



工业和信息化部普通高等教育“十二五”规划教材立项项目



21 世纪高等院校电气工程与自动化规划教材

Modern Control Theory

现代控制理论

汪纪锋 主编

党晓圆 张毅 副主编



人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS



工业和信息化普通高等教育“十二五”规划教材立项



21 世纪高等院校电气工程与自动化规划教材

21st century institutions of higher learning materials of Electrical Engineering and Automation Planning

Modern Control Theory

现代控制理论

汪纪锋 主编

党晓圆 张毅 副主编

人民邮电出版社

北京

图书在版编目 (C I P) 数据

现代控制理论 / 汪纪锋主编. — 北京 : 人民邮电出版社, 2013. 11
21世纪高等院校电气工程与自动化规划教材
ISBN 978-7-115-33184-7

I. ①现… II. ①汪… III. ①现代控制理论—高等学校—教材 IV. ①0231

中国版本图书馆CIP数据核字 (2013) 第278735号

内 容 提 要

本书主要讨论线性系统理论的基础内容, 研究线性系统状态的运动规律以及改变这种运动规律的可能性与基本方法。全书共分 5 章, 分别介绍了控制系统的状态空间模型及其建立问题、线性系统的状态解和输出响应解、线性系统的能控性和能观性与结构分解及其应用、控制系统的李亚普诺夫稳定性理论, 最后着重讨论了控制系统极点配置、观测器设计、系统解耦镇定等综合理论。各章列举了大量实际应用例题, 强调了基本理论的工程实际应用。

本书适用于大学自动化、电气工程及其自动化等本科专业学生, 也可供研究生、科研人员以及从事控制工程的技术人员参考。



-
- ◆ 主 编 汪纪锋
 - 副 主 编 党晓圆 张 毅
 - 责任编辑 刘 博
 - 责任印制 彭志环 焦志炜
 - ◆ 人民邮电出版社出版发行 北京市丰台区成寿寺路 11 号
邮编 100164 电子邮件 315@ptpress.com.cn
网址 <http://www.ptpress.com.cn>
三河市海波印务有限公司印刷
 - ◆ 开本: 787×1092 1/16
印张: 16.5
字数: 410 千字
-

定价: 39.00 元

读者服务热线: (010)81055256 印装质量热线: (010)81055316
反盗版热线: (010)81055315

本书是自动化专业、电气工程及其自动化专业及相关专业本科学生教学计划中,所开设的“现代控制理论(基础)”课程的教材。学习本课程的目的是使学生获得现代控制理论的基础知识,掌握控制系统状态空间分析方法,熟悉控制系统综合与设计方法,为后续专业课程的学习和实际运用打下坚实的基础。现代控制理论研究范围广、内容多,因受教学学时和教材篇幅的限制,难以做到面面俱到。考虑到线性系统理论是现代控制理论的基础理论,本教材包含了线性系统理论最基本的知识内容,包括线性系统的状态空间模型建立与运动分析、线性系统的能控性与能观性分析、控制系统的李亚普诺夫稳定性分析及线性系统设计综合应用等内容。

本书从工程实际应用出发,阐述了现代数学与控制理论的基本概念和方法,为学生进一步学习控制理论与控制工程设计及应用奠定了基础。本书作者从事控制理论系列课程的教学工作近40年,潜心研究控制理论课程的教材内容和教学方法,具有丰富的教学经验。在撰写本书的过程中,作者充分考虑了学生的学习过程及教师的教学过程,同时兼顾教与学两方面的特点,增强教学过程中的可操作性,突出状态空间中控制理论与工程实践问题的紧密结合,注重学生分析问题和解决问题的能力培养。考虑到近年来不少学校都开设了 Matlab 在控制系统设计与仿真应用的相关课程,所以本书在编写时略去了各章中有关 Matlab 应用的相应内容。本书结构清晰,便于学生从整体上掌握现代控制理论的基本概念和方法,注重物理概念,避免繁琐的数学推证,论证与实例相结合,内容阐述循序渐进,利于学生运用理论解决工程实际问题。

本书由汪纪锋任主编,党晓圆、张毅任副主编。本书是在汪纪锋教授讲授的现代控制理论课程的英文讲稿原稿基础上,经党晓圆、张毅两位老师翻译、整理、编辑之后完成的。其中,张毅翻译整理了第1、第2章,党晓圆翻译整理了第3、第4、第5章,汪纪锋完成统稿并校核了全书。

本书可作为高校自动化、电气工程及其自动化等专业本科学生48~56学时《现代控制理论》课程的教材,也可供控制学科研究生及相关领域工程技术人员参考。

本书的撰写得到重庆市教委“电气工程及其自动化应用型人才培养模式改革与探索”(编号:113036)教改项目基金的支持,同时也得到重庆大学自动化学院、重庆邮电大学自动化学院的大力支持和帮助。本书的撰写还参考了一些同行专家的论著和教材(见参考文献)。在此一并表示衷心的感谢!

由于编者水平所限,书中如有不足之处,敬请使用本书的读者批评指正,以便修订时改进。如读者在使用本书的过程中有其他意见或建议,恳请踊跃提出宝贵意见。

编 者

2013年7月17日于重庆南山

目 录

绪论	1	1.6.1 由离散系统的经典模型求取	46
0.1 现代控制理论概述	1	1.6.2 由连续时间系统离散化求取	49
0.1.1 控制理论的发展	1	习题	52
0.1.2 现代控制理论与经典控制理论的不同点	2	第2章 线性系统的运动分析	56
0.2 本书主要内容结构	2	2.1 状态方程解的一般概念	56
第1章 控制系统的状态空间描述	4	2.1.1 系统特征值	56
1.1 动态系统的状态空间描述	4	2.1.2 状态方程的规范型	57
1.1.1 一般概念	4	2.1.3 状态方程规范化的方法	58
1.1.2 控制系统状态空间数学描述 (模型)	5	2.1.4 时不变系统的矩阵指数 e^{At}	67
1.1.3 状态空间描述建模实例	7	2.2 时不变系统的解	71
1.1.4 关于状态空间描述的几点概念性结论	9	2.2.1 自由系统运动分析	71
1.2 数学模型变换	14	2.2.2 强迫系统运动分析	76
1.2.1 经典时域模型转换为状态空间模型	14	2.3 时变系统的解	78
1.2.2 经典频域模型转换为状态空间模型	18	2.3.1 自由系统运动分析	78
1.3 状态变量图法	30	2.3.2 强迫系统分析	79
1.3.1 直接程序法	30	2.4 系统响应	81
1.3.2 并接程序法	35	2.4.1 系统响应的概念	81
1.3.3 串接程序法	35	2.4.2 线性系统的脉冲响应函数矩阵	82
1.3.4 框图法——单一回路处理法	36	2.5 离散时间系统状态方程的解	82
1.4 系统的传递函数阵	39	2.5.1 迭代法 (Iterative Method)	83
1.4.1 传递函数阵 $G(s)$ 的推证	39	2.5.2 z 变换法求解	84
1.4.2 Leverner 算法	41	习题	86
1.5 线性组合系统的状态空间描述	43	第3章 线性系统的能控性和能观性	89
1.5.1 子系统的属性	43	3.1 线性系统的能控性定义	89
1.5.2 组合系统的数学描述	44	3.1.1 定义	89
1.6 离散时间系统的状态空间描述	46	3.1.2 对定义进一步的解释	89
		3.1.3 关于不能控的定理	91
		3.2 线性连续系统的能控性判据	94
		3.2.1 线性时变系统的能控性判据	94

3.2.2 线性时不变系统的能控性判据	96	3.10.2 $G(s)$ 与能控能观性间关系的进一步结论	148
3.3 线性定常系统输出能控性	107	3.11 离散时间系统的能控性和能观性	153
3.3.1 输出能控性定义	107	3.11.1 线性时不变离散系统的状态能控性	153
3.3.2 输出能控性判据	108	3.11.2 线性时不变离散系统的状态能观性	156
3.4 线性系统能观性定义	109	3.11.3 连续系统离散化后的状态能控性和能观性	159
3.4.1 定义	109	习题	161
3.4.2 对定义的解释	109	第4章 稳定性理论	168
3.5 线性系统能观性判据	111	4.1 稳定性一般概念	168
3.5.1 线性时变系统能观性判据	111	4.1.1 李亚普诺夫第一法——间接方法	168
3.5.2 线性时不变系统能观性判据	112	4.1.2 李亚普诺夫第二法——直接法	169
3.6 系统的能控规范型和能观规范型	121	4.2 有界输入有界输出系统的稳定性	170
3.6.1 能控规范型	121	4.2.1 BIBO 系统的概念	170
3.6.2 能观规范型	124	4.2.2 关于 BIBO 稳定性的定理	171
3.7 线性系统对偶定理	127	4.2.3 BIBO 稳定性判据	171
3.7.1 对偶系统	127	4.3 基于李亚普诺夫意义下的稳定性定义	172
3.7.2 框图结构	127	4.3.1 一般定义	172
3.7.3 对偶关系	128	4.3.2 时不变系统的稳定性	174
3.7.4 两对偶系统特征值之间的关系	128	4.4 基于李亚普诺夫第二方法的稳定性定理	179
3.7.5 对偶原理(对偶定理)	128	4.4.1 主稳定性定理	179
3.7.6 传递函数阵	129	4.4.2 不稳定性定理	183
3.7.7 对偶系统的状态转移阵	129	4.4.3 关于李亚普诺夫函数	183
3.8 系统的结构分解	129	4.5 系统的李亚普诺夫方程	184
3.8.1 按能控性分解	130	4.5.1 矩阵的正定问题	184
3.8.2 按能观性分解	132	4.5.2 李亚普诺夫方程	186
3.8.3 标准分解	133	4.6 非线性系统的稳定性定理	189
3.8.4 实现结构分解的方法	136	4.6.1 克拉索夫斯基法	189
3.9 系统的实现问题	139		
3.9.1 实现	139		
3.9.2 最小实现	139		
3.9.3 最小实现的应用实例	141		
3.10 传递函数矩阵 $G(s)$ 与能控能观性间的关系	145		
3.10.1 能控能观性与系统零极点之间的关系	145		

4.6.2 变量梯度法	192	5.3.2 基于状态反馈的极点配置	214
4.7 李亚普诺夫函数的非稳定性应用	195	5.4 状态重构问题	223
4.7.1 估计收敛速度	195	5.4.1 观测器的定义	224
4.7.2 解最优参数问题	198	5.4.2 观测器的结构	224
4.8 离散系统的稳定性	201	5.4.3 观测器的存在条件	226
4.8.1 线性时不变离散系统	201	5.4.4 观测器的类型	227
4.8.2 非线性离散时间系统	203	5.5 观测器设计	233
习题	204	5.5.1 观测器反馈阵 G 的设计	233
第5章 系统综合理论	207	5.5.2 设计带有观测器的状态反 馈阵	236
5.1 系统(框图)结构类型	208	5.6 系统解耦问题	239
5.1.1 一般结构形式	208	5.6.1 补偿器解耦(串联补偿器)	240
5.1.2 开环系统	210	5.6.2 状态反馈解耦	243
5.1.3 闭环系统的结构形式	210	5.7 系统镇定问题	248
5.2 组合系统的性质	212	5.7.1 系统镇定概念	248
5.2.1 并联结构的性质	212	5.7.2 系统镇定的实现方法	248
5.2.2 串联结构的性质	212	5.7.3 系统可镇定条件	248
5.2.3 反馈结构的性质	212	习题	252
5.2.4 各种结构间的性质	213	参考文献	256
5.3 极点配置问题	213		
5.3.1 概念	213		

0.1 现代控制理论概述

控制理论作为具有前瞻性系统科学的基础,广泛应用于工业生产、国防建设及国民经济的许多方面,包括各种自动控制系统、各类生产过程、各种形式的自动机构、机器人,以及用于信息采集、信息处理、信息加工、管理决策的各种自动化装置和集成化系统。控制理论的应用不仅可以把人们从繁重的劳动中解放出来,而且还可以完成只靠人们自身无法实现的众多精准、危险、复杂的工作。

控制理论一般包括经典控制理论和现代控制理论两大部分。如同其他理论一样,控制理论的发展也经历了不断改进、不断完善和不断提升的过程。

0.1.1 控制理论的发展

1. 经典控制理论的产生和发展

理论总是由实践而来,它源于实践,但又反过来指导实践。人类发明具有“自动”功能作用的装置的历史,大约可追溯到公元前中国的“铜壶滴漏”,公元 477 年祖冲之等制造的指南车,北宋时期苏颂等建成的“水运仪象台”等。但比较明显地采用“反馈原理”设计并成功应用于实践的,当数 1788 年在瓦特(James Watt)发明的蒸汽机上运行工作的离心式飞球调速器。大约 80 年后的 1868 年,美国学者麦克斯威尔(J. C. Maxwell)就此发表了题为《论调速器》的论文,解决了蒸汽机调速系统中出现剧烈振荡的不稳定性问题,提出了简单的稳定性代数判据。1895 年劳斯(Routh)与赫尔维茨(Hurwitz)把麦克斯威尔的思想扩展到由高阶微分方程描述的更为复杂的系统中,分别提出了著名的劳斯判据和赫尔维茨判据,这基本上满足了 20 世纪初期工业控制系统的需要。为了适应第二次世界大战中控制系统需要具有准确跟踪与补偿特性的实际要求,1932 年奈奎斯特(H. Nyquist)提出了研究系统的频率响应法,1948 年伊万斯(W. R. Ewans)提出了研究系统的复域根轨迹法。1947 年美国学者维纳(N. Wiener)把因控制理论引发的生产自动化同第二次产业革命联系起来展开研究,于 1948 年出版了控制理论界的标志性著作《控制论》,书中以频率响应法和根轨迹法为要点,论述了控制理论的一般方法,扩展了反馈的概念,为控制理论这门学科奠定了基础,被称为经典控制理论,也称为维纳滤波(经典)控制理论。随后,1954 年我国著名科学家钱学森在美国出版了《工程控制论》,从而为控制理论的工程应用奠定了基础。

2. 现代控制理论的产生和发展

随着近代科学技术发展的突飞猛进,特别是空间技术、大规模现代先进生产和集成制造技术的发展,使工程系统的结构和所完成任务越来越复杂,速度和精度要求也越来越高。这就

要求控制理论必须解决动态耦合的多输入、多输出系统和时变系统的控制设计问题。此外,还常常要求系统的某些性能最优,系统具有一定的抵御干扰的能力和環境适应能力等,这些新的指标及控制要求都是经典控制理论无法解决的。由此,现代控制理论的形成则是必然的。

现代科技的发展不仅对控制理论与技术提出了挑战,也为推动现代控制理论的形成和发展创造了积极条件。现代数学,如现代代数、泛函分析、动态规划等,为现代控制理论提供了多种多样的分析方法和分析工具;而计算机技术又为现代控制理论发展提供了应用的平台。20世纪50年代后期,贝尔曼(Bellman)等人提出了分析系统的状态法和动态规划法;20世纪60年代初卡尔曼(Kalman)提出了状态的能控性、能观性概念,创建了卡尔曼滤波理论;尔后,俄罗斯人庞特里亚金(Lev Pontryagin)又提出了极大值原理,这促进了现代控制理论的形成。这一时期的标志性成果,当数美籍匈牙利学者卡尔曼提出的滤波理论,即卡尔曼滤波理论。自20世纪60年代以来,控制理论得到快速发展,形成了几个重要分支学科,如线性系统理论、最优控制理论、自适应控制理论、系统辨识理论等。到了20世纪70年代,又逐步向大系统理论、智能控制理论、复杂系统理论等方向发展,而现今的鲁棒控制理论等又是一个新的研究热点。

近半个世纪以来现代控制理论已广泛应用于工业、农业、交通运输、电力系统、钢铁冶金、航空航天及国防建设各领域。回顾控制理论的发展历程可以看出,控制理论的发展反映了人类历经机械化时代进入电气化时代,并开始走向自动化、信息化、智能化时代的过程。

0.1.2 现代控制理论与经典控制理论的不同点

现代控制理论与经典控制理论的不同点主要表现在研究对象、研究方法、研究手段、控制的着眼点、分析方法、综合设计及方法等几个方面。

经典控制理论以单输入单输出系统为研究对象,数学模型是高阶微分方程,应用传递函数法(外部描述法)和拉普拉斯变换法作为研究方法和工具。研究问题的着眼点是系统的输出,分析和设计方法主要是在复频域,运用频率特性、根轨迹等校正系统,设计PID控制。

现代控制理论以多输入多输出系统为研究对象,用一阶向量微分方程作为数学模型,以状态空间法(内部描述法)为研究方法,以线性代数、矩阵理论为研究工具。研究问题的着眼点是系统的状态,分析方法在实域、复域进行,从能控性能观性角度,运用极点配置设计状态反馈闭环系统和输出反馈闭环系统,运用状态观测器实现状态反馈的工程应用。

另外,在经典控制理论中,频率法物理概念清楚,直观且实用,但难于实现最优控制,现代控制理论则易于实现最优控制和实时控制。

应当指出,现代控制理论是在经典控制理论基础上发展起来的,两者虽有本质的区别,但在对系统进行分析时,两种理论是相互补充、相辅相成的。对于初学者来说,学习现代控制理论应采用与经典理论两者相对比的方法,这样更为有益。

0.2 本书主要内容结构

本书主要讨论线性系统理论部分的基本内容,即研究线性系统状态的特性与运动规律,以及改善系统特性与运动规律的可能性与基本方法,强调了基本理论的工程实际应用。本书共分5章:

第1章是控制系统的状态空间描述,主要解决系统状态空间数学模型的建立问题。这一章的特点在于突出了由经典框图结构模型建立状态空间模型的方法和物理概念。

第2章是线性系统的运动分析,讨论状态转移矩阵及系统的状态解和输出响应解。这一章的特点在于强调了状态方程的求解方法以及状态转移矩阵的数学物理概念。

第3章是线性系统的能控性和能观性,分析介绍系统能控性和能观性的定义及其判据,讨论系统按能控性和能观性结构分解问题。这一章是这门课程的核心内容之一,强调能控性和能观性的工程应用概念及系统结构分解的实际应用是本章的一个特点。这一章充分证实了现代控制理论研究问题的着眼点在于系统的状态而非系统的输出。

第4章是控制系统的稳定性理论,介绍李亚普诺夫稳定性概念和判定问题。这一章将经典线性理论中的渐近稳定概念引伸至李亚普诺夫意义下的稳定性理论,突出了针对非线性系统稳定性判据的一般方法,以及李亚普诺夫函数的非稳定性应用,这是这一章的特点。

第5章是控制系统综合理论,讨论利用系统极点配置改变系统性能的方法和状态观测器的设计、系统的镇定及解耦等问题。这一章的特点,一是强调了利用状态反馈配置极点、设计观测器、解耦系统以及镇定系统所必须的条件,二是突出了综合后设计系统的物理仿真实现与状态变量图的工程应用。

本章主要讨论控制系统的动态描述——数学模型。

经典控制理论的系统分析,在时域中采用 n 阶微分方程(连续系统)或 n 阶差分方程(离散系统)作为描述系统动态特性的数学模型。而在频域中则采用传递函数(连续系统)或 z 传递函数(离散系统)作为数学模型。但是,这些数学模型只建立了系统的输入信号量和输出信号量之间的关系,不能反映系统内部变化的特性。因此,通常把经典理论中的这类描述称为外部描述,即黑箱理论。可以证明,系统变化的真正原因是系统内部状态的变化,而现代控制理论描述系统状态的数学模型称为内部描述,状态空间模型恰好是动态系统的内部描述。

1.1 动态系统的状态空间描述

本节主要就动态系统状态空间描述的形式即状态空间模型的建立方法作较详尽的说明,同时也对实际系统实现物理模拟的系统状态变量图的结构及应用进行讲解。

1.1.1 一般概念

1. 状态、状态变量(State Variable)

状态是描述系统行为特征的一组变量。状态就是指状态变量。

动态系统的状态定义为:在时间域中能够完整地、确定地描述系统行为特征的一个最小变量组。这里,对三个限定词做一个说明:

所谓“完整地”,是指这组变量既可以描述系统的静态特性,又可以描述系统的动态特性。

所谓“确定地”,是指当系统的初始状态 $x(t_0)$ 和输入信号 $u(t) (t \geq t_0)$ 被给定,则系统在 $t \geq t_0$ 的任意时刻的状态就可以由这组状态变量加以确定。

所谓“最小的”,是指再增加一个变量是多余的,而减少一个变量就不能完整地描述系统行为特性。或者,用数学语言来说,“最小变量组”就是一组最大线性无关变量组。

2. 状态向量(State Vector)

设系统有 n 个状态变量为 $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$, 把这些状态变量作为分量所构成的列向量就是状态向量,记作

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad \text{——} n \text{ 维列向量}$$

或记为

$$\mathbf{x}(t) = [x_1(t) \quad x_2(t) \quad \cdots \quad x_n(t)]^T \text{——} n \text{ 维行向量的转置}$$

其中, $x_i(t)$ ——状态分量, $i=1, 2, \dots, n$ 。

3. 状态空间(State Space)

以状态变量的各分量 $x_i(t)$ 为坐标轴所构成的 n 维欧氏(Euclid)空间称为状态空间, 记为 $\mathbf{R}^n$ 。状态空间中的每一个点, 对应于系统的某一特定性能的状态。三维状态空间 $\mathbf{R}^3$ 如图 1-1 所示。若图中 A 点为初始状态 $\mathbf{x}(t_0)$, 当给定输入函数 $\mathbf{u}(t)$ 随时间变化, 状态变化的轨迹将会唯一确定。特别地, 当 $n=2$ 时, 就是经典理论中大家熟悉的相平面。

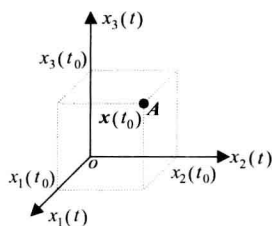


图 1-1 三维状态空间图

1.1.2 控制系统状态空间数学描述(模型)

在现代控制理论中, 一个典型的控制系统(或称受控过程)的框图如图 1-2 所示。

其中, 输入向量记为

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_r(t) \end{bmatrix} \quad (1-1)$$

即, $\mathbf{u}(t) \in \mathbf{R}^r$, r 维列向量。

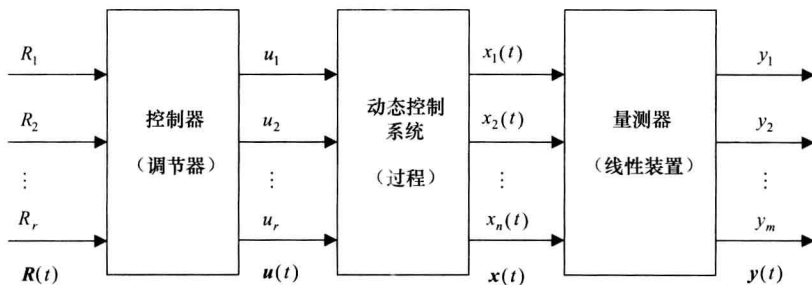


图 1-2 典型控制系统框图

输出向量记为

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_m(t) \end{bmatrix} \quad (1-2)$$

即, $\mathbf{y}(t) \in \mathbf{R}^m$, m 维列向量。

状态向量记为

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad (1-3)$$

即, $\mathbf{x}(t) \in \mathbf{R}^n$, n 维列向量。

从工程控制角度讲, 这里 $r \leq n$, $m \leq n$ 。

研究认为, 输入信号向量 $\mathbf{u}(t)$ 激励了系统内部状态 $\mathbf{x}(t)$ 的变化, 其变化关系可以用 n 个一阶微分方程来描述; 而状态的变化通过线性量测传递到系统输出端而得到系统输出信号向量 $\mathbf{y}(t)$, 故其(量测)传递过程可以用 m 个代数方程加以表示。于是, 有状态变化的 n 个一阶微分方程

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ \vdots \\ \dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \end{cases} \quad (1-4)$$

其中, 函数 f_i 可以是线性的也可以是非线性的。

m 个输出的代数方程为

$$\begin{cases} y_1 = g_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ y_2 = g_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ \vdots \\ y_j = g_j(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ \vdots \\ y_m = g_m(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \end{cases} \quad (1-5)$$

同样地, 函数 g_j 可以是线性的, 也可以是非线性的。

将式(1-4)和式(1-5)用向量形式表示就得到系统状态空间描述的一般数学模型

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \\ \mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \end{cases} \quad (1-6)$$

式中, $\mathbf{x}$ 为状态向量; $\mathbf{u}$ 为输入向量; t 为时间标量。 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$ 是一阶向量微分方程, 称为系统的状态方程(State Equation); $\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$ 是向量代数方程, 称为系统的输出方程(Output Equation)或测量方程。该向量数学模型, 式(1-6)就是系统的内部描述, 也就是状态空间描述的一般形式。

特别地, 当控制系统为线性系统时, 根据线性系统的叠加性和齐次性, 可以得到 $\dot{x}_i$ 、 y_i 与 x_i 、 u_j 的线性组合关系。故可得线性微分方程组和代数方程组为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = [a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \dots + a_{1n}(t)x_n] + [b_{11}(t)u_1 + b_{12}(t)u_2 + \dots + b_{1r}(t)u_r] \\ \dot{x}_2 = [a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \dots + a_{2n}(t)x_n] + [b_{21}(t)u_1 + b_{22}(t)u_2 + \dots + b_{2r}(t)u_r] \\ \vdots \\ \dot{x}_i = [a_{i1}(t)x_1 + a_{i2}(t)x_2 + \dots + a_{in}(t)x_n] + [b_{i1}(t)u_1 + b_{i2}(t)u_2 + \dots + b_{ir}(t)u_r] \\ \vdots \\ \dot{x}_n = [a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \dots + a_{nn}(t)x_n] + [b_{n1}(t)u_1 + b_{n2}(t)u_2 + \dots + b_{nr}(t)u_r] \end{cases} \quad (1-7)$$

$$\begin{cases} y_1 = [c_{11}(t)x_1 + c_{12}(t)x_2 + \cdots + c_{1n}(t)x_n] + [d_{11}(t)u_1 + d_{12}(t)u_2 + \cdots + d_{1r}(t)u_r] \\ y_2 = [c_{21}(t)x_1 + c_{22}(t)x_2 + \cdots + c_{2n}(t)x_n] + [d_{21}(t)u_1 + d_{22}(t)u_2 + \cdots + d_{2r}(t)u_r] \\ \vdots \\ y_j = [c_{j1}(t)x_1 + c_{j2}(t)x_2 + \cdots + c_{jn}(t)x_n] + [d_{j1}(t)u_1 + d_{j2}(t)u_2 + \cdots + d_{jr}(t)u_r] \\ \vdots \\ y_m = [c_{m1}(t)x_1 + c_{m2}(t)x_2 + \cdots + c_{mn}(t)x_n] + [d_{m1}(t)u_1 + d_{m2}(t)u_2 + \cdots + d_{mr}(t)u_r] \end{cases} \quad (1-8)$$

应用矩阵运算形式,可得出线性系统的状态空间表达式为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}(t)\mathbf{x} + \mathbf{D}(t)\mathbf{u} \end{cases} \quad (1-9)$$

其中,

$$\mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix}, \mathbf{B}(t) = \begin{bmatrix} b_{11}(t) & \cdots & b_{1r}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1}(t) & \cdots & b_{nr}(t) \end{bmatrix} \quad (1-10)$$

$$\mathbf{C}(t) = \begin{bmatrix} c_{11}(t) & \cdots & c_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ c_{m1}(t) & \cdots & c_{mn}(t) \end{bmatrix}, \mathbf{D}(t) = \begin{bmatrix} d_{11}(t) & \cdots & d_{1r}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ d_{m1}(t) & \cdots & d_{mr}(t) \end{bmatrix}$$

$\mathbf{A}(t)$, $\mathbf{B}(t)$, $\mathbf{C}(t)$ 和 $\mathbf{D}(t)$ 均为状态空间描述中的系数矩阵,一般它们由组成该系统的设备元器件参数构成。

1.1.3 状态空间描述建模实例

为了说明状态空间模型建立的过程,下面给出两个简单实例。

【例 1.1】 有弹簧-质量-阻尼器封闭系统如图 1-3 所示,输入为外力 P ,输出为质量上的位移 s ,假设系统为刚性联接,试建立该系统的状态空间描述。

解前分析:一方面,系统中独立储能元件的数目决定了状态变量的个数。在此系统中,有 2 个独立储能元件。弹簧——存储势能;质量——存储动能。因此,可选择 2 个状态变量。

另一方面,可选择能反映储能特性的物理变量作为系统的状态变量。该刚性联接系统中,弹簧的位移 s 反映了弹簧的势能大小,质量的速度 v 反映了质量的动能大小,故可选择 s 和 v 两变量作为状态变量。

解:选取状态变量 $\mathbf{x}$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ s \end{bmatrix}$$

注意到刚性连接系统中,质量的速度 v 也是阻尼器的速度,弹簧的位移 s 则正是系统的输出。

由于支撑该系统运动的物理定律是牛顿第二定律,于是可列出时域中的运动方程

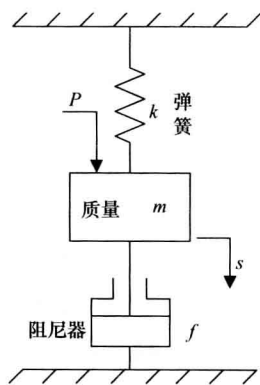


图 1-3 弹簧-质量-阻尼器系统

$$\begin{cases} m \frac{dv}{dt} = P - ks - f v \\ v = \frac{ds}{dt} \end{cases}$$

则两个关于状态变量的一阶微分方程

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = -\frac{f}{m}v - \frac{k}{m}s + \frac{1}{m}P \\ \frac{ds}{dt} = v \end{cases}$$

得状态方程为

$$\begin{cases} \dot{v} = -\frac{f}{m}v - \frac{k}{m}s + \frac{1}{m}P \\ \dot{s} = v \end{cases}$$

同时输出方程为

$$y = x_2 = s$$

写成矩阵形式

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{f}{m} & -\frac{k}{m} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{m} \\ 0 \end{bmatrix} [P] \\ y = [y] = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} v \\ s \end{bmatrix} \end{cases}$$

或

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)P$$

输出方程为

$$y = C(t)x$$

故系统的状态空间表达式为

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + BP \\ y = Cx \quad D = 0 \end{cases}$$

显然,弹簧-质量-阻尼器系统是一个二维线性时不变系统。

【例 1.2】 有线性 RLC 网络如图 1-4 所示。设 u_1 为加在端口①-②的外施电压源, u_2 为电路中的干扰电压源, 网络端口③-④的电压 y 为输出电压。试求该电网的状态空间描述。

解前分析: 因为网络系统中有两种不同形式的储能元件 L 和 C, 且 L_1 和 L_2 是不能被简化的 2 个独立储能元件, 所以网络系统中共有 3 个独立的储能元件 L_1 、 L_2 和 C。而直接反映这 3 个元件独立储能大小的则是施于其上的电流和电压。

解: (1) 选择状态变量。可选择相应的电流和电压为状态变量 x , 即

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ u_c \end{bmatrix}$$

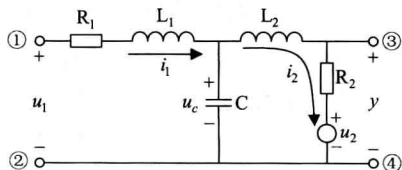


图 1-4 RLC 网络电路图

(2) 利用支撑网络运行的物理定律列写运动方程。由基尔霍夫定律,列出回路电压、节点电流方程为

$$\begin{cases} u_1 = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + u_c \\ u_c = R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + u_2 \\ i_1 = i_2 + C \frac{du_c}{dt} \end{cases}$$

并得到输出方程为

$$y = R_2 i_2 + u_2$$

(3) 解析出状态变量的一阶微分方程组,即

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{i}_1 = -\frac{R_1}{L_1} i_1 + \frac{1}{L_1} u_c + \frac{1}{L_1} u_1 \\ \dot{x}_2 = \dot{i}_2 = -\frac{R_2}{L_2} i_2 + \frac{1}{L_2} u_c - \frac{1}{L_2} u_2 \\ \dot{x}_3 = \dot{u}_c = \frac{1}{C} i_1 - \frac{1}{C} i_2 \end{cases}$$

(4) 借用矩阵及其运算,可得出状态空间表达式

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{i}_1 \\ \dot{i}_2 \\ \dot{u}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_1}{L_1} & 0 & -\frac{1}{L_1} \\ 0 & -\frac{R_2}{L_2} & \frac{1}{L_2} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L_2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \\ \mathbf{y} = [y] = [0 \quad R_2 \quad 0] \mathbf{x} + [0 \quad 1] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

或

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \end{cases}$$

显然,这是一个双输入单输出的三维电路系统模型。

1.1.4 关于状态空间描述的几点概念性结论

根据前面的分析和实例,可得出下面几点有用的结论:

(1) 和经典描述相比,状态空间描述考虑了这样一个过程: $\mathbf{u}(t) \rightarrow \mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{y}(t)$ 。该过程表明,输入激励了状态的变化,而状态的变化产生输出。状态空间描述考虑了被经典描述掩盖了的的状态的变化。所以说,经典数学模型是外部描述,而状态空间描述是内部描述。

(2) 一方面,受输入信号激励而引起的状态变化是一个运动过程,因此,状态方程是一个向量微分方程,即 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$ 。另一方面,由状态变化所影响的输出信号的变化是一个传递过程,所以,输出方程必然是向量代数方程,即 $\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$ 。

(3) 一般,系统状态变量的个数等且仅等于系统中独立储能元件的个数。在经典控制理

论中,一个 n 阶系统一定具有 n 个独立储能元件。因此, n 阶系统可选取的状态变量必须是 n 个。这表明,经典控制理论中的 n 阶系统等价于现代控制理论中的 n 维系统。

(4) 对于一些机械系统和电气系统(网络),通常选择能表达独立储能元件储能特性的物理变量作为状态变量。所谓“独立储能元件”是指这些储能元件间相互不能被简化。

如图 1-5 所示的 RLC 电网络。该网络独立储能元件只有 2 个,而非 3 个。故该系统是 2 阶网络或者说是 2 维网络。

又如,图 1-6 所示的 RC 网络中,虽然只有 1 种形式的储能元件,2 个电容,但是 C_1 和 C_2 是相对独立的,不能简化为 1 个电容。所以说该网络也是 2 阶网络或 2 维网络。事实上,在时域中的数学模型如下

$$\begin{aligned} & (R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3) C_1 C_2 \frac{d^2 u_2}{dt^2} + (R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_1 C_2 + R_3 C_1) \frac{du_2}{dt} + u_2 \\ & = R_2 (R_1 + R_3) C_1 C_2 \frac{du_1}{dt^2} + (R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_3 C_1) \frac{du_1}{dt} + u_1 \end{aligned}$$

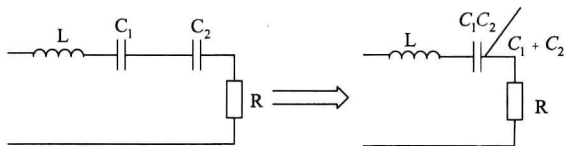


图 1-5 RLC 网络

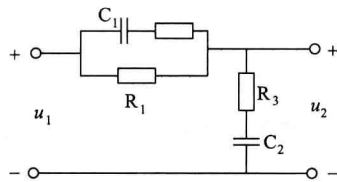


图 1-6 RC 网络

【例 1.3】 有如图 1-7 所示的 RC 电路,试指出该网络中独立储能元件的个数和系统的阶数。

解前分析:一般可采用微分方程或传递函数两种方法来验证电路的阶数。在这里,运用传递函数的方法。

解:①利用复域电路模型图 1-8 可方便推导出 RC 网络的总阻抗 $Z(s)$

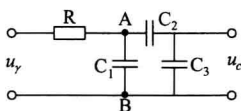


图 1-7 RC 电路图

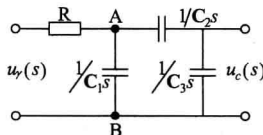


图 1-8 RC 电路复域图

$$Z(s) = R + Z_{AB}(s)$$

其中

$$\begin{aligned} Z_{AB}(s) &= \frac{1}{C_1 s} \parallel \left[\frac{1}{C_2 s} + \frac{1}{C_3 s} \right] = \frac{1}{C_1 s} \parallel \left[\frac{C_2 + C_3}{C_2 C_3 s} \right] \\ &= \frac{1}{C_1 s} \cdot \left[\frac{C_2 + C_3}{C_2 C_3 s} \right] / \left[\frac{1}{C_1 s} + \frac{C_2 + C_3}{C_2 C_3 s} \right] = \frac{C_2 + C_3}{[C_1 C_2 + C_1 C_3 + C_2 C_3] s} \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} Z(s) &= R + Z_{AB}(s) = R + \frac{C_2 + C_3}{[C_1 C_2 + C_1 C_3 + C_2 C_3] s} \\ &= \{R[C_1 C_2 + C_1 C_3 + C_2 C_3] s + C_2 + C_3\} / [C_1 C_2 + C_1 C_3 + C_2 C_3] s \end{aligned}$$