SHUXUE

经全国中小学教材审定委员会2003年审查通过

全日制高级中学课本（必修）

数学

SHUXUE 第二册（下）

教育部《中学数学实验教材》研究组 编著

北京师范大学出版社

经全国中小学教材审定委员会2003年审查通过

全日制高级中学课本（必修）

数学

第二册
（下）

教育部《中学数学实验教材》研究组 编著

北京师范大学出版社

北 京

全日制高级中学课本（必修）

数学

第二册（下）

北京师范大学出版社出版发行
（北京新街口外大街19号　邮政编码：100875）
http://www.bnup.com.cn
出版人：赖德胜
北京京师印务有限公司印刷　全国新华书店经销
开本：185 mm×260 mm　印张：11.25　字数：280千字
2004年11月第3版　2006年12月第5次印刷
印数：35 101～45 200册
定价：9.40元

前　　言

这套高中数学教材是在教育部基础教育司的组织领导下，于1980年初，根据美国加州大学伯克莱分校（UC，Berkeley）数学系项武义教授的设想和初纲，由本教材实验研究组广泛听取了专家和中学数学界有丰富经验的教研员、教师的意见，集体讨论、分工编写而成的，并从1982年开始，在全国近20个省、市、自治区进行了十多年的实验教学。在吸取各地使用教材的宝贵经验的基础上，前后经过三次调整修订，于1993年正式出版，并被原国家教委推荐为全国高中数学教学和中学数学教师进修的参考书。

这套教材还特别于1989～1992年进行了一轮有组织、有计划的严格实验教学，完善和充实了有益于中学生学好基础、提高能力的内容和训练，使教材更具有特色。经过三年教学，实验班进行了单独命题的高考，取得了优良成绩，同时也为这套教材的修订及教学参考书的编写提供了丰富的经验和资料。

这套教材的重新修订是总结十多年的教学实验经验和实验研究成果，根据教育部最新颁发的“全日制普通高级中学数学教学大纲”的精神，为适应我国当前高中数学教学改革的新形势和新要求而进行的。全套教材经教育部中小学教材审定委员会2003年审查通过。从2000年开始，这套教材一直在全国部分省、市学校使用，效果良好。

本教材的指导思想是：精简实用，返璞归真，顺理成章，深入浅出，注重实践能力和创新精神的培养。

精简实用——科学地体现了理论与实践的正确关系。由实践到理论就是由繁到简；精而简的理论才能以简驭繁。

返璞归真——着重于学习基础数学的本质，而不拘泥于抽象的形式。

顺理成章——从历史发展顺序和认识的规律出发，自然地处理教材。力求顺理成章，注意提前渗透后面的重要概念和思想，为后面的学习预先做准备，使学习能比较顺利。同时，兼顾分析、综合、推理三种方法，以便真正掌握数学的精神实质和思想方法，培养思考能力。

深入浅出——只有学习到应有的深度才能浅出，其要点在于用易于接受的形式去掌握枢纽性的理论。

这套教材的教学目的、教学内容的确定和安排、教学中应注意的几个问题、教学测试和评估均与部颁大纲保持一致；教学内容和教学目标均源于大纲，包含了大纲中的必修与选修Ⅰ、Ⅱ的所有内容。教材中带“*”号的部分是有特色的内容，供教学中结合实际、灵活掌握选学；教材中的阅读材料为“弹性”内容，供学有余力的学生阅读自学。

这套教材在修订中，特别注意了以下事项：

1. 保持了本教材的特色。

(1) 数学知识结构的整体性、系统性较强。

(2) 重视数学上的通性、通法；在知识的展开上突出基本数学思想和数学方法，注重说理；体现知识教学和能力培养的统一。

(3) 尽力体现和渗透现代数学观点，使教材的科学性和发展性达到较高水平。

2. 增加了应用题、研究性课题和实习作业，尽力重视个性品质、科学态度、创新精神的培养和辩证唯物主义的教育。

3. 删减了原有的超纲内容，降低了难度，着眼于代数、几何、分析、概率与统计4个基础学科，选其精要基础的内容；但编排体系上，采取与部颁大纲基本一致的不分学科、统一处理、穿插安排的系统。

这套教材包括必修两册共四本，选修一册共两本。其主要内容分别是：

第一册（上）　集合与逻辑初步；不等式；函数。

第一册（下）　指数函数与对数函数；三角函数；数列。

第二册（上）　平面向量；直线和圆的方程；圆锥曲线方程。

第二册（下）　立体几何；排列、组合及二项式定理；概率。

第三册（理）　概率与统计；极限与连续；导数；复数。

第三册（文）　统计；导数。

第一、二册是供高中一、二年级必修使用，第三册是供高中三年级选修使用。其中，第三册（理）的内容是大纲中的选修Ⅱ，供高三理、工方向的学生使用；第三册（文）的内容是大纲中的选修Ⅰ，供高三文、实方向的学生使用。

参加修订编写的有丁尔陞、李建才、高存明、罗声雄、邱万作、万庆炎、叶尧城等同志。参加本册修订的还有连四清、王松浦。

热忱地欢迎大家使用这套教材，希望提出意见与建议，为提高我国数学基础教育水平共同努力。

教育部《中学数学实验教材》研究组

2003. 3

目　录

第十章 立体几何

在第六章，我们学习了平面向量，把平面几何的研究代数化，并用向量运算推出平面图形的一些重要性质，如正弦定理和余弦定理等．但我们看到的大多数物体占有的空间并不在一个平面上，它们不仅具有“长度”、“宽度”，而且还具有“高度”，这样具有空间三度的图形叫做立体图形．在生产、生活和科学研究中，仅仅具有平面图形的性质就不够用了．例如，在建造圆柱形高层建筑时，如何在施工中使建筑物的中心轴线始终与地面垂直；建造大跨度的桥梁，常常是从两岸同时建造，如何能保证，桥面最后能够吻合．又如，画家画出的作品都是通过平面图形来表达，工程师也是要把建造的立体对象先画在平面图纸上，然后再依据图纸建造．如何用平面图形去表示立体图形的性质呢？这些都需要我们研究空间和立体图形的性质及其度量．

这一章，我们将在初中和高一学习的基础上，进一步研究空间和立体图形的性质，并将平面向量推广到空间，进而学习空间向量运算及其应用．

§1 平面的基本性质

1.1 基本性质

1. 平面的表示法

在平面内，基本图形是点、直线、射线和线段. 在空间内，

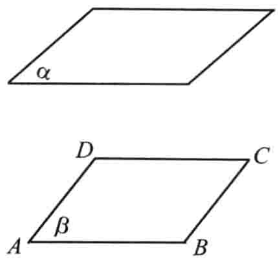


图 10-1

还要引入新的基本图形——平面,并研究它的基本性质.

几何里的平面和直线一样是无限延展且没有边界的.常见的桌面、黑板面、平静的水面都是平面的局部形象,我们无法在纸上,把一个无限延展的平面画出来,通常画平面的一部分.例如用平行四边形(锐角一般为45°)表示平面(图 10-1),不过要把它想象成无限延展的.平面一般用希腊字母 $\alpha,\beta,\gamma,\cdots$ 来命名,还可以用表示平行四边形的对角顶点的字母来命名.例如,图 10-1 中的平面 α、平面 β、平面 AC 等.

2. 平面的基本性质

在日常生活中,我们知道物体表面有两种,一种是"平的面",也就是平面,另一种是弯曲的面,也就是曲面.下面我们学习平面的基本性质.

基本性质 1 如果一条直线上的两点在一个平面内,那么这条直线上的所有点都在这个平面内(图 10-2).

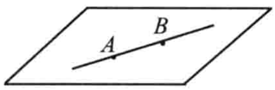


图 10-2

这时,我们说直线在平面内或平面经过直线.

利用这个性质,可以判断一条直线是否在一个平面内.木工在检查木板面是不是平的,通常用直尺沿各个方向靠近板面,如果不管怎么靠,中间都不出现缝隙,那么这块板面就是平的.检验的原理就是利用上述平面的基本性质.

基本性质 2 如果两个平面有一个公共点,那么它们就有另外的公共点,并且所有公共点的集合是经过这个点的一条直线(图10-3).

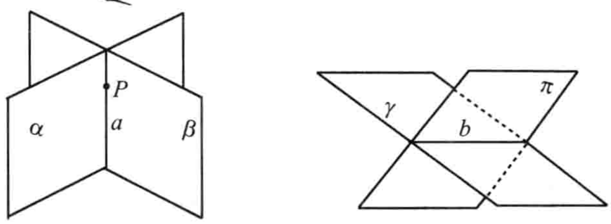


图 10-3

以后说到两个平面,如不特别说明都是指两个不重合的平面.如果两个平面有一条公共直线,那么称这**两个平面相交**.这条公共直线叫做两个平面的交线.如图 10-3,α 与 β 相交,交线是 a,π 与 γ 相交,交线是 b.

在画两个平面相交时,当其中一个平面被另一个平面遮住时,应把被遮住的部分画成虚线或不画(图 10-3).

基本性质 3　经过不在同一条直线上的三点,有且只有一个平面(图 10-4).

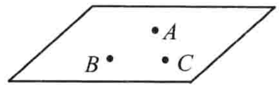


图　10-4

例如,一扇门,可以想象为平面的一部分,通常用两个合页把它们固定在门框的一边上.当门不锁上时,可以自由转动,如果门锁上,那么门就固定在门框所在的墙面上.这个事实说明了平面的基本性质 3(图 10-5).

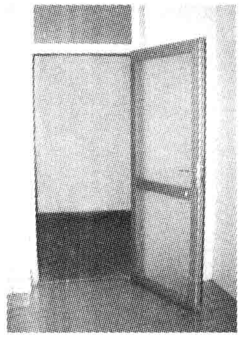


图　10-5

基本性质 3 也可简单地说成,**不共线的三点确定一个平面**.过不共线三点 A,B,C 的平面通常记作平面 ABC.

基本性质 4　空间的所有点不全在一个平面内.

什么是平面?我们可以说具有基本性质 1～3 的图形叫做**平面**.而且由基本性质 4 可知,平面是空间的一个真子集.

练　习

1. 能不能说一个平面有边界?为什么?
2. 画几个平行四边形表示平面,并用字母命名.
3. 能不能说点 A 在平面 α 的边界上?为什么?
4. 一个平面能把空间分成几部分?两个平面能把空间最多分成几部分?三个平面呢?
5. 判断下列命题的真假:

   (1)如果两个平面有两个公共点 A,B,那么它们就有无穷多个公共点,并且这些公共点都在直线 AB 上;

   (2)如果线段 AB 在平面 α 内,那么直线 AB 在平面 α 内;

   (3)两个平面的公共点的集合,可能是一条线段;

   (4)两个相交平面有不在一条直线上的三个公共点.
6. 如果一条直线不在平面 α 内,那么它与平面 α 的公共点最多有几个?

1.2　推　论

推论 1　经过一条直线和这条直线外的一点,有且只有一个平面(图 10-6 甲).

推论 2 经过两条相交直线，有且只有一个平面(图 10-6 乙).

推论 3 经过两条平行直线，有且只有一个平面(图 10-6 丙).

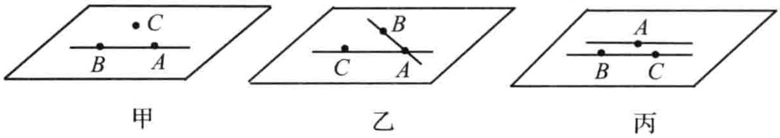


图 10-6

我们只证明推论 1，其余两个推论同学自己证明.

已知：直线 AB 和其外一点 C.

求证：直线 AB 和点 C 确定一个平面.

证明 由于点 A，B 是直线 AB 上的两点，点 C 不在直线 AB 上，所以 A，B，C 三点不共线. 由基本性质 3，A，B，C 三点确定惟一平面 α；由基本性质 1，直线 AB 在 α 内. 所以 α 是直线 AB 和点 C 确定的平面. 如果通过 AB 和点 C 还有一个平面，那么与基本性质 3 矛盾.

如果空间内的几个点或几条直线都在同一平面内，那么我们就说它们是**共面**.

如果构成图形的所有点都在同一平面内，那么这类图形叫做**平面图形**. 例如，我们学过的三角形、平行四边形、梯形和圆等都是平面图形. 如果构成图形的点不全在同一平面内，那么这类图形叫做**立体图形**. 例如我们学过的立方体、球等都是立体图形(图 10-7).

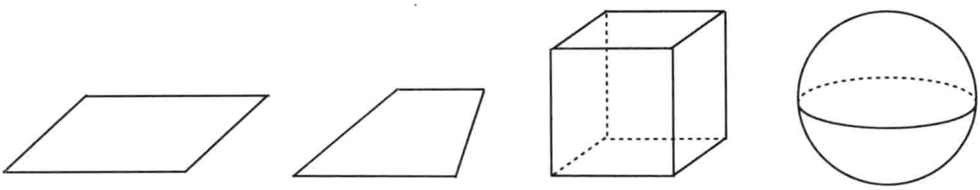


图 10-7

我们把空间看做点的集合. 这就是说，点是空间的基本元素，表示空间内的一个确定的位置，它没有大小之分. 直线和平面都是空间的真子集；直线是平面的真子集. 于是，我们可用集合语言来描述点、直线和平面之间的关系以及图形的性质. 例如：

点 A 在平面 α 内，记作 $A\in\alpha$，点 A 不在 α 内，记作 $A\notin\alpha$；

直线 l 在平面 α 内，记作 $l\subset\alpha$，直线 l 不在平面 α 内，记作 $l\not\subset\alpha$；

平面 α 与平面 β 相交于直线 l，记作 $\alpha\cap\beta=l$；

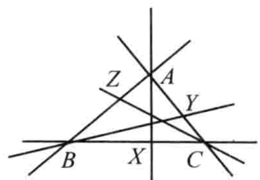
直线 l 和 m 相交于点 A，记作 $l\cap m=\{A\}$，简记作 $l\cap m=A$.

基本性质 1，用集合符号可表示成：

如果点 $A\in$ 平面 α，点 $B\in$ 平面 α，那么直线 $AB\subset\alpha$.

练 习

1. 为什么说平行四边形和梯形都是平面图形？
2. 一个锐角或钝角一定是平面图形吗？为什么？
3. 已知 A,B,C 是空间不共线的三点，画直线 AB,BC,CA. 设 X,Y,Z 分别表示直线 BC,CA,AB 上的动点，问：三组直线 $\{AX\}$，$\{BY\}$，$\{CZ\}$ 是否都在平面 ABC 上？为什么？



（第 3 题）

4. 怎样检查一张桌子的四条腿的下端是否在同一平面内？
5. 用集合符号表示下列语句：

   (1) 点 A 在平面 α 内，点 B 不在平面 α 内；

   (2) 直线 l 在 α 内，直线 m 不在 α 内；

   (3) 直线 l 与平面 α 相交于点 A；

   (4) 平面 α 与平面 β 相交于直线 l.
6. 证明推论 2 和推论 3.

习 题10—1

1. 下面的说法正确吗？为什么？

   (1) 每一个平面都有确定的面积；

   (2) 如果平面 α 与平面 β 相交，那么它们只有有限个公

共点；

(3)经过空间任意三点，有且只有一个平面；

(4)如果两个平面有三个不共线的公共点，那么这两个平面就重合为同一个平面.

2. 填空：

(1)经过________的三个点，有且只有一个平面；

(2)两条________或________的直线确定一个平面；

(3)有一个公共点的两个平面相交于____一条直线.

3. 四条线段首尾连结，所得的图形一定是平面图形吗？为什么？

4. 不共面的四点中，每三个点确定一个平面，一共可以确定几个平面？

5. 一条直线和两条平行直线都相交，这三条直线是否共面？

6. 过一个点可以有多少个平面？过两个点呢？过不共线的三个点呢？

7. 已知平面 α，直线 a，b，且 $a \subset \alpha$，$a \cap b = A$，下面的结论正确吗？

(1) $A \in \alpha$；　　　　(2) $b \subset \alpha$.

8. 如果一个角的两边都不在平面 α 内，那么这个角与 α 至多有多少个交点？

9. 三条直线两两平行，且不共面，每两条确定一个平面，一共可以确定几个平面？如果三条直线相交于一点，那么它们最多可确定几个平面？

10. 求证：分别过已知直线外一点与这条直线上三点的三条直线在同一平面内.

11. 用语言叙述下列符号所表示的关系：

(1) $l \subset \alpha$；

(2) $l_1 \cap l_2 = P$，且 $l_1 \cup l_2 \subset \alpha$；

(3) $\alpha \cap \beta = l$，且 $l \subset \alpha$.

12. 将下列集合符号表述改为自然语言表述，并判断它们是否正确（α 表示一个平面）.

(1) $A \in \alpha$，$B \notin \alpha \Rightarrow$ 直线 $AB \subset \alpha$；

(2) $\left.\begin{array}{l} A \in \alpha \\ B \in \alpha \\ C \in AB \end{array}\right\} \Rightarrow C \in \alpha$.

§2 空间的平行关系

在平面内两条直线的位置关系有相交、平行和重合三种，在空间，两条直线除以上三种位置关系外，还有异面直线. 这节我们着重研究空间平行直线的性质，并讨论异面直线的有关概念.

2.1 空间的平行直线与异面直线

1. 空间的平行直线

我们已经知道，在同一平面内，不相交的两条直线叫做**平行线**，并学习了平行线的基本性质：

平行公理 过直线外一点有且只有一条直线和这条直线平行.

平行线的传递性 在同一平面内，如果两条直线分别和第三条直线平行，那么这两条直线互相平行.

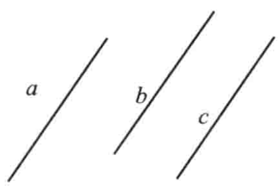
平行线的传递性可推广到空间.

定理 10.1 在空间内，平行于同一条直线的两条直线互相平行.

这就是说，如果直线 $a /\!/ b, c /\!/ b (b /\!/ c)$，那么 $a /\!/ c$（图 10－8(1)）.

这一性质，通常又叫做**空间平行线的传递性**.

在几何学中，通常用互相平行的直线的集合表示空



(1)

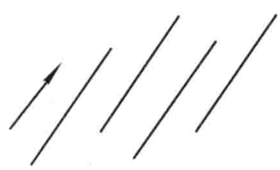

(2)

图 10－8

间的一个确定的方向(图 10-8(2)).

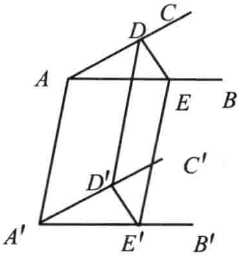


图 10-9

定理 10.2 如果一个角的两边和另一个角的两边分别平行并且方向相同,那么这两个角相等.

已知:$\angle BAC$ 和 $\angle B'A'C'$ 的边 $AB /\!/ A'B'$,$AC /\!/ A'C'$,并且方向相同(图 10-9).

求证:$\angle BAC = \angle B'A'C'$.

证明 设两个角不在同一平面上[1],可分别在 $\angle BAC$ 和 $\angle B'A'C'$ 的两边上截取 $AD = A'D'$,$AE = A'E'$,连结 AA',DD',EE',DE 和 $D'E'$.

由于 $AD \mathrel{\underline{/\!/}} A'D'$,因而 $AA'D'D$ 是平行四边形,所以

$$AA' \mathrel{\underline{/\!/}} DD'. \qquad ①$$

又由于 $AE \mathrel{\underline{/\!/}} A'E'$,因而 $AA'E'E$ 是平行四边形,所以

$$AA' \mathrel{\underline{/\!/}} EE'. \qquad ②$$

由①,②知,$DD' \mathrel{\underline{/\!/}} EE'$,所以 $DD'E'E$ 是平行四边形.

所以 $DE = D'E'$.

所以 $\triangle ADE \cong \triangle A'D'E'$.

因此 $\angle BAC = \angle B'A'C'$.

[1] 若 $\angle BAC$ 和 $\angle B'A'C'$ 在同一平面上,结论在平面几何中已经证明.

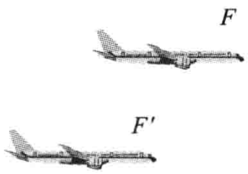


图 10-10

如果空间图形 F 中的所有点都沿同一方向移动相同的距离到 F' 的位置,那么就说图形 F 在空间作了一次**平移或平移变换**(图 10-10). 在图 10-9 中,可看做 $\angle BAC$ 平移到 $\angle B'A'C'$.

由上述定理可以推知,**图形平移后与原图形重合,即对应角和对应两点的距离保持不变.**

如图 10-11(1),顺次连结不共面的四点所构成的图形,叫做**空间四边形**. 每个点叫做空间四边形的顶点,

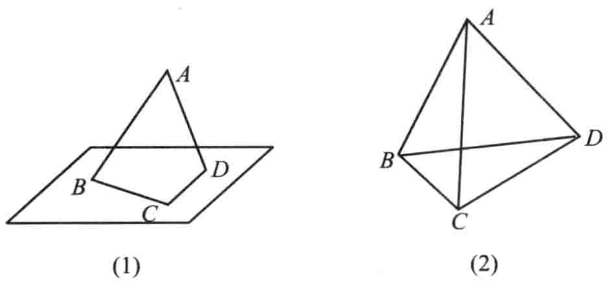


图 10-11