。

(4) 使用计算器和对数表等工具进行计算。

(5) 写实验报告。正式的实验报告内容包括：①实验名称；②实验目的；③仪器规格；④原理和计算公式，要求有简单的文字说明；⑤实验步骤；⑥数据表格、数据处理和结果；⑦误差分析；⑧回答思考题。

在教师指定时间内交实验报告。实验报告中的字迹要清楚，图表要规整，不整齐和内容不完全的报告，退回重做。

(6) 在全部实验过程中，要保持实验桌上整洁，井井有条。实验完成后，把仪器整理好。

(7) 对各项要求，经教师检查合格后，才能离开实验室。

第一章　实验误差与数据处理

第一节　误差的基本知识

一、测量与误差的基本概念

在普通物理实验中，我们不仅要定性地观察和描述物理现象及其变化过程，还要定量地测量某些物理量的大小，所谓测量，就是借助测量仪器和一定的测量方法，直接或间接地将待测物理量与一个选择为单位的同类量进行比较，其倍数即为待测物理量的大小。而一个测量值必须包括数值大小和物理量的单位才有意义。

测量可分两类。一类是可以直接用仪器测得待测量的大小，称为直接测量，相应的待测量称为直接测量量。例如，用米尺测量物体的长度、用电流表测量电路中的电流强度等，属于直接测量。另一类是不能直接用仪器测出待测量的大小，而要根据待测量和直接测量量的函数关系求得，称为间接测量。相应的待测量称为间接测量量。例如用游标卡尺测得圆柱体的直径 D 和高度 H，从而通过公式 $V=\frac{\pi}{4}D^2H$ 求出体积 V——间接测量量的大小。

物理量在一定的测量条件下都具有不以人的意志为转移的客观真实大小，这客观实际大小称为该物理量的真值。然而，由于测量仪器、条件、人员和周围环境等种种因素的限制，测量不可能做到绝对精确，测量值与其真值之间总是或多或少的存在偏差，我们将测量值 N 与真值 N' 之差称为测量误差 $\Delta N'$。即 $\Delta N'=N-N'$。

测量误差的大小虽然反映了测量结果与真值的接近程度，但由于客观实际的局限性，真值总是测不到的，因此测量误差也无法具体知道。一般，我们只能测得物理量的近似真值，故对测量误差的量值范围也只能给予估计。国际上规定用不确定度（Uncertainty）来表征测量误差可能出现的量值范围，它也是对被测量的真值所处的量值范围的评定。对任何一个实验测量结果来说，应包括结果的量值大小、不确定度范围和物理量的单位，三者缺一不可。

误差存在于一切测量之中，而且贯穿整个实验过程的始终，我们应该牢固地树立这样一种观念。每使用一种仪器，每进行一次测量，都要引进误差，因此任何真值都是得不到的。为了获得一个比较理想的实验结果，要求我们掌握误差理论的基本知识。

误差理论是一门专门的学科，深入地讨论它，需要有丰富的实践经验和较多的数学知识。在普通物理实验中，我们只介绍有关误差理论的一些最基本的知识，要求大家着重了解它的物理意义，学会简单的计算和分析，领会误差分析思想对于做好实验的意义。

二、测量误差的分类

误差根据其性质和产生的原因主要可分三大类：系统误差、偶然误差和粗大误差。

1. 系统误差

在相同条件下（指方法、仪器、人员及环境不变）多次测量同一物理量时，测量结果总是向一个方向偏离，其误差的数值和符号一定或按某一确定规律变化。这种误差称为系统误差。它的来源主要有以下几个方面。

(1) 仪器误差：由于仪器本身结构不完善或没有按规定要求使用而造成的。如仪器的零点不准、天平两臂不等和分光仪测量度盘偏心等。

(2) 理论（方法）误差：由于测量所依据的理论及公式本身的近似性，或者实验条件达不到理论公式规定的要求，或者测量方法本身不完善造成的。如用伏安法测电阻，由于表头内阻的影响使测量结果产生误差；气轨上测定物体的加速度时忽略了气轨和滑块间空气的黏滞阻力而带来的实验误差等。

(3) 个人误差：由于观测者本人的生理条件限制所引起的使测量值总是偏高或偏低。如掐表计时因启动超前（或滞后）而造成的时间测量值偏大（或偏小）等。

大小和符号均确定的系统误差也称为“已定系统误差”。如电表内阻给伏安法测电阻带来的误差即属此类。有些系统误差具有积累性质，如电位差计的工作电池，其电压随放电时间的延长而降低时导致测量误差成比例地增加；还有些系统误差具有周期性的变化规律，如分光仪的度盘偏心、秒表指针轴心和表盘中心不重合等引起的测量误差是按正弦规律变化的。以上这些系统误差一般可以通过校准仪器、引入修正项、改变条件或采取适当的测量方法加以消除，采取多次测量的方法一般不能发现和消除这类系统误差的影响。

除此而外，有些系统误差的大小和符号不确定，其变化规律往往是复杂和难以掌握，我们称这类系统误差为“未定系统误差”。一些常用的测量仪器如游标卡尺、螺旋测微计、电压表、电流表等，它们的某一分度误差虽然具有恒定的大小和符号，属于系统误差，但是各分度的误差在制造过程中却有大有小、有正有负，对整个仪器来说各误差又具有随机性。对于这类仪器的误差，出厂时由厂方用更高精确度的同类仪器检定后，常规定以其中最大的误差限作为仪器的“允许基本误差”。在使用这类仪器进行测量时，各刻度系统误差的具体大小和符号无法确知，故只能用仪器的“允许基本误差”。在使用这类仪器进行测量时，各刻度系统误差的具体大小和符号无法确知，故只能用仪器的“允许基本误差”估计其最大的误差限，而后再根据误差服从的分布规律，估算其不确定度大小，并冠以“±”号表示不确定度的范围。国际上，将这类由非统计方法估计的不确定度分量称为“B类不确定度分量”。

例如螺旋测微计的“允许基本误差”规定为±0.004mm，它表明由该螺旋测微计测量产生的最大误差限不超过±0.004mm，或者说该测量结果的不确定度范围为$\pm\frac{0.004}{3}\text{mm}\approx\pm0.002\text{mm}$。

由于未定系统误差具有不确定性，因此不能对其修正，一般只要求用不确定度表示误差可能出现的量值范围。

2. 偶然误差

在相同的条件下多次测量同一物理量时，每一次测量结果毫无规则地涨落，即单个误差的大小和符号的变化没有确定的规律，但总体误差服从一定的统计分布规律，这类误差称为“偶然误差”。

偶然误差的起因主要是一些不确定的因素造成的，如仪器零部件配合的不稳定性和零件表面之间的摩擦；电源电压、电磁场、周围环境温度的微小波动以及人员的感官灵敏程度有限等。理论和实践证明，大量的偶然误差服从正态分布（高斯分布）的规律并具有以下特征。

（1）绝对值相等的正、负误差出现的可能性相等，即误差具有对称性。

（2）绝对值小的误差比绝对值大的误差出现的可能性大，即误差具有单峰性。

（3）绝对值很大的误差出现的可能性趋于0，即误差的绝对值不会超过一定的界限——误差的有界性。

（4）随着测量次数的无限增加，所有误差的总和趋于0，即误差具有抵偿性。

基于偶然误差的上述性质，因此增加测量次数可以适当地减小偶然误差，而且当测量次数无限增多时，算术平均值趋近于真值。

由于偶然误差的变化不能预先确定，其量值大小也不确定，因此这类误差也不能修正，通常可用统计方法估算其不确定度的大小，所估计的大小表明偶然误差可能出现的范围。国际上称这类不确定度分量为“A类不确定度分量”。

3. 粗大误差（或叫过失误差）

实验测量中出现的那些用测量的客观条件不能合理解释的突出误差称为粗大误差。它常常是由于实验者粗心大意、缺乏经验而读错、记错、算错等，或因实验条件未达到预定的调节要求而匆匆实验造成的。对于初学者来说，这是易犯的错误，必须多加注意。含有粗大误差的测量结果明显地歪曲客观现象，因此应当尽量避免和加以剔除。

4. 系统误差的随机化处理

误差由于性质不同、来源不同，其处理方法也不同。一般来说，对于系统误差和偶然误差要加以区别、分别处理，在精密测量中尤其重要；有时，这两类误差难以区分，则为了说明总的误差限度而不加以区别。值得注意的是，某些具有随机性质的系统误差在一定的条件下可以将其进行转化。例如尺子的分度误差、管径加工的不均匀性各处并不相同，对于尺子或管径的某个确定位置来说它与准确值的偏差是一定的，就属于系统误差，但是从总体效应来说，各处的误差有正有负、有大有小，又具有随机性，此时如果用尺子的不同部位去测量同一个物体的长度，则多次测量的平均结果可以使尺子的分度误差得到部分抵消；同样对于管径各处分别进行测量，所得平均值也是抵消了部分系统误差后的测量结果。因此，对于具有不确定性的测量对象以及一些规律性难以掌握的未定系统误差，常常把它随机化处理，使部分系统误差得到抵消，这种办法称为未定系统误差的随机化处理技术。

最后应该指出，在任何测量中，系统误差和偶然误差一般都是同时存在的，对于具体的实验要进行具体的分析并给予处理，而任何实验结果的总误差应当是偶然误差和系统误差的综合效应。

三、直接测量误差的处理和估计

在实验测量中，系统误差有时是影响测量结果的主要因素，然而它又常常不明显地表现出来而给测量结果带来严重的影响。因此，发现系统误差、估计它对实验结果的影响，设法修正、减少或消除它的影响，是误差分析的一个重要内容。下面首先讨论不计偶然误差时，系统误差的发现、消除及处理方法。

1. 系统误差的发现、消除及修正、处理

发现系统误差主要通过仔细研究实验方法以及测量所依据的理论公式的完善性、校准仪器、分析每一步实验调整和测量是否符合要求等办法来实现，而后才能对其影响给予估计。

通常可用以下几种方法来发现系统误差的存在。

（1）对比测量方法。实验方法的对比：用不同的实验方法测量同一个量，若测得的结果在偶然误差允许的范围内不重合，说明其中至少有一个存在系统误差。

仪器的对比：用不同的仪器测量同一个量可发现仪器的系统误差，若其中有一个为标准仪器，则可得出另一仪器的修正值。

换人测量进行对比，改变实验条件、测量方法和某些实验参数进行对比等都可发现系统误差。

（2）理论分析的方法。分析测量所依据的理论公式要求的条件在实验中是否已被满足。如测定气体的γ值，实验中绝热膨胀过程是否得到满足，P_2 是否等于 P_0 等，否则测量公式 $\gamma=\frac{h_1}{h_1-h_3}$ 必然要引入一定的系统误差。

分析仪器所要求的条件是否达到了，如仪器使用的环境温度要求是否达到，仪器调整中的铅直、水平状态是否得到保证，否则测出的结果必然要产生误差。

（3）分析数据的方法。在相同条件下测得大量数据时，如果多次测量的结果不服从正态分布的规律，则说明实验中存在变化的系统误差。

所谓消除系统误差，是指把系统误差减弱至某种程度，使之对测量结果的影响小到可以忽略不计。消除系统误差的影响，有以下几个主要途径。

（1）消除产生系统误差的根源。如采用符合实际的理论公式；保证仪器装置调整良好并满足规定的使用条件等。

（2）选择适当的测量方法或在仪器设计上抵消系统误差的影响。如常用以消除恒定系统误差的替代测量法：用一已知标准量取代被测量而保持测量指示值不变；用以消除周期性（正弦）规律系统误差的半周期偶然次测量法（或叫对径测量法）：如分光仪度盘采取相隔180°同时进行读数求平均值可以消除度盘偏心差等。

（3）找出修正值，对测量结果进行修正。如用标准仪器校准一般仪器，通过做出校准曲线进行修正；利用修正项对理论公式进行修正等。

总之，当系统误差的大小和符号确定时，要将它从测量结果中进行修正。不计偶然误差时，确定系统误差可做如下修正。

假设含有系统误差的测量值为 N，准确值为 N^*，系统误差为 $\Delta N^*=N-N^*$，修正值定义为 $C_N=-\Delta N^*$。则测量结果应修正为 N_c，其中

$$N_c=N+C_N \tag{1-1-1}$$

或

$$N_c=N-\Delta N^* \tag{1-1-2}$$

式（1-1-1）、式（1-1-2）中，ΔN^* 可以是正数也可以是负数，C_N 亦然。它们的位数则可能是一、二、三位等。

对于大小和符号均不确定的未定系统误差来说，无法从测量结果中给予修正。此时可以先估计出它们的最大误差限，再根据误差服从的分布规律去推求不确定度分量的数值——即“B类不确定度分量”（或叫相似标准偏差），用U表示，即未定系统误差引起的不确定度分量U可由下式求出

$$U=\frac{\Delta_S}{C} \tag{1-1-3}$$

式中，Δ_S 为未定系统误差限；C 为对应分布的置信因子，它的值常取为$\sqrt{2}\sim3$。当未定系统误差的分布不好确定时，可将随机性较强的误差分布假设为正态分布，即C的取值为3；而

对系统性较强的误差分布则常设为均匀分布，此时取 $C=\sqrt{3}$，总之常以不确定度的估计略为偏大的假设为原则。不确定度分量 U 的物理意义表明，测量值的未定系统误差，有 68.3% 的可能性落在 $\pm U$ 区间；或有 95% 的可能性落在 $\pm 2U$ 区间；或者说有 99.7% 落在 $\pm 3U$ 区间。

米尺、游标卡尺和螺旋测微计等常用测量仪器引起的测量不确定度可作如下近似处理：取仪器出厂时规定的允许基本误差或最大示值误差为未定系统误差限 Δ_S（当出厂没标明时，可取仪器的最小分度值或其一半作为仪器误差），则测量不确定度为 $U=\dfrac{\Delta_S}{\sqrt{3}}$，其中 Δ_S 为仪器的准确度等级所规定的最大绝对误差。最后测量结果应表示为 $N_{测}=N_c\pm U$，其中 $N_c=N+C_N$。

例 1 用 0.01mm 分度值的螺旋测微计测量金属丝直径 d，测得值为 2.349mm，而螺旋测微计的零点读数误差 $\Delta_{do}^{*}=0.002$mm，若已知所用的螺旋测微计的允许基本误差 Δ_S 为 ± 0.004mm，求金属丝的测量结果 $d_{测}$。

解 由于零点读数不准确，需要进行修正。其修正量 $C_d=-\Delta_{do}^{*}=0.002$mm。不确定度 $U_d=\dfrac{\Delta_S}{3}=\dfrac{0.004}{3}<0.002$mm，取 0.002mm。

测量结果修正为 $d_c=d+C_d=d-\Delta_{do}^{*}=2.351$mm

测量结果表示为 $d_{测}=d_c\pm U_d=(2.351\pm 0.002)$mm

理论和实践证明，在对实验测量结果的系统误差进行修正或认真消除后，无论测量多么精心，由于偶然误差的存在，在同一条件下，对某物理量进行多次测量时，每次测量的结果也不会完全一样。

下面假定没有系统误差存在，或系统误差已修正或已基本消除的情况下，讨论偶然误差的处理方法。

2. 偶然误差的处理

(1) 算术平均值公理及偶然误差的估计。统计理论证明，在等精度测量条件下（即同一仪器、同一条件、同一对象），对某物理量进行重复多次测量，则多次测量的算术平均值即为该物理量的最佳测量结果或最近真值。当测量次数趋于无穷多时，算术平均值就是真值。因此根据算术平均值公理多次测量结果可表示为

$$\overline{N}=\frac{1}{K}(N_1+N_2+\cdots+N_K)=\frac{1}{K}\sum_{i=1}^{K}N_i \quad (i=1,2,3,\cdots,K) \tag{1-1-4}$$

式中，K 为重复测量的次数；N_1，N_2，…，N_K 为 K 次测量的一列测量值；N_i 为第 i 次测量值；$\overline{N}$ 为多次测量的算术平均值。

一般情况下，各测量值 N_i 与算术平均值 $\overline{N}$ 的偏差 ΔN_i 各不相同，它们分别为 $\Delta N_1=N_1-\overline{N}$，$\Delta N_2=N_2-\overline{N}$，…，$\Delta N_K=N_K-\overline{N}$。如何表示这一组测量结果以及评价该测量结果的可靠性呢？

统计理论证明，测量列的标准误差 σ'（或称总体标准偏差）可以最好的反映这一组测量数据的可靠程度——即数据的分散或集中程度。它定义为各测量值 N_i 与真值 N' 的误差 ε_i $(=N_i-N')$ 的平方和平均的平方根。即

$$\sigma'=\sqrt{\frac{\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\cdots+\varepsilon_K^2}{K}}=\sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{K}\varepsilon_i^2}{K}} \tag{1-1-5}$$

但是，测量一般只进行有限次，真值 N' 是测不到的，因而误差 ε_i 也是测不到的。测量

只能求得最近真值——算术平均值$\overline{N}$，以及各测量值的偏差ΔN_i。

统计理论证明，当$K\to\infty$时，子样方差S^2近似等于总体方差σ'^2，或

$$\sigma'=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{K}\varepsilon_i^2}{K}}\approx\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{K}\Delta N_i^2}{(K-1)}}=S$$

而当测量次数K有限时，S也是σ'的最佳估计值。因此，在有限次测量中，可用S来表示一组测量数据的可靠程度，S称为等精度测量列的标准偏差或任一次测量的标准偏差（也称子样标准偏差）。即

$$S=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{K}\Delta N_i^2}{K-1}}=\sqrt{\frac{(N_1-\overline{N})^2+(N_2-\overline{N})^2+(N_K-\overline{N})^2}{K-1}}\tag{1-1-6}$$

计算时，为避免舍入误差的影响，式（1-1-6）可改写为

$$S=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{K}N_i^2-\left(\sum_{i=1}^{K}N_i\right)^2/K}{K-1}}$$

该表达式为一般函数型计算器说明书中所用公式。利用计算器的"统计计算"功能，只要将测量数据逐个键入计算器，就可方便地求出S值（有的计算器用σ_{n-1}表示S）。

由式（1-1-6）可见，标准偏差S并不表示任何一个测量误差的实际大小，它只是对这一组测量列中各个偶然误差的统计平均结果，国际上将这种用统计方法估算的标准偏差，称为"A类不确定度分量"，用S表示。不确定度S的大小反映了这组数据的分散程度和偶然误差可能出现的量值范围，S越大说明测量越不精密，数据越分散；反之，S越小说明测量越精密，数据越集中。

A类不确定度分量S的物理意义表明这一组测量列中，任一次测量的偶然误差有68.3%的可能性落在$\pm S$区间内，或者说任一次测量值的偶然误差落在$\pm 2S$区间的可能性为95%，而落在$\pm 3S$区间的可能性为99.7%。对应S的不同倍数，概率值P也不同。

以上结果适用于$K\to\infty$的情况。当测量次数K有限（如$K\leqslant 20$）时，偶然误差不再服从正态分布而服从t分布（又叫学生分布），不确定度S需要加以修正。比如$K\geqslant 3$，则任一次测量值的误差落在$\pm 3S$区间里的可能性不是99.7%，而是近于90%以上而已！

（2）算术平均值的标准偏差及多次直接测量结果的表示。由于算术平均值是多次直接测量的最佳值，它比任何一个测量值更接近真值。因此它的精密程度应高于任何一个测量值，也即算术平均值之间的分散程度要比任一组测量列中各测量值之间的分散程度小得多。理论证明，算术平均值的标准偏差$S_{\overline{N}}$是测量列的标准偏差S的$\frac{1}{\sqrt{K}}$倍。即

$$S_{\overline{N}}=\frac{S}{\sqrt{K}}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{K}(N_i-\overline{N})^2}{K(K-1)}}\tag{1-1-7}$$

一般来说，当我们对某一物理量进行一组K次重复测量所得算术平均值$\overline{N}$，与在以后进行的同样条件下的K次重复测量所得的算术平均值是不会完全相同的；但是任一个算术平均值落在（$\overline{N}\pm S_{\overline{N}}$）区间的可能性有68.3%；而落在（$\overline{N}\pm 3S_{\overline{N}}$）区间的可能性为99.7%。由式（1-1-7）看出，随着测量次数K的增加，算术平均值的标准偏差$S_{\overline{N}}$减小，也

即算术平均值更接近于真值。但是当次数 K 大于 10 以后，$S_{\overline{N}}$的减小趋于缓慢，因此单靠测量次数的增加来减小偶然误差的作用将受到限制，只有改进仪器和改善测量条件才是减小偶然误差的根本。

不计系统误差时，多次（K 次）直接测量的结果应表示成

$$N_{测}=\overline{N}\pm S_{\overline{N}}=\overline{N}\pm\sqrt{\frac{\sum\limits_{i}(\Delta N_i)^2}{K(K-1)}} \tag{1-1-8}$$

上式间接表明了被测量的真值以极大（99.7%）的可能性落在（$\overline{N}\pm 3S_{\overline{N}}$）区间内。

（3）单次测量偶然误差的估计。在实验中，有时测量不能重复或不需要重复；有时测量虽能重复，但多次测量的结果偶然误差远小于仪器的最小分辨值甚至是零（注意：这是由于仪器的精密度不足以反映测量误差的微小差别，而绝不是没有误差!）在这种情况下可以只测量一次，并对结果进行估读。这类估读误差具有随机性，其不确定度大小也需要通过分析误差限 Δ_R 来确定，所以也称为 B 类不确定度分量，且有 $U=\frac{\Delta_R}{C}$。其中 Δ_R 为估读误差限，C 为对应分布的置信因子，U 为估读误差引起的测量不确定度。鉴于这类估读误差大多服从均匀分布规律，C 可近似取作$\sqrt{3}$，即 $U=\frac{\Delta_R}{\sqrt{3}}$。估读误差限 Δ_R 的估计要根据仪器分度值的大小、测量环境和测量条件的优劣具体考虑，估计要尽量符合实际。下面分不同情况对单次测量的估读误差限 Δ_R 的估计原则做如下约定。

① 对于在其分度值以内仍可分辨和估读的一般仪器——如米尺、螺旋测微计、温度计、电表等，Δ_R 可估计为仪器分度值的 1/5（即 0.2 分度）；有时根据被测量的环境和条件可估计得略大一些，比如 0.5 分度或几个分度不等；对于电表，一般采用示值误差来表示其仪器误差 Δ_R=(电表的量限×S%)，S 为电表级别。

② 对于那些分度值不便再细分或数字式仪器，如游标卡尺、分光仪的角游标、机械秒表等；Δ_R 可估计为仪器的分度值；而数字式仪器一般取 1～2 个最小计数单位。

③ 对于多次重复测量所得值不变的情况，其估读误差限 Δ_R 视仪器的具体情况分别与①或②作类似估计。

④ 对于需要判断平衡的一些测量仪器，如检流计，其平衡误差最大可视为 0.2 分格。

还有些测量仪器虽然很精密，但整个测量的灵敏度较低，此时应将灵敏度引起的误差加以考虑，Δ_R 应估计为测量的灵敏阈值，即足以引起可察觉变化的被测量的最小变化值，而不应只取仪器分度值的 1/5。

3. 合成不确定度及直接测量结果的表示

前面已分别讨论了系统误差和偶然误差对直接测量结果的影响以及它们的处理问题，而实验测量中两类不同性质的误差一般是同时存在的，因此测量结果的误差应当是系统误差和偶然误差的综合影响效果，由于误差的不确定性，总的测量误差也应当用不确定度加以表征。

如前所述，对于确定大小的系统误差要通过校准仪器、引入修正项和采取适当办法将它从测量结果中加以修正；而对于未定系统误差和偶然误差的影响，则用不确定度来表征，其中 A 类不确定度分量和 B 类不确定度分量分别表示了两种不同的估算方法所求得的各种误差对测量结果的单独影响，因此也称为测量的不确定度分量。当各类误差的影响同时存在且各误差是独立无关时，测量结果的不确定度则应当是各个不确定度分量的合成称为“合成不确定度”。即合成不确定度 σ 可表示为

$$\sigma=\sqrt{\sum_i S_i^2+\sum_j U_j^2} \tag{1-1-9}$$

式中，S_i 为第 i 项 A 类不确定度分量；U_j 为第 j 项 B 类不确定度分量，合成不确定度 σ 的意义仍然是一个标准偏差，其物理意义表明测量结果的总误差有 68.3%的可能性落在 $\pm\sigma$ 区间内。

至此，一般物理量的多次直接测量结果应表示成如下形式

$$N_{测}=N_c\pm\sigma=N_c\pm\sqrt{\sum_i S_i^2+\sum_j U_j^2} \tag{1-1-10}$$

当测量不能重复或只进行一次时，式（1-1-10）中的 N_c 应为一次测量的修正值。显然合成不确定度 σ 只是 B 类不确定度分量的合成结果，而不应包含 A 类分量。即单次直接测量结果应表示为

$$N_{测}=N_{c单}\pm\sigma=N_{c单}\pm\sqrt{\sum_j U_j'^2} \tag{1-1-11}$$

式（1-1-10）、式（1-1-11）中的 N_c 表示修正了确定系统误差后的测量结果，σ 为直接测量结果的合成不确定度。

例 2 用分度值为 0.02mm 的游标卡尺测量一圆柱体直径 5 次，测得值分别为 26.26mm，26.18mm，26.26mm，26.22mm，26.20mm，求圆柱体直径 D 的测量结果。已知游标卡尺的允许基本误差 Δ_S 为 $\pm$0.02mm，零点读数无误差。

解 多次测量的算术平均值——平均直径为

$$\overline{D}=\frac{1}{K}\sum_{i=1}^{K}D_i=\frac{1}{5}\ (26.26+26.18+26.26+26.22+26.20)=26.224\ (\mathrm{mm})$$

（中间运算结果可先多保留一位有效数字）

测量列的标准偏差 $S_D=\sqrt{\frac{1}{K-1}\left[\sum_{i=1}^{K}(D_i-\overline{D})^2\right]}=0.036\mathrm{mm}$

平均值的标准偏差 $S_{\overline{D}}=\frac{S_D}{\sqrt{K}}=0.016\mathrm{mm}$

仪器误差引起的不确定度 $U_D=\frac{\Delta_S}{3}=0.007\mathrm{mm}$

合成不确定度 $\sigma_D=\sqrt{S_{\overline{D}}^2+U_D^2}=0.017\approx0.02\ (\mathrm{mm})$

则圆柱体直径的测量结果表示为 $D_{测}=\overline{D}\pm\sigma_D=(26.22\pm0.02)\mathrm{mm}$

从以上计算结果看出，这里合成不确定度 σ_D 的主要影响来自多次测量的偶然误差 $S_{\overline{D}}$。在合成不确定度的计算公式中，当其中一个分量小于其他任何分量的 1/3 时，则该分量的影响可忽略不计，计算可以简化。由于不确定度本身是一估计量，计算结果只取一位，最多两位。

在实验测量中，有时对不同性质的误差影响很难加以严格区分，更无从掌握各误差服从的分布规律，因此也不可能求得各不确定度分量。为了说明误差可能出现的量值范围，可简单的估算其总的误差限 $\Delta_{\lim}$，此时将各极限误差 Δ_i 以方和根的形式合成，即 $\sqrt{\sum_i\Delta_i^2}=\Delta_{\lim}$，它简单、粗略地表明了直接测量结果的最大误差限度，此时测量结果可表为：$N_{测}=N_c\pm\Delta_{\lim}=N_c\pm\sqrt{\sum_i\Delta_i^2}$，$\Delta_i$ 包含各个未定系统误差限和偶然误差限。例如，在金属丝的杨氏模量测定实验中，由于金属丝的长度 L 不易测准，我们只用卷尺对 L 进行一次测量。

此时根据测量的具体情况估读误差可估计为 $\Delta_R=2\text{mm}$，若卷尺的仪器误差为 $\Delta_S=0.5\text{mm}$，长度 L 的测量误差限可估计为 $\Delta L=\sqrt{\sum_i \Delta_i^2}=\sqrt{\Delta_S^2+\Delta_R^2}=2\text{mm}$。如果长度的测量值为 70.2cm，则长度测量结果可表示为 $L_{测}=(70.2\pm0.2)\text{cm}$。

4. 几个名词概念

（1）绝对误差、相对误差和百分误差。前面我们所讨论的误差估计量，均指各种误差的绝对值大小，它既有大小，又有单位，这种误差的表示形式称为“绝对误差”。如两个不同物体的长度测量结果为 $L_1=(12.52\pm0.05)\text{mm}$ 和 $L_2=(0.125\pm0.005)\text{mm}$，从绝对误差来看，$\Delta L_2$（$=0.005\text{mm}$）$<\Delta L_1$（$=0.05\text{mm}$），似乎 L_2 的测量结果要比 L_1 好。实际上在 12.52mm 的长度测量中，误差 0.05mm 仅是测量结果的 4/1000；而在 0.125mm 的长度测量中，误差 0.005mm 却占测量结果的 4/100，所占比重比前者要大一个数量级。因此，为了确切比较不同测量结果的好坏，通常用该量的绝对误差与测量值之比值即“相对误差”来评价更为合理。从某种意义上讲，绝对误差反映了测量的重复性好坏；而相对误差则反映测量的准确程度，它定义为

$$E_N=\frac{\sigma_N}{N}\times100\%$$

如例中，$E_{L_1}=\frac{0.05}{12.52}\times100\%=0.4\%$；$E_{L_2}=\frac{0.005}{0.125}\times100\%=4\%$，其中 $E_{L_1}<E_{L_2}$，说明 L_1 的测量结果要比 L_2 准确。

相对误差的计算结果也是一种估计，所以一般只取一位或最多取两位即可。

有时被测量的量值有公认值或理论值，此时测量结果和公认值或理论值的偏差可以用百分误差加以比较。百分误差的大小从某种程度上也反映测量结果的好坏。其中

$$百分误差=\frac{|测量值-理论值|}{理论值}\times100\%$$

（2）精密度、正确度（准确度）和精确度。

精密度：指在一定的条件下进行多次重复测量时，所得测量结果之间的重复程度；它反映测量结果中偶然误差的大小，偶然误差小，则测量精密度高。

正确度（准确度）：指在规定条件下，测量结果与真值的符合程度，它反映系统误差的大小。系统误差小，则测量正确度高。

精确度：指测量结果中系统误差和偶然误差的综合大小程度，或者说既反映测量结果和真值的接近程度，也反映测量结果的重复性程度。精确度高的测量，表示测量结果的系统误差和偶然误差均很小。

（3）仪器的分度值、仪器的精密度和准确度。所谓仪器的分度值是指仪器的最小刻度的大小；而仪器的精密度则表示仪器的最小估读单位。如测微计的分度值为 0.01mm，则其精密度可达 0.001mm。分度值越小的仪器，其精密度越高。

仪器的准确度是指仪器在正确使用的条件下，本身所能达到的准确程度。一般来说，仪器的准确度是低于仪器的精密度。如分光仪的度数盘可以精密测量到 15″，但该分光仪的准确度一般都达不到这个指标。

（4）灵敏度：指仪器示值的微小变化与造成该变化所需要的待测量的变化之比。灵敏度高，说明仪器对待测量的微小变化的响应能力高。灵敏度的概念不仅对测量仪器而言，对测量电路同样存在灵敏度的问题，而且它有时会成为测量误差的主要来源，必须充分予以重视。

四、间接测量的误差传递和估计

间接测量一般是通过与它有函数关系的直接测量代入公式求得。由于直接测量有误差，则间接测量必然也有误差，这就是误差的传递。

1. 误差传递的基本公式

设物理量 N 是各个独立的物理量 x，y，z，…的函数，$N=f(x, y, z, \cdots)$，对函数求全微分有

$$\mathrm{d}N=\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z+\cdots \tag{1-1-12}$$

由于通常误差远小于测量值，把 $\mathrm{d}x$，$\mathrm{d}y$，$\mathrm{d}z$，…看做直接测量量的误差，$\mathrm{d}N$ 就是间接测量量的误差，而式（1-1-12）就是间接测量量的绝对误差公式。

对函数取对数后再求全微分，则有相对误差公式

$$\frac{\mathrm{d}N}{N}=\frac{\partial \ln f}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial \ln f}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial \ln f}{\partial z}\mathrm{d}z+\cdots \tag{1-1-13}$$

式（1-1-12）、式（1-1-13）表达了各直接测量量 x，y，z，…的误差与间接测量量 N 的误差之间的关系，称为误差传递的基本公式。等式右边各项叫做分误差，$\frac{\partial f}{\partial x}$，$\frac{\partial f}{\partial y}$，$\frac{\partial f}{\partial z}$ 及 $\frac{\partial \ln f}{\partial x}$，$\frac{\partial \ln f}{\partial y}$，$\frac{\partial \ln f}{\partial z}$ 叫做误差的传递系数。间接测量量的误差，不仅取决于各直接测量量的误差大小，还取决于误差传递系数。

2. 误差的“方和根合成”公式

误差的传递和合成有两种方式——“方和根合成”和“算术合成”。“方和根合成”又称为“方差合成”。对于标准偏差、相似标准偏差——即不确定度以及合成不确定度来说，由于它们的方差均存在，只要各直接测量量独立无关，则间接测量量的误差服从“方和根合成”。即

$$\sigma_{\mathrm{N}}=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2\sigma_x^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\sigma_y^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2\sigma_z^2+\cdots} \tag{1-1-14}$$

$$\frac{\sigma_{\mathrm{N}}}{N}=\sqrt{\left(\frac{\partial \ln f}{\partial x}\right)^2\sigma_x^2+\left(\frac{\partial \ln f}{\partial y}\right)^2\sigma_y^2+\left(\frac{\partial \ln f}{\partial z}\right)^2\sigma_z^2+\cdots} \tag{1-1-15}$$

式（1-1-14）、式（1-1-15）中，σ_x，σ_y，σ_z，…为直接测量量的合成不确定度；σ_{N} 为间接测量量的合成不确定度，其意义仍然是标准偏差。

常用函数关系的“方和根合成传递”公式如表 1-1-1 所示。

由表中可见，间接测量量的函数关系为加减法时，用绝对误差公式计算方便，为乘除关系，则用相对误差公式计算方便；另外，当某一项分误差小于最大一项分误差的 1/3 时就可略去不计，使运算简化，在分析中可突出主要因素的影响。

实际应用中，有时难以确定误差所服从的分布规律而仅仅估算直接测量量的误差限 $\Delta_{\lim}$ 时，则间接测量量的误差限仍应以方和根的形式合成。式（1-1-14）、式（1-1-15）可改写成

$$\Delta N=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2\Delta x^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\Delta y^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2\Delta z^2+\cdots} \tag{1-1-16}$$

$$\frac{\Delta N}{N}=\sqrt{\left(\frac{\partial \ln f}{\partial x}\right)^2\Delta x^2+\left(\frac{\partial \ln f}{\partial y}\right)^2\Delta y^2+\left(\frac{\partial \ln f}{\partial z}\right)^2\Delta z^2+\cdots} \tag{1-1-17}$$

表 1-1-1 常用函数关系的"方和根合成传递"公式

函数表达式	标准偏差传递公式	函数表达式	标准偏差传递公式
$N=x+y$	$\sigma_N=\sqrt{\sigma_x^2+\sigma_y^2}$	$N=kx$	$\sigma_N=k\sigma_x;\ \dfrac{\sigma_N}{N}=\dfrac{\sigma_x}{x}$
$N=x-y$	$\sigma_N=\sqrt{\sigma_x^2+\sigma_y^2}$	$N=\sqrt[m]{x}$	$\dfrac{\sigma_N}{N}=\dfrac{1}{m}\cdot\dfrac{\sigma_x}{x}$
$N=xy$	$\dfrac{\sigma_N}{N}=\sqrt{\left(\dfrac{\sigma_x}{x}\right)^2+\left(\dfrac{\sigma_y}{y}\right)^2}$	$N=\sin x$	$\sigma_N=\lvert\cos x\rvert\sigma_x$
$N=\dfrac{x}{y}$	$\dfrac{\sigma_N}{N}=\sqrt{\left(\dfrac{\sigma_x}{x}\right)^2+\left(\dfrac{\sigma_y}{y}\right)^2}$	$N=\ln x$	$\sigma_N=\dfrac{\sigma_x}{x}$
$N=\dfrac{x^k y^m}{z^n}$	$\dfrac{\sigma_N}{N}=\sqrt{k^2\left(\dfrac{\sigma_x}{x}\right)^2+m^2\left(\dfrac{\sigma_y}{y}\right)^2+n^2\left(\dfrac{\sigma_z}{z}\right)^2}$		

式中，Δx，Δy，Δz，…为各直接测量量的最大误差限，ΔN，$\dfrac{\Delta N}{N}$则近似为间接测量结果的绝对误差限和相对误差限。将对应表 1-1-1 中不确定度的符号（σ）改写成误差限符号（Δ），即可得到间接测量量的误差限的近似公式。

3. 间接测量结果的表示

已知间接测量量 N 与直接测量量 x，y，z 的函数关系为 $N=f(x, y, z)$。各直接测量量的测量结果为 $x_{测}=\overline{x}_c\pm\sigma_x$，$y_{测}=\overline{y}_c\pm\sigma_y$，$z_{测}=\overline{z}_c\pm\sigma_z$，则间接测量的最佳值$\overline{N}_c$是将各直接测量最佳值$\overline{x}_c$，$\overline{y}_c$，$\overline{z}_c$代入函数关系式求得，即

$$\overline{N}_c=f(\overline{x}_c,\overline{y}_c,\overline{z}_c)$$

间接测量结果的不确定度可由"方和根合成传递"公式求得。即

$$\sigma_N=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\sigma_x\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\sigma_y\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\sigma_z\right)^2} \tag{1-1-18}$$

最后，间接测量的结果也应表示成如下形式

$$N_{测}=\overline{N}_c\pm\sigma_N \tag{1-1-19}$$

式（1-1-18）中的 σ_x，σ_y，σ_z 可以是各直接测量的合成不确定度 σ 或误差限 $\Delta_{\lim}$，则 σ_N 的意义对应为合成不确定度或总误差限（近似值）。σ_N 的位数一般取 1 位，最多 2 位。

例 3 用游标卡尺测量金属圆柱体的高度 5 次，测量值为 10.70mm，10.78mm，10.80mm，10.72mm，10.76mm；用螺旋测微计测量直径 5 次，测量值分别为 5.644mm，5.648mm，5.653mm，5.640mm，5.638mm，如果已知游标卡尺的最大示值误差为±0.02mm，螺旋测微计的最大示值误差为±0.004mm，求金属圆柱体的体积。

解 直径的平均值 $\overline{D}=\dfrac{1}{5}\sum\limits_{i=1}^{5}D_i=5.6446\text{mm}$

标准偏差 $S_D=6.1\times10^{-3}\text{mm}$；$S_{\overline{D}}=\dfrac{S_D}{\sqrt{K}}=2.7\times10^{-3}\text{mm}$

$$U_D=\frac{0.004}{3}=1.4\times10^{-3}\ (\text{mm})$$

合成不确定度 $\sigma_D=\sqrt{S_{\overline{D}}^2+U_D^2}=4\times10^{-3}\ (\text{mm})$

直径的测量结果 $D_{测}=(5.645\pm0.004)\text{mm}$

高度的平均值 $\overline{H}=\dfrac{1}{5}\sum\limits_{i=1}^{5}H_i=10.752\text{mm}$

标准偏差 $S_H=4.1\times10^{-2}\text{mm}$，$S_{\overline{H}}=1.9\times10^{-2}\text{mm}$