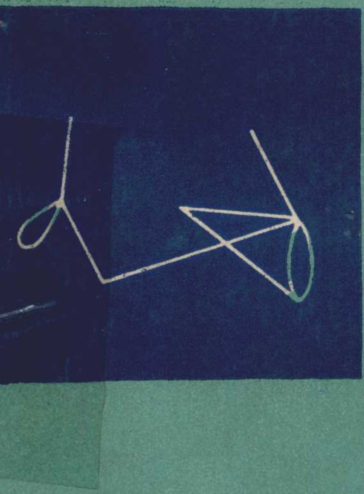
管理数学

武汉工学院顾士俊编



湖北省机械工程学会
技术经济管理现代化研究会

前　　言

管理数学是研究现代管理的基础，它以数量方法来解决生产与经营管理中的理论和实际问题，从而取得较好的经济效果。目前，国内外管理科学中所接触到的数学方法很多，范围极为广泛。本书仅包括管理中常用的一些数学方法，如概率论基础，线性规划的应用，工件加工顺序的安排，对策论基础，图论基本知识，网络技术的应用，动态规划与马尔柯夫过程的基本概念等。

本书各章列举了大量例题并附有一定数量的习题，在叙述和阐明各种数量方法在管理中的具体应用过程时，均力求有系统、做到层次分明、通俗易懂、深入浅出，使具有一定数学基础的各类管理人员和技术人员能顺利自学，也可作为干部学习班和管理工程专业类教材以及供有关教师参考。由于编者水平有限，书中缺点错误在所难免，敬请广大读者批评指正。

本书在编写过程中承湖北省机械局企业管理处和武汉重型机床厂宋力行同志提出补充和修改意见，并由武汉工学院李必强同志主审，在此一并表示感谢。

编者　　1982．3．

目 录

第八章　图论的基本知识简介

第九章　网络分析

第十章　计划协调技术和关键路径法

第十一章　工件加工排序问题

第十二章　对策论简介

第十三章　动态规划与马尔柯夫过程简介

第十四章　习　　题

第一章 概 述

§1 概 况

现代企业管理中定量分析科学方法，它包括的内容较多，如线性代数、向量、概率论、数理统计、优选法、正交试验、运筹学等等。然而运筹学是内容最丰富，而且在现代管理中有极其广阔的用途。因此，本书除介绍一些其他在企业管理中应用的数学知识外，着重介绍运筹学的几个分支与应用。

一、运筹学术语起源

运筹学这个术语起源于英国，它跟雷达一样是在第二次世界大战前提出的。因为英国是个岛国，英伦三岛上任何一块陆地距海岸都不超过70公里。並且英、德是邻国，德国若用轰炸机只需17分钟就能飞到英国本土。英国政府当时考虑如何能及早警戒敌机到来。也就是能使英国的防空战斗机有时间起飞，爬高并能在敌机深入中心区之前予以迎击。由于当时条件，在岛屿外设立警戒站在政治上不方便，在军事上也不实际。故当时还没有防御敌机空袭的警戒办法，没有能足以在海岸以外就能警戒和跟踪来袭轰炸机的办法。

为解决这个问题，英国政府于1934年12月成立了防空科学调查委员会，以研究当前的科学技术的进展到底有多少能用来加强目前的各种防空办法。直至1935年初，这个委员会在研究死光的过程中，提供一种用无线电对飞机定位的可能。于是全面开展了今天称之为雷达的这项研究工作。直至1938年，雷达系统在探测飞机的技术上是可行的。在1938年7月，举行了第二次重大的防空演习，在沿岸又建立了四个雷达站，当时希望有一个在探测范围和效能上都得到大大改进的飞机定位与控制系统。但实际并非如此，演习却暴露了一个严重的新问题。从这些增设的雷达站接收到的信息往往相互矛盾必须对这些相互矛盾的信息进行协调和相关。因此，提出了一个开展对雷达系统运用方面的研究。当时提出了一个叫童帽山的模拟计划，实际对雷达的使用进行模拟试验。当时的科学家称之为*Operation Research*。我们将它译为运筹学。

二、我国古代的运筹学思想

我国古代早就有朴素的运筹学思想。如公元前六世纪（春秋）时，我国著名军事学家孙武著的“孙子兵法”13篇就是一部有名的运筹学书。又如战国时期的“孙膑斗马术”这个故事。这是描述我国历史上齐王与田忌赛马的故事。故事的大意是：有一天齐王要田忌和他赛马，规定各人从自己的上马、中马、下马中各选一匹马来比赛，并且说好输一匹就得付出千金，每胜一匹可获千金。齐王的上、中、下三匹马比田忌马要强。结果田忌均以零比3输掉。当时田忌的谋士孙膑一直在场观赛，就给田忌出了个主意，叫田忌用下马对齐王的上马、中马对齐王的下马、，上马对齐王的中马，比赛的结果田忌以2比1胜了齐王，只有下马对上马一局输掉。这个故事充分说明了运筹学中的对策思想。

三、运筹学近况

运筹学是应用数学的一个分支，对这门新科学可作如下叙述：

（1）运筹学是人们在各个领域（工业、农业、商业、运输以及军事技术、作战艺术）内用来寻找最优决策的一门应用学科。

（2）一般说，运筹学能为选取某种决策提供数量依据，能帮助人们选择决策。

（3）当评定某种效果（经济效果、战斗效果等）时，在运筹学里使用了各种不同的数量指标，并按这些指标来选择最优决策。这个最优，可能是经济效果最优，系统平衡最优，人力安排最优，设备安排最优，资源利用最优……，总之，将可利用的人力、物力、资金等资源如何合理利用，使其目标达到最优。

运筹学是现代管理中很重要的一门学科，它是系统工程学重要的理论基础，随着计算机科学的迅速发展，它的应用领域不断扩大，应用的深度也更为突出。

近年来，许多国家在运筹学方面出版和发表了大量书籍、论文，召开了学术讨论会，并且建立了有关的专门组织机构。

1952年美国成立了运筹学会，**1953**年美国成立了管理学会。现在美国大学里有运筹系，政府机构、企业部门有运筹组。

1961年德国成立了工业设备企业公司，这个公司是专门搞运筹学和系统工程的。国外其他一些国家也有相应的运筹学组织。国际上有运筹学联合学会。

由此可见，国外对运筹学是十分重视的，我国**1956**年由钱学森教授提出组成了运筹小组，並于**1958**年在数学研究所里设立了运筹组，近来在一些大学里设立了运筹学教研室等机构。

§2 运筹学包括的主要分支

一、排队论：

排队论是研究拥挤排队现象的一门科学。排队论最初是由电话事业的需要，而后由于物理学、公用服务机构（商店、售票处、飞机场等）的合理组织以及机床的维修和使用等方面的需要而产生的。在我们日常生活中，排队现象几乎处处都有，随时都可以碰到。如上下班坐汽车，到商店里去买东西，去医院看病都免不了排队，这是有形的排队。还有无形的排队，如几个人同时通过电话总机向外打电话，这就需要排队等候，或者同时向一个地方打电话，这样就形成了一个无形的排队。另外，排队现象不一定都是人，物也有排队现象，比如生产线上的原料（半成品）等待加工，几台机器出了故障等待工人去修理，战斗机返航降落因跑道不空，需要在空中盘旋等待降落，水库的水如何调节得好，既使水库的水位保持在理想安全水平，起到防洪作用，又能保证发电、运输和灌溉等等，这些都是排队论所要研究的。

排队论有一些基本术语，上面列举的人、待加工的原材料、出故障等待维修的机器、返航的飞机、水库里的水等等都称之为顾客。另外，汽车、商店、医院、机场跑道等等都称之为服务机构。

从顾客欲望出发，希望多设置些服务机构，这样可以减少排队时间，服务机构愈多顾客就愈方便。另一方面，服务机构愈多，则人力、物力和开支也愈大，显然也是不经济的。究

竟服务机构设置多少，又如何合理设置，既不要造成不必要的浪费，又能减少排队现象，缩短排队时间呢？这个问题，就是排队论研究的主要课题。排队论主要研究是顾客的输入规律、排队的时间（又称队长）和服务机构数量这三者的关系。也就是如何使这三者关系最佳的协调起来，使顾客的等待与服务机构的数量（或服务速率）之间达到合理平衡。

排队论的理论可以用来解决电话局、水库、港口码头、飞机跑道等的设计问题。排队论的理论在军事上也大有用途，它可以解决如下一些问题：

（1）对保卫各种不同设施的防空系统效率进行估计，以便对防空射击武器和空中侦察的可靠程度提出相应的要求；

（2）研究反坦克武器的射击效率及各种类型的控制指挥系统的通过能力与质量；

（3）以最优的方式组织对武器装备的维修及安排后勤系统的军事供应；

（4）预测疏散点、医院和消毒区等机构的工作紧张程度。

从上面一些例子可以看出，可以用排队论方法来解决的实际问题的范围是相当广泛的。具体理论与方法请看有关专著。

二、搜索论

搜索论起初用来搜索一样东西，是从军事上搜索潜艇开始的。例如：一九四二年所谓北大西洋潜艇战略，就是搜索论成功的一个例子。一九四〇年冬天，珍珠港事件爆发后，美国就正式对德国宣战。英美是盟国，当时英国很困难，并距德国很近，是个桥头堡，为了支援英国，美国需要把大量的军用物资、民用物资运输到英国去。当时美国的空运能力较差，只能靠海上运输。美国的所有船只几乎都参加这一运输了。另一方面，德国用潜水艇封锁海上运输，並在四一年四二年的两年中，德国的潜水艇几乎把美国的运输船队搞掉了一半。鉴于当时这种情况，美国很着急，再继续这样下去，美国快没有船参加运输了。怎样对付这个问题呢？那时，美国政府召集了美国有关专家来想办法，出主意。有人建议说：数学可以帮这个忙。

虽然潜艇从哪里出来，何时出来，谁也料不到，都是出其不意的出来了，对商船进行袭击。尽管潜艇出其不意出没是随机的，但这里就有个数学问题，如何从潜艇过去出没的情况里，找出潜艇出没的规律，这个规律用数学方法可以找到，以后就发展成搜索论。根据搜索理论美国一九四二年的北大西洋潜艇战略取胜了。

搜索论现在用来合理地搜索人力、物力、资源。例如探矿就用到搜索论。我国究竟哪些地方有石油？当然可以多化些人力、物力、财力。这不是一种好办法。可以根据搜索理论合理地应用最少的人力、最少的物力、在最短的时间里去发现石油资源。

三、存贮论

存贮论是研究物资管理，采购设备资源的一套数学理论。从大的方面讲，我们国家根据目前情况究竟需要多少吨粮食库存才能应付灾荒和偶然事件的发生。又如，我们国家究竟需要多少吨铜的原材料的存贮，才能应付战争突然爆发所需要的铜原材料。显然粮食和原材料铜没有存贮是不行的，但存贮太多也是不行的。没有库存不能应付事件发生后的需要。库存太多，将积压原材料，积压粮食，因而积压了资金。究竟库存多少最好呢？这就是存贮论所要研究的内容。

从小的方面讲，一个工厂，一个企业库存完全没有当然不行，但库存太多，积压了原材料，积压了资金也不行。因此，要根据生产活动（销售活动）的连续性，决定最佳存贮量。最佳存贮量对生产活动是十分重要的。既不要因存贮量太少，造成生产停顿（停工待料）。又不要因存贮量过大，以致造成不必要的积压浪费。因此，存贮量究竟多少最佳，必须根据实际情况进行科学计算。

存贮论主要研究内容简单地可以这样表示：

供应（采购）$\xrightarrow[\text{输入}]{}$ 仓库（储存）$\xrightarrow{\text{输出}}$ 需要（销售），也就是研究供应一储存一需要这三者的最佳协调关系。

四、线性规划

线性规划是数学规划里很重要的一个分支。数学规划包括线性规划、非线性规划、整数规划和动态规划。其中线性规划用途相当广泛，而且各种算法也较成熟。它总的研究内容可归纳为如下二个方面：

（1）给出一定量的人力、物力、资金资源，如何合理利用这些资源完成最大任务；

（2）给定一项任务，如何统筹安排，利用最少的资源来完成它。具体可以解决如下一些最优化问题：

1）物资运输最优调配问题；

2）原材料的合理下料问题；

3）加工另件的顺序安排问题；

4）机床负荷的安排问题；

5）场（厂）址设置问题；

6）资源的合理利用问题；

7）生产任务的分配问题；

8）工作安排问题；

9）作物布局问题；

10）国民计划综合平衡问题；

11）…………

五、对策论（博奕论）

对策论是描述和研究斗争态势的抽象模型，并能给斗争各方提供对策方法的一门数学理论。

六、组合网络

七、控制论

八、马尔柯夫过程

九、…………

第二章 数学预备知识简介

这一章主要介绍在以后章节中常用到的一些数学概念，掌握这些基本概念，对了解以后章节的原理和求解是有益处的。

§1 矩阵的概念

一、矩阵的定义：

矩阵可定义为：有m n个数a_{ij} （$i=1, 2, \cdots\cdots, m$；$j=1, 2, \cdots\cdots n$）排成m行n列的表。

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ a_{m1} & a_{m2}\cdots a_{mn} \end{bmatrix}$$

叫做$m\times n$矩阵，或者简单地叫矩阵。并有时简记为（a_{ij}）。a_{ij}中的第一个下标表示行数，第二个下标表示列数，则a_{ij}叫做A中第 i 行第 j 列的数或元。矩阵相等的意思是他们相对应元素相等。

当只有一行或一列的矩阵，我们称做向量。

由$m\times n$矩阵中某行的n个元组成的n维向量叫做A的行向量，由A中某列的m个元组成的m维向量叫做A的列向量。因此，矩阵A有m个行向量，n个列向量。

一般行向量横写，列向量竖写。

A的第 i 个行向量写成：

$$(a_{i1} \quad a_{i2}\cdots\cdots a_{in})$$

A的第 j 个列向量写成：

$$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$$

二、平方矩阵

矩阵A中的行数m，列数n不必相等。如果矩阵A中的行数m与列数n相等即$m=n$时，我们称$n\times n$矩阵，亦称n阶矩阵。

三、对角矩阵

主对角线上的元素为a_{ii}，（$i=1, 2, \cdots\cdots n$）。其他位置上的元素全为0的n阶矩阵，并写为：

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & & & 0 \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

四、单位矩阵（或恒等矩阵）

主对角线上的元素为单位1，他其位置的元素为0的平方矩阵叫单位（或者恒等）矩阵。

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

单位矩阵是由对所有的某阶方阵A由关系式$EA=AE=A$所给定的。这就是说E在n阶矩阵乘法运算中的作用与数1在数的乘法中的作用类似。因此我们称E为n阶单位矩阵，或简称单位矩阵。

五、矩阵的转置

一个$m\times n$矩阵A的行和列互换，就导致一个$n\times m$的矩阵A^T，称A的转置。

如果A是给出为：

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

那么，A^T给出为：

$$A^T=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

显然有

$$(A^T)^T=A$$

§2 矩阵的运算法则

一、矩阵的和

两个$m\times n$矩阵A，B的和是一矩阵，它的每一元是A，B两矩阵相应元的和。

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ a_{m1} & a_{m2}\cdots a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12}\cdots b_{1n} \\ b_{21} & b_{22}\cdots b_{2n} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ b_{m1} & b_{m2}\cdots b_{mn} \end{pmatrix}$$

即

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12}\cdots a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22}\cdots a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2}\cdots a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

二、矩阵的差

两个$m\times n$矩阵A，B的差是一矩阵，它的每一元是A，B两矩阵相应元的差。

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ a_{m1} & a_{m2}\cdots a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12}\cdots b_{1n} \\ b_{21} & b_{22}\cdots b_{2n} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ b_{m1} & b_{m2}\cdots b_{mn} \end{pmatrix}$$

即

$$A-B=\begin{pmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12}\cdots a_{1n}-b_{1n} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22}\cdots a_{2n}-b_{2n} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}-b_{m1} & a_{m2}-b_{m2}\cdots a_{mn}-b_{mn} \end{pmatrix}$$

矩阵的和差仅对A，B的行列数m，n相等时才能定义。

三、矩阵与纯量的积

一矩阵A同纯量K的积是一矩阵，其中每一元乘以纯量K，即

$$KA=AK=\begin{pmatrix} Ka_{11} & Ka_{12}\cdots Ka_{1n} \\ Ka_{21} & Ka_{22}\cdots Ka_{2n} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ Ka_{m1} & Ka_{m2}\cdots Ka_{mn} \end{pmatrix}$$

四、矩阵与矩阵的积

一个矩阵乘另一个矩阵的积，在二矩阵中的第一个矩阵的列数等于第二个矩阵的行数时是可能的，在相反的情况下，乘积则不能定义。

A，B两矩阵的积AB是一矩阵，它是这样定义的。它的第i行，第j列上的元素是A的第i行上各元素分别与B的第j列上各对应元素的乘积的和。

如：

$$A=\begin{pmatrix} a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix},\quad B=(b_1\quad b_2\cdots b_n)$$

即

$$AB=\begin{pmatrix} a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}\cdot(b_1\quad b_2\cdots b_n)=\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2\cdots a_1b_n\\ a_2b_1 & a_2b_2\cdots a_2b_n\\ \vdots & \vdots\\ a_nb_1 & a_nb_2\cdots a_nb_n\end{pmatrix}$$

$$BA=(b_1\ b_2\cdots b_n)\cdot\begin{pmatrix} a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}=(b_1a_1+b_2a_2+\cdots+b_na_n)$$

如

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n}\\ \vdots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2}\cdots a_{mn}\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}$$

即

$$AB=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n}\\ \vdots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2}\cdots a_{mn}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}b_1+\cdots+a_{1n}b_n\\ a_{21}b_1+\cdots+a_{2n}b_n\\ \vdots\\ a_{m1}b_1+\cdots+a_{mn}b_n\end{pmatrix}$$

如

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n}\\ \vdots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2}\cdots a_{mn}\end{pmatrix},\quad B=(b_1\quad b_2\cdots b_m)$$

即

$$BA=(b_1\quad b_2\cdots b_m)\cdot\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n}\\ \vdots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2}\cdots a_{mn}\end{pmatrix}$$

$$=(b_1a_{11}+\cdots+b_ma_{m1}\cdots b_1a_{1n}+\cdots+b_ma_{mn})$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1\\ 0 & -2\\ 1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -2\\ 2 & 8\end{pmatrix}$$

一般两个矩阵A，B的乘积用式子表示是：

定义两个矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1L} \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2L} \\ \vdots & \vdots \quad\ \vdots \\ a_{m1} & a_{m2}\cdots a_{mL} \end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12}\cdots b_{1n} \\ b_{21} & b_{22}\cdots b_{2n} \\ \vdots & \vdots \quad\ \vdots \\ b_{L1} & b_{L2}\cdots b_{Ln} \end{pmatrix}$$

的乘积

$$AB=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12}\cdots c_{1n} \\ c_{21} & c_{22}\cdots c_{2n} \\ \vdots & \vdots \quad\ \vdots \\ c_{m1} & c_{m2}\cdots c_{mn} \end{pmatrix}$$

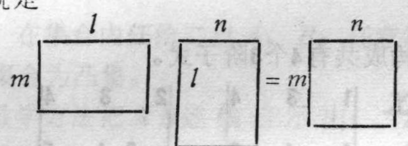
其中：$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+\cdots+a_{iL}b_{Lj}=\sum\limits_{t=1}^{L} a_{it}b_{tj}$

$$\begin{array}{c} \\ i \end{array}\begin{pmatrix} \\ a_{i1}\cdots a_{iL} \\ \\ \end{pmatrix}\begin{array}{c} j \\ \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{Lj} \end{pmatrix} \end{array}=\begin{array}{c} j \\ \begin{pmatrix} \vdots \\ \cdots c_{ij}\cdots \\ \vdots \end{pmatrix} \end{array} i$$

两个矩阵的乘积的行数，列数间的关系是

$$(m,\ l)\cdot(l,\ n)=(m,\ n)$$

用图式表示就是



五、矩阵的初等变换

矩阵的初等变换非常重要，应用也十分广泛，应用它可以用来简化矩阵的计算。一般对一个矩阵除可以进行行的初等变换外，同时还可以进行列的初等变换，我们把行初等变换及列初等变换统称为矩阵的初等变换。

矩阵的初等变换是指：

（1）互换矩阵A的两行或两列；

（2）用一个不为零的数乘A的一行或一列；

（3）用一个数乘一行加到另一行上或乘一列加到另一列上。

矩阵行（列）初等变换的一个重要性质：

假如矩阵A经过若干个行、列初等变换，变换为矩阵B，那么矩阵A，B的秩相等，也就是说A与B等价（同解的意思）用$A\cong B$表示。

六、矩阵的秩

矩阵秩的定义：矩阵A中不为零的子式的最高阶数如果是r，那么我们就说A的秩r。n阶矩阵如果它的秩是n，叫做满秩矩阵，否则就叫做降秩矩阵。

矩阵A中的子式，是指在$m\times n$矩阵中取某k个行，k个列（$k\leqslant m,\ n$），由这些行、列相交处的元构成的k阶行列式，叫做A的k阶子式。特别n阶矩阵只有一个n阶子式，这子式我们

又常常叫做矩阵的行列式。矩阵A的行列式用$|A|$表示。

例如矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & -2 & 4 & 5\\ 1 & 10 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

在矩阵A中，1阶子式是其中一个元构成的，因此共有12个1阶子式。

矩阵A中，2阶子式是由其中四个元构成的，共有18个2阶子式

$$\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & -2\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1 & 3\\ 1 & 4\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1 & 4\\ 1 & 5\end{vmatrix}\begin{vmatrix}2 & 3\\ -2 & 4\end{vmatrix}\begin{vmatrix}2 & 4\\ -2 & 5\end{vmatrix}\begin{vmatrix}3 & 4\\ 4 & 5\end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 10\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1 & 3\\ 1 & 1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1 & 4\\ 1 & 2\end{vmatrix}\begin{vmatrix}2 & 3\\ 10 & 1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}2 & 4\\ 10 & 2\end{vmatrix}\begin{vmatrix}3 & 4\\ 1 & 2\end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}1 & -2\\ 1 & 10\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1 & 4\\ 1 & 1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1 & 5\\ 1 & 2\end{vmatrix}\begin{vmatrix}-2 & 4\\ 10 & 1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}-2 & 5\\ 10 & 2\end{vmatrix}\begin{vmatrix}4 & 5\\ 1 & 2\end{vmatrix}$$

我们任取一个2阶子式D_2

$$D_2=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & -2\end{vmatrix}=-2-2=-4\neq 0$$

矩阵A中，3阶子式是由其中九个元构成共有4个3阶子式。

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & -2 & 4\\ 1 & 10 & 1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1 & 2 & 4\\ 1 & -2 & 5\\ 1 & 10 & 2\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1 & 3 & 4\\ 1 & 4 & 5\\ 1 & 1 & 2\end{vmatrix}\begin{vmatrix}2 & 3 & 4\\ -2 & 4 & 5\\ 10 & 1 & 2\end{vmatrix}$$

但包含2阶子式D_2的只有二个。

$$D_3=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & -2 & 4\\ 1 & 10 & 1\end{vmatrix}=0,\quad D_3=\begin{vmatrix}1 & 2 & 4\\ 1 & -2 & 5\\ 1 & 10 & 2\end{vmatrix}=0$$

所以矩阵A的秩是2。

七、线性方程组的矩阵表示形式

设：含有n个未知量m个方程的线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=c_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=c_2\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=c_m\end{cases}$$

它的矩阵形式为

$$A\cdot X=C$$

式中：

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2}\cdots a_{mn} \end{bmatrix}, \quad X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad C=\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix}$$

A叫做线性方程组的系数矩阵。

$$B=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} & c_1 \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n} & c_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2}\cdots a_{mn} & c_m \end{bmatrix}$$

B叫做线性方程组的增广矩阵。

根据矩阵的乘法原则，因为：

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2}\cdots a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n \\ \cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n \end{bmatrix}$$

§3　凸　集

凸集的定义：在集合内任给二点A、B，任意将AB连成线，线上任一点是所考虑集合里的点。则称这集合为凸集。

我们可以用数学方法把AB连线表示出来。

假设二维空间的点集为R，若$\forall A, B$两点$\in R$，则A，B连线上的点P可以这样表示：

$P=\alpha A+(1-\alpha)B \in R \quad (0\leqslant\alpha\leqslant1)$

我们可以通过图3—1证明这条原理。

我们在直角坐标平面上任意给二点A，B并连接AB，在AB连线上任取一点P。我们

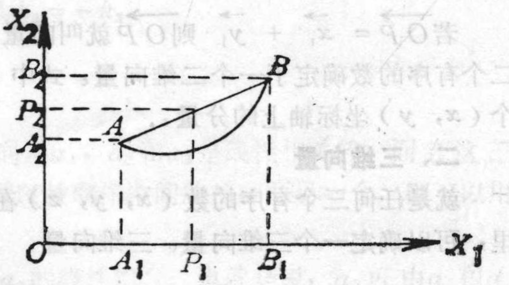


图3-1

再通过A、B、P三点分别向x坐标和y坐标作垂线，如图3—1所示。

这样我们可以根据三线的平行性质，推算出如下的比例关系。

$A_1P_1 : P_1B_1 = AP : PB$　其中：$A_1P_1 = x-x_1$，$P_1B_1 = x_2-x$

所以：$A_1P_1 : P_1B_1 = (x-x_1) : (x_2-x) = \lambda$　　（λ是从$0\sim\infty$）

$$\frac{x-x_1}{x_2-x}=\lambda \qquad \text{得到：}\ x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$$

再经过变化得：$x=\alpha x_1+(1-\alpha)x_2 \quad (0\leqslant\alpha\leqslant1)$

上式中：x_1，x_2就是图3—1中的A，B两点，x就是AB连线上的点。

在凸集R中满足下列条件的点称为极点，凸集中不存在两个不同点x_1，x_2，使x成为$\overline{x_1x_2}$线段的内点，即不存在$0\leqslant \leqslant 1$，使$x=cx_1+(1-\alpha)x_2$成立。如图3—2是一个凸集。图上$ABCDE$通常称为顶点（或极点）。

这些点有这样的性质，它们上的任何一个点都不能成为凸集中任何一个线段的内点，凸集中这些特殊点称之为极点。

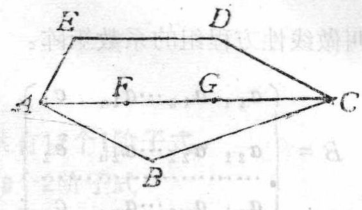


图3.2

另外，我们根据向量的有关性质，引述一个凸集R之点x为极点的充分必要条件是：x的非零坐标x_{i1}，$x_{i2}\cdots$，x_{ik}（$k\leqslant n$）所对应的列向量A_{i1}，A_{i2}，…，A_{ik}是线性独立的（线性无关）。一组线性独立的列向量的极点（如果有的话），被约束条件唯一地决定。而列向量共有n个，其中线性独立的列向量是有限的。（换句话说，凸集R中极点个数是有限的。一个极点对应着一组线性独立的列向量）。如果R不是空集的话，则R至少有一个极点，如果目标函数有最小值的话，一定可以由一个极点达到。

§4　n维向量

一、二维向量

我们先举一个例子。

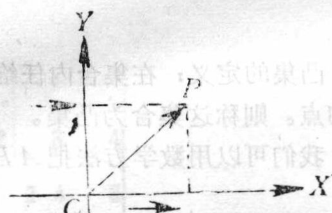


图3.3

若$\overrightarrow{OP}=\vec{x_i}+\vec{y_j}$则$OP$就叫向量。也就是每二个有序的数确定了一个二维向量。式中x，y是在二个（x，y）坐标轴上的分量。

二、三维向量

就是任何三个有序的数（x，y，z）在三维空间里，可以确定一个三维向量。三维向量可以表示为：$\overrightarrow{OP}=\vec{x_i}+\vec{y_j}+\vec{z_k}$，式中$x,y$，$z$是$\overrightarrow{OP}$向量在三个（$x$，$y$，$z$）坐标轴上的三个分量。

三、n维向量

n维向量的定义：有n个数α_1，α_2，……，α_n，按一定顺序排成（α_1，α_2……，α_n）叫做n维向量，α_i（$i=1$，2，……，n）叫做向量在坐标轴上的第i个分量，全体n维向量就叫n维向量空间。

§5　向量的线性相关，线性无关

一、线性相关

若在n维空间里有一组向量α_1，α_2……，α_n，有n个不全零的数k_n，使得$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+$

$\cdots\cdots+k_n\alpha_n=0\cdots\cdots(1)$。则向量$\alpha_1$，$\alpha_2\cdots\cdots$，$\alpha_n$称为线性相关的向量组。

二、线性无关

如果只有当 $k_1=k_2=\cdots\cdots=k_n=0$，使得$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots\cdots+k_n\alpha_n=0$才成立，则向量组$\alpha_1$，$\alpha_2$，……，$\alpha_n$称为线性无关的向量组。

例如向量组：

$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$是线性无关的。因为等式（1）可以写成：

$$k_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=0\text{或}\begin{cases}k_1\times1+k_2\times0=0\\k_1\times0+k_2\times1=0\end{cases}$$

从而得：$k_1=k_2=0$

三、n维空间的基向量

n维空间内的几个线性无关向量组称为该空间的基。n维空间内的任意$n+1$个向量总是线性相关的。

我们假设有三个二维向量α_1，α_2和α_3即：

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\ \alpha_2=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\ \alpha_3=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\text{写成等式（1）}$$

$$k_1\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=0$$

$$\text{或}\begin{cases}k_1\times0+k_2\times1+k_3\times2=0\\k_1\times1+k_2\times0+k_3\times1=0\end{cases}\quad\text{或}\begin{cases}k_2=-2k_3\\k_1=-k_3\end{cases}$$

令$k_3=k$，则$\begin{cases}k_2=-2k\\k_1=-k\end{cases}$

如果$k\neq0$，则$k_i\neq0$（$i=1，2，3$），所以这三个向量α_1，α_2和α_3是线性相关的。而在这三个向量中，任意两个向量都是线性无关的向量，可以被取作空间的基，而另一个，则可以用这两个向量表示。

例如：取α_1，α_2作为基，则α_3可以表为α_1和α_2的线性组合。也就是说，α_3可由α_1和α_2来表示。

$$\overset{\alpha_3}{\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}}=-\frac{k_1}{k_3}\overset{\alpha_1}{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}}-\frac{k_2}{k_3}\overset{\alpha_2}{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}}$$

或写成：

$$\alpha_3=-\frac{k_1}{k_3}\alpha_1-\frac{k_2}{k_3}\alpha_2$$

如果在平面上有k个向量（$k>2$），则可取其中不在同一方向上的两个向量作为基，而其余的$k-2$个向量，则可用这两个基向量来表示。根据这个结论可以推广：n维空间内的任何一个向量都可以用基向量唯一地表示出来。

但是，并不是任何n个向量都可以作为n维空间的基，而只有当n个向量的分量（座标）