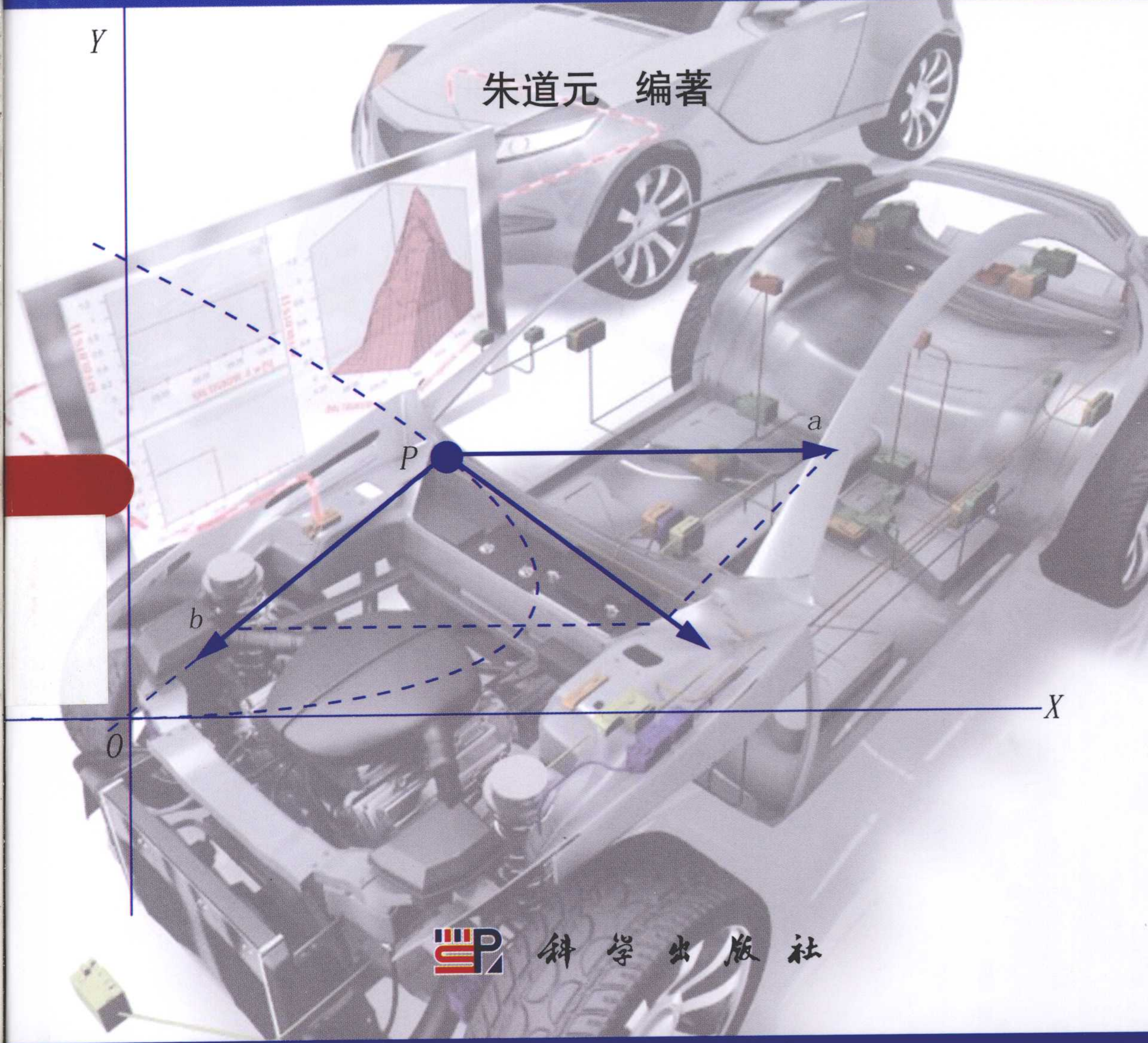
研究生数学建模精品案例

朱道元　编著



科学出版社

研究生数学建模精品案例

朱道元　编著

科 学 出 版 社

北　京

内 容 简 介

本书精选了全国研究生数学建模竞赛的若干赛题，总结并发展了相应的优秀论文及命题人的综述. 全书共分 12 章，内容包括从研究生数学建模角度看创造性及创造性培养、吸波材料与微波暗室问题的数学建模、基于光的波粒二象性一种猜想的数学仿真、汶川地震中唐家山堰塞湖泄洪问题、特殊工件磨削加工的数学建模、空中加油问题、基因识别问题及其算法实现、维修线性流量阀时的内筒设计问题、确定肿瘤的重要基因信息、邮政运输网络中的邮路规划和邮车调度、110 警车配置及巡逻方案、研究生录取问题等前沿、实际问题中的数学建模问题及解决方法.

本书可供普通高等院校各专业的硕士生、博士生作为教材或辅导书，也可供从事数学建模的教师和相关科研人员参考使用.

图书在版编目(CIP)数据

研究生数学建模精品案例/朱道元编著. —北京：科学出版社，2014.3
ISBN 978-7-03-039844-4

I. ①研… II. ①朱… III. ①数学模型-研究生-教学参考资料 IV. ①O141.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014) 第 033410 号

责任编辑：姚莉丽／责任校对：韩 杨
责任印制：阎 磊／封面设计：迷底书装

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京市文林印务有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2014 年 3 月第 一 版 开本：720×1000 B5
2014 年 3 月第一次印刷 印张：25 3/4
字数：516 000
定价：52.00 元
(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　言

自 2004 年全国研究生数学建模竞赛开始举办以来，今年已经是第 10 年了，全国 32 个省 (自治区、直辖市) 有 300 多个研究生培养单位的 5 万多名研究生参赛，其中博士生近 3000 名，同时还吸引了港澳台的部分研究生参赛，规模越来越大，影响越来越广. 今年竞赛已经被教育部列入全国研究生创新实践系列活动主题赛事，由教育部学位与研究生教育发展中心主办. 与此同时竞赛也获得社会各界的广泛认可，华为公司连续冠名赞助该项赛事. 总之我国首创的这一赛事已经进入良性循环的轨道.

每年竞赛评审委员会都为竞赛命题 4 条以上，至今已经有 42 条. 虽然每年在赛后都选择一批优秀论文在核心期刊上公开发表，由于这些问题都是从实际问题、科学前沿提炼而成, 解决起来非常困难，尽管参赛研究生有些很优秀，但由于受竞赛仅仅 4 天的时间限制，这些优秀论文仍然存在一些错误. 一般来说, 还不能很好地解决实际问题，还存在大量的遗留问题. 尤其在上升到理性的高度方面还不够，这对实现研究生数学建模活动的目的，加强研究生数学建模的作用，提高研究生数学建模活动的效率显然是不利的. 因此迫切需要对全国研究生数学建模竞赛的情况认真总结，对赛题中尚未解决的问题进行攻关，力求取得突破，以充分发挥优秀赛题培养研究生创造性和创新精神的载体作用.

本书就是为此目的编写的，为此作者参考了许多优秀论文和命题人赛后发表的综述，所以本书是命题人和广大参赛研究生的共同成果，在此向各位命题人和获奖研究生表示感谢. 虽然作者又在他们的基础上做了一些研究，也取得部分进展，并对部分结论给出了证明，但限于作者的水平，疏漏之处在所难免，欢迎批评指正.

作　者

2013 年冬

目　录

第1章

从研究生数学建模角度看创造性及创造性培养

我们通过十年的实践，经过认真、反复地思考，从数学建模的学术角度对研究生培养中被公认是极端重要的创造性、创新能力的内涵以及创造性培养的特点进行了比较深入的探讨，逐渐从大量的感性认识中升华出一些理性的认识.

一、创造性的一种分类结果

从数学建模的角度看，创造性根据创造积累的时间长度、所运用知识的深度大致可以分成两类. 一类是原创性成果、重大发明中所包含的创造性，这些创造不是一朝一夕就可以实现的，都需要经过长时间的积累，甚至几代人的努力. 所谓“十年磨一剑”就是这个道理. 这些创造需要一批科学工作者经过漫长的、前赴后继的科学攀登，在攻克一系列理论或实际的难题后才能获得. 例如，载人宇宙飞船的研制和发射、优质杂交水稻品种的培育和推广、概率论中的中心极限定理、哥德巴赫猜想的证明等，许多长期的国家重大的科技攻关也属于这个范畴. 另一大类创造性种类繁多、情况各异，但也有共同的特点，就是“一听就能够明白，不听就是想不到，采用后作用重大”. 这些创造性与前一类创造性的差别在于，它不需要特别高深的理论和复杂的知识背景，一般当事人已经具备或只需要稍加补充即可从事这些活动，甚至道理浅显近乎常识；它解决问题的过程也比较短暂，无需漫长的积累，甚至“立竿见影”；但采用这些创造性后，对困难的问题就能“势如破竹，迎刃而解”，“攻坚克难，如履平地”.

例如，获得诺贝尔经济学奖的投入产出理论，虽然对经济界产生重大的影响，但从代数理论上看并不高深，只是将众多原材料和产品之间的数量关系近似为线性关系，并把这些关系用矩阵来表达，然后利用矩阵有关理论得出经济方面诸如各行业之间应协调发展等许多重要的经济规律.

再如数学建模的经典范例，牛顿推导著名的万有引力定律，就是先用简单的极

坐标参数方程来表示在椭圆轨道上物体的运动，进而对这个方程进行简单求导，最高也就是二阶导数，最后将开普勒天体三大运动定律的结论代入上述求导的结果，就得出了万有引力定律，过程并不复杂.

又如统计上著名的正态分布总体的极大似然估计公式[2]. 它的思想其实非常简单，就是在样本比较多的时候样本的频率应该接近它的概率，因而合理地推测已经出现了的样本频率是最大的，则它的概率密度函数也应该是最大的；而在求概率密度函数关于均值和方差的极大值点时，通过分析正态分布概率密度函数的特点，简化为分别求概率密度函数关于均值、关于方差的极大值点，并根据常识猜测样本的平均值就是极大值点；这样就很容易地推导出有关公式.

还可以再举这样的例子. 人们刚开始研究火箭时，火箭发射的推力不足，无法把比较重的荷载送上天空，是困扰火箭设计者的大问题. 但将火箭从两节改成三节，由于第三节火箭在燃料用完时被丢弃，减轻了这时火箭的自重，火箭保留的部分就可以获得更大的推力. 虽然解决了大问题，但想到这一点并不需要高深的专业知识.

也可以再举这样的例子. 如动态规划中著名的“工件排序问题”[1]，要求将 n 个不同的工件都先在 A 机床、后在 B 机床上加工，如果 A 机床、B 机床各一台，每个工件在 A 机床、B 机床上加工的时间不受加工顺序的影响，探讨在加工总时间最短 (即 B 机床上停工等待时间最短) 的条件下的工件排序规律. 如果用一般的穷举法，当工件数比较多的时候，即使使用世界上运算最快的超级计算机“天河二号”也根本无法找到最优解. 但是如果只考虑相邻两个工件，因为这时只有很简单的两种情况，发现排序规律并不难，推广到解决工件数比较多的实际问题也只要几分钟. 这个方法的创造性原理，就来自于对站在操场上的一排学生，只需要保证相邻两名学生从高到低的正确排序，就可以实现全体学生从高到低的排序. 因为它把问题从比较 $n!$ 个结果大小的极其复杂的问题转变成只有两个结果的简单大小比较问题，正是“一听就能够明白，不听就是想不到，采用后作用重大”.

再如 1994 年美国大学生数学建模竞赛题，要求出螺旋线和处于任意位置的指定平面的全部交点[1]. 当螺旋线的轴几乎平行于指定平面时，交点将有成万上亿个，即使使用世界上最快的计算机也无法逐个求出全部的交点，并用于实时控制. 在经过等价转化以后，这个问题变为求 $\cos\varphi = a\varphi + b$ 的全部的解，当 a 很小的时候，仍然无法逐个求出全部成万上亿个解，用于实时控制. 但它类似高中课程中解基本三角方程 $\cos\varphi = b$ 的内容，虽然这个方程有无穷多解 $2k\pi \pm \arccos b$ (k 取一切整数)，求解却非常简单，原因就是在无穷多解中我们只需要求出它们的两个代表 $\pm\arccos b$. 受这个创造性的启发，当螺旋线的轴几乎平行于指定平面时，根据精度要求，准周期函数的成万上亿个交点也只要选择适当个数的代表，找到这些代表，加上 $2k\pi$ (k 取部分整数) 也就找到了满足精度要求的全部交点. 因此现有计算机

完全胜任实时控制的要求. 虽然解决了非常困难的问题，但道理却连高中生也完全理解.

全国研究生数学建模竞赛十年来，竞赛中不乏光的波粒二像性、基因识别、确定癌症基因标签、堰塞湖泄洪、反导、卫星天线罩加工、高速公路路面质量等学科前沿问题，然而研究生们在短短 100 小时之内却也做出了一些有价值的成果，有力地证明第二类创造性在研究生数学建模活动中同样大量存在.

还可以举出很多类似的例子.

虽然上述两种创造性相互之间存在明显的差别，但它们之间的联系却是相当紧密的. 实际上，第一种创造性的基础就是第二种创造性，第二种创造性经过长期大量的积累可能升华为第一种创造性；反过来，第一种创造性中蕴涵了大量的第二种创造性，第一种创造性的产生也会大大刺激第二种创造性的涌现.

第二种创造性因为不需要当事人有特别高深的理论和复杂的知识背景 (处理实际问题的当事人一般已经具备一定的相关知识)，限制比较少，存在的范围非常大，我们认为应该是研究生创造性培养的重点，同时也是数学建模活动力所能及、可以胜任的任务. 又因为一旦培养出这类创造性，人们的能力就可能大幅提升，工作效率就会有惊人的提高，所以研究生教学改革将培养创造性作为追求的目标无疑是正确的. 第二种创造性大量存在的事实，有力地说明创造性固然可以极大地提高效率，但创造性并不神秘，并非高不可攀，研究生教学改革将培养研究生创新能力作为主攻方向是切实可行的. 而通过研究生数学建模活动有利于培养研究生们的第二种创造性，从而增强研究生从事科学研究的自信心、提高研究生解决实际问题的能力，所以值得重视.

二、从研究生数学建模活动的学术视角探讨创造性的具体内涵

根据十年来全国研究生数学建模竞赛和二十年来为我校博士研究生开设数学建模课程的长期实践，仅从纯学术视角分析、考察研究生数学建模活动和相关的学术研究活动，我们认为研究生数学建模活动中所需要、所培养的创造性大致可以归纳为以下十个方面.

1. 敢于质疑、挑战权威，勇于猜测、标新立异，善于发现、提出有价值的问题

世界上的许多事物是错综复杂的，没有经验的人遇到这类问题经常会感到无从下手，甚至不知道应该解决什么问题，不知道应该向什么方向努力，更不知道会有什么结果，只能是“盲人骑瞎马”. 所以提出有价值的问题或新的理念是创造的前提，也是重要的创造性. 例如，数学上的费马大定理、概率论的中心极限定理，天文学的宇宙大爆炸的学说, 化学上的元素周期律等都是因为猜测并提出有价值问题而导致有关学科的迅速发展. 许多定理、定律、学说都是先有命题、假设、猜想，

经过理论或实践的证明才最终成为定理、定律、学说. 创造性之所以被称为创造，就是因为从来没有人这么想过，没有人这么做过. 因此它首先一定是大胆的猜测，虽然要有一定的道理，但也不会有绝对的把握. 猜是经验的升华，猜是跳跃式的思考，猜是前进的阶梯，猜来自敏锐的洞察力，猜的基础是对问题本质的研究. 经常猜测有助于活跃思维，所以猜测是创造性的摇篮.

而要解决新问题特别是困难的问题，一定伴随着思想的突破与飞跃，经常会与主流观念发生激烈的冲突. 如果不敢质疑权威，墨守成规，就不会有大胆的猜测，也就不会有质的变化. 爱因斯坦如果不敢质疑几百年来一直占据统治地位的牛顿运动定律就不会有相对论原理. 斯泰因如果不敢质疑正态分布的极大似然估计就不会有迅速发展的有偏估计和非线性估计. 因此猜测经常而且必须和质疑紧密相连.

当然要猜测，首先要有猜测的对象、猜测的目标、猜测的可能结果，因此必须先发现问题. 人们处于大致相同的环境，接触基本相同的对象，接受大致相同的信息，甚至具备相同的学习经历，但多数人发现不了问题，更谈不上提出有价值的问题，少数善于观察、勤于动脑的人却可以发现并提出值得思考的问题，显示出显著的差别. 正因为如此，研究生阶段创造性培养的重要内容之一就是让他们解放思想、突破束缚；敢于质疑、挑战权威；勇于猜测、标新立异；善于发现、提出新问题、新理念、新方法. 这一点可能是我国研究生教育的薄弱环节. 例如，2008 年全国研究生数学建模竞赛 A 题 (见第 4 章) 是寻找唐家山堰塞湖的溃坝规律问题，绝大多数研究生对这个问题很茫然. 其实，唐家山堰塞湖会不会溃坝？会发生哪种形式的溃坝？什么条件下、什么时候会发生溃坝？溃坝的先兆是什么？溃坝的过程又会怎么样发展？溃坝发生后的最大危险是什么？溃坝后的最大危险将发生在什么时间、什么地点？这些就是迫切需要研究的溃坝规律. 提出这些问题其实并不困难，但如果缺少这方面的锻炼，就会认为堰塞湖的溃坝规律这个问题太专业了，感到无从下手.

2. 善于经常从多个不同的视角观察、考虑问题, 思维活跃，精于发现不同事物的相似之处，长于借鉴、移植，往往就能够另辟蹊径地解决问题

为什么对问题会有不同的看法、不同的结论，一般是由于看问题的角度不同，关注的重点不同. 有与众不同的视角，注意到被其他人忽略的关键，就很有可能产生创新. 为什么会有不同的做法、不同的途径，多数源于经历的不同、接受教育的不同、日常观察、考虑问题的方式不同. 如果经常能够从表面上大不相同的事物发现它们的共性，甚至相同的本质，就容易借鉴、移植其他学科的方法和结论，另辟蹊径地解决问题，这种创造，相对而言比较容易实现.

青藏铁路中“以桥代路”的方法创造性地解决了高原活跃冻土带施工的世界性

难题，就是由于另辟蹊径. 穿过冻土层直接在岩石上建桩，在桩上架桥，在桥上铺铁路就能有效地避免冻土层对铁路路基的破坏.

再如在 1997 年全国大学生数学建模竞赛题 “飞行管理问题”[1] 中，航空管理局要对正在其管辖范围内的、处于同一高度的 6 架飞机进行管理，以保证它们的飞行安全，在必须调整飞机的飞行方向时，要使所有飞机的调整幅度达到最小. 初看这是一个有 6 个控制对象的、复杂的、实时最优控制问题，要得到问题最优解几乎是不可能的. 但是如果把这个问题类比成在操场上有 6 个人在骑自行车，怎么让他们避免发生碰撞，并且拐弯角度要小的问题就很直观了. 基于后者，从人们的生活常识就可以知道，骑自行车的两个人如果会发生碰撞，早调整一定优于 (调整的幅度小) 晚调整，一次调整到位优于多次调整 (这可以用三角形一个外角大于任意一个与它不相邻的内角来证明). 由此类推，飞行管理问题也应该在 6 架飞机刚接受该航空管理局管辖时，就要求各架飞机做出一次到位的调整，这样所有飞机的调整的幅度最小. 所以采取控制操作的时间就完全确定了，问题也就转化为一般的优化问题，大大降低了难度.

1994 年全国大学生数学建模竞赛 “足球队排名次”[1] 问题似乎和高深的数学知识没有任何联系. 但如果认为比赛结果就是两支球队的实力之比，则容易推得竞赛成绩矩阵的正特征向量就与各支球队的实力成比例. 根据代数上的 Perron-Frobenius 定理，用幂法求出正互反矩阵的特征向量，就得到了足球队的正确排序，它完全不同于通常被采用的计算每个队积分进行排名的方法，而且可以推广到少数球队之间没有比赛的情况.

又如实现高阶实对称矩阵的相似对角化是线性代数中的困难问题[2]，到目前为止也没有找到方法，可以通过一次或有限次的运算就一定能够实现相似对角化. 但 Jacobi 发现在平面解析几何中，通过旋转坐标轴实现二次曲线方程的标准化，换成矩阵表达，就是让二阶实对称矩阵实现相似对角化. 进而发现，虽然每次旋转并不能保证高阶实对称矩阵的、不在对角线上的零元素的个数增加，却一定使变换后矩阵的非对角线元素的平方和严格减少. 从而提出了将高阶实对称矩阵实现相似对角化的 Jacobi 旋转法，用计算机就可以有效地实现实对称矩阵的相似对角化，满足工程上的需要.

概率论的中心极限定理的命题早就被提出来了，但数学家们花了 200 多年的时间才完成证明. 它不是通过早已被广泛使用的随机变量的概率密度函数，而是另辟蹊径通过随机变量的特征函数来证明的. 它虽然复杂，而且缺少实际背景，但相互独立随机变量和的特征函数是每个随机变量特征函数的乘积，求解极其方便. 反之相互独立随机变量和的概率密度函数要经过卷积才可以得到，而且无穷多次卷积根本无法计算，所以长期以来定理始终得不到证明. 这个事实充分说明另辟蹊径对解决困难的问题起着决定性作用.

再如多元统计中关于 Wishart 分布的 Bartlett 分解定理[2] 实质上就是从代数上的 Cholesky 分解移植过来的. Wishart 分布无论取什么样本时，一定都是非负定矩阵，根据 Cholesky 分解，一定可以表示为一个上三角阵 $\boldsymbol{T}$，左乘自己的转置. 再将这些上三角阵 $\boldsymbol{T}$ 合在一起统一考虑，就成为一个随机的上三角阵，由此就可以得出结论：每一个 Wishart 分布一定可以表示成一个随机的上三角阵再左乘自己的转置. Bartlett 分解定理的雏形就出现了. 由此可见这一著名定理的创造性就来自移植和借鉴.

在确定癌症基因标签的论文中，就有研究生队分别计算结肠癌样本 (cancer) 和正常样本 (normal) 各个基因间的相似性，得到相似矩阵. 分析这些基因点的联系，选择一个相似性的阈值来分别建立复杂网络图 (见第 9 章)，这些图至少给人以耳目一新的感觉，给众多基因之间的复杂关系以比较清晰的描述，直观地给出了正常人基因之间与癌症患者基因之间关系的变化，给研究工作者以更大的想象空间，创新思路油然而生.

再如微波暗室赛题 (见第 2 章)，因为微波经过墙壁反射后是按照惠更斯原理，在接触点沿各个方向都产生射线，形成一个余弦辐射体. 这样一条微波射线碰到障碍物后就变成无穷多条微波射线，每条射线长度取射线自身的强度就形成一个球. 不仅如此，由于暗室表面不可能吸收全部的微波能量，总会有部分微波再次辐射出来，这个过程不是一次、两次……有限次就结束的，理论上可以进行无穷多次辐射. 由此看来这是一个有无穷多个余弦辐射体的、经过无穷多次辐射的、无穷多点、无穷多射线、无穷多项叠加的问题. 猛一看是太难了，但借鉴常识，另辟蹊径就能解决问题.

更直接的例子，如参数估计中有极大似然估计，移植到假设检验中去就可以得到似然比准则，移植到判别分析中去就可以得到最大概率判别，移植到回归分析中去就可以得到极大似然估计.

以上例子都生动地说明，对于不少问题如果从与众不同的视角去观察、分析问题，善于洞察不同事物的相同或相近的本质，灵活自如地借鉴、移植，乃至另辟蹊径就会产生创造，就可以解决新的问题. 我们应该训练、鼓励研究生多方位地观察事物，思考问题.

3. 具体问题具体分析，正确选择解决问题“突破口”的能力是一种重要的创新能力

即使再困难问题也肯定有相对薄弱的部分，选择从这些地方攻关，就可以取得突破，快速推进解决问题的进程. 科学研究如同打仗一样，能否恰当地选择“突破口”，关系着研究的进展，甚至决定着研究的成败，至关重要. 因为要解决的问题千姿百态、千变万化，要善于分析实际问题的特点，才能从中寻找出薄弱环节予以突

破，所以如何选择“突破口”具有很强的创造性.

此外，也不是对每个问题“突破口”的选择都毫无规律可寻，只是在很大程度上依赖经验的积累，依赖当事人对类似、有部分相同或相似问题的处理经历，依赖当事人对成功解决问题全过程的了解，总之，“熟能生巧”.

由于全国研究生数学建模竞赛的题目都是没有被解决过的、比较困难的实际问题，所以在选择“突破口”方面，为研究生提供了极好的锻炼机会. 例如，2007 年全国研究生数学建模竞赛 D 题是“邮政运输网络中的邮路规划和邮车调度”，其中第一个问题是某县的邮车调度问题 (见第 10 章)，从数学上看这属于有时间窗的车辆路径问题，属于 NP-hard 问题. 在邮车问题中又增加了约束条件，给出了限制条件，研究生们感觉更难下手了. 其实换个角度看问题，增加约束条件并没有使问题更困难. 因为约束条件给得越多，则符合条件的“可行解”就越少. 这样以前找最优解是“大海捞针”，现在反而是“游泳池里找针”，降低了优化的难度. 确实，只要考虑邮车在运行时间和装载容量方面所受到的限制，很容易决定该县最少需要三辆邮车. 再根据每辆邮车在规定时间内的行驶里程和装载容量的限制，每辆邮车行车路线只能经过 4~6 个支局，且这些支局相互邻近才可以缩短里程. 由于每条回路上只有相互邻近的 4~6 个点，最短邮路几乎可以目测出来. 所以决定最少需要几辆邮车就是解决问题的“突破口”.

再如 1994 年美国大学生数学建模竞赛题，要求出螺旋线和处于任意位置的指定平面的全部交点. 当然首先要确定螺旋线和指定平面的交点数目，建立坐标系再建方程组后，发现是确定含四个未知数的、由四个非线性方程所组成的方程组解的个数问题[1]. 目前在数学上还无法精确决定一般方程组的解的个数，所以问题是很困难的. 如果取平行于螺旋线的轴、且垂直于指定平面的一个平面作为投影面，将螺旋线和指定平面向投影面做正投影，就将立体问题转化为平面问题. 由于在空间的交点和在投影面内的交点之间是一一对应的，求螺旋线和指定平面的全部交点个数的问题被等价简化为求投影面内一条直线与一条曲线的全部交点个数的问题，相对简单多了. 进一步将螺旋线的参数方程代入指定平面的方程，最终简化为确定只含有一个未知数、一个方程，即 $\cos\phi = a\phi + b$ 的解的个数问题. 因为正确选择投影为“突破口”，问题就取得了突破.

又如多元正态分布的均值和方差的极大似然估计的公式，本来求解是十分困难的高维优化问题. 例如，多元正态分布向量是 20 维，则均值是 20 维，方差阵为 20 阶对称方阵，问题就是 230 维的优化问题. 若向量再大则优化的维数增加更快，而且全是符号，似乎难度极高. 但仔细分析多元正态分布样本的概率密度函数[2]

$$(2\pi)^{\frac{-np}{2}}\,|\varSigma|^{\frac{-n}{2}}\,\mathrm{etr}\left(-\frac{1}{2}\varSigma^{-1}\sum_{j=1}^{n}(x_j-\mu)(x_j-\mu)'\right),$$

可以发现它是乘积形式，而且除一个因子是均值的函数外，其他因子都与均值无关. 因此选择先求概率密度函数关于均值的极大值点作为“突破口”，猜测并容易证明 $\mu = \bar{x}$，然后再求概率密度函数关于方差的极大值点，公式就容易推导了. 所以正确选择解决问题“突破口”的能力是重要的创造性.

前面已指出数学上的优化问题，在高维情况下是困难的，尤其是许多变量都不是具体数字的情况，即使求驻点也是解高维非线性方程组问题，经常没有解析解. 但是如果像上面例子，先猜测出可能的极值点作为“突破口”就会相当容易. 再如矩阵形式的线性模型的最小二乘估计，因为未知的参数是一个矩阵，作为优化问题是非常困难的，几乎无法求解. 但是如果猜测矩阵形式的线性模型的最小二乘估计与向量形式的线性模型的最小二乘估计形式上相同，证明它就是矩阵形式的线性模型的最小二乘估计却相当容易.

4. 善于把复杂的问题恰当地分解为一系列简单问题的串并联，制定合适的技术路线是科技人员必备的创造性

解决复杂问题绝不能一蹴而就，饭是必须一口一口地吃，战争是必须一仗一仗地打. 解决复杂的问题就好像攀登一座高山，要能够成功地登上顶峰，一定要选择正确的登山路线，既要在前进中保持逐段向上，又要能不断地前进直至登上峰顶. 同样解决一个复杂的问题，一定要制订一条合适的技术路线，要把技术上的整体跨度分解成若干个可达跨度来实现，把一个复杂的问题恰当地分解为一系列简单的问题的串并联，由于每一个子问题比较简单因而能够容易得到解决；当所有这些简单的子问题都解决了，则复杂问题就最终获得了解决. 因此，这种创造性是高级科技人员必须具备的.

要制订正确的技术路线迫切需要创造性和敏锐的洞察力. 应该不断用我们熟悉的事物去描述我们不熟悉的事物，应该不断用确定的内容去替换那些尚未确定的内容，我们应该不断以已经获得的结论为基础去扩大战果，要根据过去的经验去预测预期的成果和可能的结论，确定下一步的目标和步骤，直至问题的完全解决. 而要能够实现这个过程只能依赖实践的熏陶. 由于研究生数学建模竞赛的题目有相当的难度，要解决它们一定要制订恰当的技术路线，因此对培养研究生制订合适的技术路线的创造性很有帮助.

例如，2008 年全国研究生数学建模竞赛 A 题中的“唐家山堰塞湖溃坝时洪水可能淹没区域”是水利学科、尤其是堰塞湖问题研究领域的前沿课题，困难是显而易见的，研究生们几乎交了白卷，就是因为没有制订出合适的技术路线. 而如果有制订技术路线的能力，问题就不太困难了. 如果意识到只要了解堰塞湖下游地区十几个居民点 (堰塞湖附近是无人居住区，对这些地方的水位无需关心) 的最大水深、最大流量，就已经满足实际需要，则可以制订解决问题的技术路线如下：溃坝后洪

水的最大流量 → 水流路线 → 水流速度 → 到达各居民点处洪水的最大流量及其到达的时间 → 各居民点处的地形图 → 各居民点处的最大水深 → 各居民点处淹没区域. 逐步解决好每个环节，则唐家山堰塞湖溃坝时洪水可能淹没区域也就能够预先比较准确地估计出来.

再如“生产过程管理”问题[1]，是在产品结构确定，各种生产流水线的每一条所需要的人力、设备也完全确定的情况下，准备筹办一个新厂，求在人员、设备可以调度时的最小生产规模. 在无浪费的约束下，数学上是求 $\boldsymbol{Ax}(t)=\boldsymbol{b}$ 的最小正整数向量解 b, 但是其中调度方案即 t 时刻正在运转的各种流水线的条数 $x(t)$ 是未知的函数向量，因此不但求最小生产规模的条件不足，而且在线性代数中也从未讨论过函数向量解问题，所以难度是相当大的. 但如果先从简单情况入手，假定人员、设备不可以调度，即 $\boldsymbol{x}(t)$ 是未知的常数向量，则可以通过其他条件决定 $\boldsymbol{x}$, 从而找到这种条件下的最小生产规模；进而探讨最小生产规模、调度方案的性质；再根据当人员、设备可以调度时的最小生产规模与当人员、设备不可以调度时的最小生产规模之间的关系 (显然前者是后者乘上一个不超过 1 的分数)，就可以最终解决这个困难的问题，甚至原有工厂的转产问题也可以在此基础上得到解决.

显然制订合适的技术路线的创造性既非常重要，又必须经过比较多的实践才可以培养成功. 本书各章对这个重要的问题几乎都有论述.

5. 学科交叉是创造性的源泉之一，所以科研人员要能够将各学科知识融会贯通、灵活运用

实际问题和已经被抽象出来的理论问题之间最大的区别就在于它不会仅仅属于某一个学科，它有许多具体的、各种各样的属性，它们的变化受到各种规律的支配. 即使用某个学科最先进的成果来分析复杂的实际问题，也仅仅是从一些侧面、某些角度来进行考察，仍然可能无法对错综复杂的现象做出全面、合理、本质的解释. 因此要解决这类问题，学科交叉、知识融合就是必不可少的. 尤其在科学技术高度发达的今天，各门学科之间相互渗透、相互融合已经相当普遍；由于学科交叉，一门学科某个方面的突破带动其他学科进展的事例层出不穷；许多重大科技项目都因为多学科联合攻关而取得成功；不少重大科技成果都是多学科共同协作的结晶，有力地说明了学科交叉、知识融合是创造性的源泉之一.

然而受教育者，例如，研究生们尽管学习过多门学科的大量的科学知识，但在他们的脑海里，各门学科的知识之间并没有做到融会贯通，与实际问题中各学科的规律紧密耦合成一体是迥然不同的，这大大制约了研究生创造性的发挥. 如 2007 年全国研究生数学建模竞赛 D 题“邮政运输网络中的邮路规划和邮车调度”，借用物理上“效率”的概念即可轻易解决邮车效益问题，利用军事上“切忌孤军深入”思想就可以解决改变邮政支局隶属关系问题. 又如完全可以从能量守恒的角度去研

究的“唐家山堰塞湖的溃坝问题”，由于方法来自不同的学科，需要学科交叉，研究生们几乎都没有想到. 再如在“飞行管理问题”中要保证飞机的飞行安全，因为两架飞机同时在运动，仅根据两架飞机飞行的轨迹是否相交是无法判定飞机是否会相撞. 但是如果借用物理上相对运动原理，就可以方便地转化为判定沿直线运动物体与另一个静止物体是否会相撞的简单问题，由于也是学科交叉，所以很少有人想到这个简单的方法.

在很多实际问题中都要求线性方程组的非负解. 那么线性方程组存在非负解的充要条件是什么？一般线性代数教材是不介绍的，但泛函分析课程中有 Farkas 引理. 如果将定理中 $BP = d$ 看成线性方程组，B 看成系数矩阵，P 看成未知数，d 看成常数向量，由于 P 是非负的，发现这个定理实际上就是线性方程组存在非负解的充要条件. 因此做到各学科知识融会贯通往往就能够有新创造.

由于在自然界一切小的规律都是受普遍规律支配的，而且不同的事物之间也不是截然不同的，经常发生的情况反而是不同的事物之间存在某种共性，不同的实际问题经常有相同的数学模型. 因此牢记并熟练掌握重要的普遍规律，适当扩大知识面，在学习其他学科知识时经常联系本学科的有关问题，注意借鉴，可能会有意想不到的收获.

6. 对知识深刻理解、灵活运用就能够产生创造性

书本上的知识与实际问题之间总存在一定的距离. 一般情况下，书籍特别是学术著作只介绍基本原理、基本方法，很少介绍将知识如何应用于解决具体的实际问题. 即使介绍个别的具体应用事例，从使用角度看也很不全面. 因此如果人们对知识理解不深、认识不透，对知识的运用更加生疏，在接触不熟悉的问题时，就会想不到或者想不出办法把已经学习过的数学知识运用到实际问题中去.

在各门学科的知识形成过程中都必然包含着巨大的创造，但是，其中创造性并不能简单地通过知识的传授就可以为受教育者所接受. 显然学习并全部理解牛顿所创立的微积分和牛顿三大运动定律，甚至学习并理解牛顿的全部学术著作也绝不能够就成为牛顿那样伟大的科学家. 现实中经常发生的却是在知识形成过程中的创造性被淹没在“以其昏昏”，无法“使人昭昭”的平庸教学和被动的单纯接受中，以至于历史上重大的科技进步能够在培养受教育者的创造性中发挥积极作用的并不多见. 现在不少研究生教材都只有结果、只有结论，不介绍探究的过程；不少书籍是相互传抄，完全不见当年创造性、突破性的思考，要初学者不折不扣地领会其中的创新显然不太现实.

很多学术泰斗何以能够培养出“青出于蓝而胜于蓝”的学生？我们认为，原因不仅在于他们个人在学术上的成就，也与他们注重创造性的传承密不可分. “两弹一星”科技精英群体的师承效应就是有目共睹的事实. 我们都有登上峰顶之前与登

上顶峰时“会当凌绝顶，一览众山小”，两者虽然在高度上相差很小，但境界却相差很大的体会. 这点与创造性的培养之间我们认为有相似之处. 教师能否加上“画龙点睛”的一笔，导师指导“临门一脚”的工夫对人才的培养是十分关键的. 所以我们认为在硕士研究生阶段，甚至博士生阶段教师的作用、教学的作用不是可有可无，而是在某些意义之下更重要了，只是方式、内容发生了变化.

例如，赛题“汶川地震中唐家山堰塞湖的泄洪问题”中第一个子问题，是寻找唐家山堰塞湖的库容和水位高程关系的曲线，实际上是求一系列不规则物体的体积. 研究生们早已在高等数学课程中，学习过对截面面积进行积分求体积的方法. 但大多数研究生队由于学习时就理论脱离实际，当时很可能想不起来，加之可能不会使用三维地图，所以将此问题做成了曲线拟合问题.

再如 2009 年全国研究生数学建模竞赛 D 题“110 警车配置及巡逻方案”(见第 11 章)，要求某城市的警车在接警后三分钟内，赶到现场的比例不低于 90%. 因为该市有多辆警车，都在不断地巡逻运动，位置随时变化. 而且由于城市街道比较复杂，一辆警车处于任意位置时，在三分钟内可以到达道路的长度本来就比较难求. 再加上不同警车在三分钟内可达道路之间有多重重叠，并且在不同时刻可达道路的重叠情况又不相同，所以接警后三分钟内警车赶到现场的概率似乎很难计算. 然而利用概率论本科教材上都会介绍的蒙特卡罗方法，很容易计算这个概率. 研究生们为什么没有想到这个方法，关键在于对知识理解不深，不会灵活运用.

又如前面提到过的线性方程组存在非负解的充要条件. 表面上，线性代数书上没有介绍过线性方程组存在非负解的充要条件. 其实中学生从立体几何中就知道第一卦限内的任意一点的坐标总是非负的. 表明这点所对应的向量总是分解为坐标向量的非负线性组合，看成线性方程组，即线性方程组这种情况下一定存在非负解. 可惜的是没有学生把这个问题上升到这个高度，以至于把已经解决了的问题始终看成难题.

还可以举一个例子说明对知识的深刻理解就可以产生创造性. 如统计上的极大似然估计、最小二乘估计在无约束的条件下可以求解，但是如果要求在多重线性约束条件下的极大似然估计、最小二乘估计就无法用原先的方法求解. 但是统计学家先从几何角度研究最小二乘估计得出无约束最小二乘估计在数学本质上就是投影的结论，则约束条件下的最小二乘估计仍然应该是投影，只是缩小了投影面的维数. 而采用投影思路就可以比较简单地推导出线性约束条件下的最小二乘估计的公式.

创造性经常存在于从感性知识到理性知识的飞跃. 从数学建模的角度看，推导和证明是其中的关键. 可是往往多数研究生在学习过程中只关心结论，忽略了推导和证明，对证明中的创新理解不透，更谈不上掌握推导和证明的一般方法，使很多好的思路、结果无法上升为理论. 例如，证明某个解是最优解，掌握证明规律后一

般并不困难. 如果未能给出证明, 则这个结果只能作为经验处理, 不能视为一般规律. 因而显著地降低了论文的创造性和理论价值, 即使把结果应用于所解决的实际问题, 也有不良影响, 非常可惜.

总之, 知识中蕴藏着大量的创造性, 学懂知识, 并不代表理解其中的创造性, 必须经过认识上的升华.

7. 洞察事物规律和抓准问题的主要矛盾也属于创造性的范畴

众所周知, 错综复杂的事物内部有许多矛盾, 但在一定时期一定有一种矛盾是主要的, 抓住这个主要矛盾, 问题就迎刃而解了. 要能够最终彻底解决困难的问题, 必须对问题有本质的了解. 但问题的本质又往往被许多表面现象所掩盖, 甚至为一些假象所包裹, 要抓住问题的本质必须撕开假象、透过表面现象去发现问题的本质. 不同水平、不同层次的当事人也往往在这种情况下暴露出显著的差别. 抓准主要矛盾、洞察其他人没有发现的规律就是创造性的体现.

在抓准问题的主要矛盾和发现事物规律方面, 行之有效的办法, 就是应该通过压缩问题的规模、降低问题的难度、固定一些原来可变的条件、暂不考虑一些影响结果的因素、构造出相对简单的情况, 这样就容易发现问题的规律. 通过简化、固定条件, 增加复杂问题和简单问题之间的可比性, 借用对简单问题已经知道的主要矛盾、客观规律, 去猜测复杂问题的主要矛盾、客观规律.

例如, "工件排序问题"[1], 前面已介绍只需要保证相邻两个工件的正确排序, 就可以实现全体工件的正确排序. 它把问题从比较 $n!$ 个结果的极其复杂的问题转变成只有两个结果的简单比较问题. 为了寻找规律, 可以先考虑任意相邻两个工件的排序规律, 再以此为基础猜测任意多个工件的排序规律. 为了完全可比, 让排在这相邻两个工件前面、后面加工工件的顺序保持完全相同, 并且只选择在 B 机床加工完这两个工件的时刻来考虑问题. 这时 A 机床上加工情况完全不受这两个工件加工顺序变动的影响, 情况完全相同; B 机床已经加工完的工件集合和还没有加工的工件集合, 也完全不受这两个工件加工顺序变动的影响, 完全相同; 唯一不同的, 就是 B 机床加工当前还没有加工的工件集合的开始时刻, 显然早开工一定不会晚结束, 早开工的方案就是好的方案. 这样问题的关键找到了, 最后的规律也就容易发现了.

再如求 $\sup\limits_{C_{n\times k}}\inf\limits_{\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=0}\dfrac{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}}$,[2] 这是一个困难的问题, 首先要猜测结果可能与什么有关, 可能是什么内容, 才能有努力的方向. 如果按前面介绍的一般原则, 将二次极值简化为一次极值, 并去除约束条件, 再采用简单分母, 即 $\sup\dfrac{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}}=\sup\limits_{\|\boldsymbol{x}\|=1}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$, 规律就容易发现了. 由于求极值的函数是原像 $\boldsymbol{x}$ 与像 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的内积, $\boldsymbol{x}$