

高等数学

习题及习题集精解

杨爱珍 殷承元 叶玉全 王琪 编

014003950

013-44
513

主要内容

高等数学习题及习题集精解

杨爱珍 殷承元 叶玉全 王 琪 编



复旦大学出版社



北航

C1690570

013-44

513

原

图书在版编目(CIP)数据

高等数学习题及习题集精解/杨爱珍等编. —上海:复旦大学出版社,2013.7
ISBN 978-7-309-09647-7

I. 高… II. 杨… III. 高等数学-高等学校-题解 IV. 013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 076285 号

高等数学习题及习题集精解

杨爱珍 殷承元 叶玉全 王 琪 编

责任编辑/范仁梅

复旦大学出版社有限公司出版发行

上海市国权路 579 号 邮编:200433

网址:fupnet@fudanpress.com http://www.fudanpress.com

门市零售:86-21-65642857 团体订购:86-21-65118853

外埠邮购:86-21-65109143

上海华教印务有限公司

开本 787×1092 1/16 印张 27 字数 707 千

2013 年 7 月第 1 版第 1 次印刷

印数 1—4 100

ISBN 978-7-309-09647-7/O · 513

定价:48.00 元

如有印装质量问题,请向复旦大学出版社有限公司发行部调换。

版权所有 侵权必究



北航

C1690570

014003320

内容提要

本书由上海财经大学应用数学系编写,系高等经济管理类院校使用的经济数学系列教材的辅导用书之一。

全书分为两大部分:第一部分为由上海财经大学应用数学系编写、由高等教育出版社 2011 年出版的《高等数学》各章的习题精解;第二部分为由上海财经大学应用数学系编写、由上海财经大学出版社 2012 年出版的《高等数学习题集》(第三版)各章的学习测试题精解。

每部分又分别为 12 章:函数与极限、导数与微分、中值定理与导数应用、不定积分、定积分、定积分的应用、空间解析几何、多元函数微分及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数、微分方程与差分方程。

本书可作为高等院校的数学基础课程“高等数学”教学辅导参考书,同时也适合各类考研学生作为高等数学的复习用书。

上海财经大学图书馆

前 言

随着我国高等教育的飞速发展,数学在各学科中的应用更广泛。高等数学是一门以经典微积分为主的数学基础课程,也是各高等院校的一门重要的公共必修课。上海财经大学的高等数学教学一直以高标准、严要求为宗旨,收到良好的教学效果,为我校培养优秀的财经人才奠定了扎实的数学功底,学生在历次全国数学竞赛中屡获佳绩,并在历届考研中成绩名列前茅,这与有一套好的教材及教辅用书密切相关。

上海财经大学应用数学系在上海财经大学出版社出版的《高等数学》(第三版)的基础上,又组织编写了由高等教育出版社2011年出版的《高等数学》;以及修订了由上海财经大学出版社出版的《高等数学学习题集》(第二版),2012年出版了《高等数学学习题集》(第三版)。

做习题是学习高等数学的一个重要环节,只有通过做题才能深刻理解基本概念和基本理论,熟练掌握基本内容和基本技能,加强思维训练和能力培养,达到巩固知识和扩大视野的目的。本书为了帮助学生有解题的感觉,配合教学,着力为学生提供分析问题和解决问题的方法,对学生学习高等数学将起到一种积极的指导作用。

全书分为两大部分:第一部分为由上海财经大学应用数学系编写、由高等教育出版社2011年出版的《高等数学》各章的习题精解;第二部分为由上海财经大学应用数学系编写、由上海财经大学出版社2012年出版的《高等数学学习题集》(第三版)各章的学习测试题精解。

本书由上海财经大学应用数学系的4位老师分工编写而成,其中第一部分《高等数学》各章习题精解的第一、二、三、四、五、六、十二章由杨爱珍副教授编写,第七、十一章由殷承元教授编写,第八、九、十章由叶玉全教授编写;第二部分《高等数学学习题集》(第三版)各章学习测试题精解由王琪副教授编写,最后由杨爱珍副教授对全书进行了统稿。

本书可作为高等院校的数学基础课程高等数学的教学辅导参考书,同时也适合各类考研学生作为高等数学的复习用书。

在教材编写过程中,我们得到了上海财经大学应用数学系领导的重视及上海财经大学教授高等数学课程老师们的大力支持,并得到了复旦大学出版社的鼎力相助,特别是范仁梅老师的认真负责,在此一并致谢。

尽管我们尽了最大的努力,但错误和不足之处仍然难免,恳请读者批评指正,我们表示万分感谢。

编 者

2013年7月

目 录

第一部分

习题精解

第一章	函数与极限习题一精解	1
第二章	导数与微分习题二精解	19
第三章	中值定理与导数应用习题三精解	42
第四章	不定积分习题四精解	78
第五章	定积分习题五精解	94
第六章	定积分的应用习题六精解	118
第七章	空间解析几何习题七精解	125
第八章	多元函数微分及其应用习题八精解	135
第九章	重积分习题九精解	155
*第十章	曲线积分与曲面积分习题十精解	169
第十一章	无穷级数习题十一精解	179
第十二章	微分方程与差分方程习题十二精解	193

第二部分

学习测试题精解

第一章	函数与极限学习测试题精解	247
第二章	导数与微分学习测试题精解	257
第三章	中值定理与导数应用学习测试题精解	270
第四章	不定积分学习测试题精解	285
第五章	定积分学习测试题精解	298
第六章	定积分的应用学习测试题精解	312
第七章	空间解析几何学习测试题精解	319
第八章	多元函数微分及其应用学习测试题精解	334
第九章	重积分学习测试题精解	346
*第十章	曲线积分与曲面积分学习测试题精解	353
第十一章	无穷级数学习测试题精解	380
第十二章	微分方程与差分方程学习测试题精解	405

第一部分

习题精解

第一章 函数与极限习题一精解

1. 求下列函数的定义域,并用区间表示:

- (1) $y = \frac{1}{x} - \sqrt{1-x^2}$; (2) $y = \sqrt{x-2} + \frac{1}{x-3} + \frac{1}{\lg(5-x)}$;
(3) $y = \arcsin \frac{x-1}{2} + \frac{1}{\sqrt{x^2-x-2}}$; (4) $y = 2^{\frac{1}{x}} + \arccos \ln \sqrt{1-x}$;
(5) $y = \begin{cases} x^2+3, & x \leq 0, \\ \lg x, & x > 0; \end{cases}$ (6) $y = e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{1-\ln x}$.

解

- (1) 由 $\begin{cases} x \neq 0, \\ 1-x^2 \geq 0, \end{cases}$ 得 $D = [-1, 0) \cup (0, 1]$.

- (2) 由 $\begin{cases} x-2 \geq 0, \\ x-3 \neq 0, \\ 5-x > 0, \\ 5-x \neq 1, \end{cases}$ 得 $D = [2, 3) \cup (3, 4) \cup (4, 5)$.

- (3) 由 $\begin{cases} \left| \frac{x-1}{2} \right| \leq 1, \\ x^2-x-2 > 0, \end{cases}$ 得 $D = (2, 3]$.

- (4) 由 $\begin{cases} x \neq 0, \\ |\ln \sqrt{1-x}| \leq 1, \\ 1-x > 0, \end{cases}$ 得 $D = [1-e^2, 0) \cup (0, 1-e^{-2}]$.

- (5) $D = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

- (6) 由 $\begin{cases} x > 0, \\ 1-\ln x \neq 0, \end{cases}$ 得 $D = (0, e) \cup (e, +\infty)$.

2. 已知 $y = f(x)$ 的定义域是 $[0, 1]$, 求下列函数的定义域:

- (1) $f(x-4)$; (2) $f(\lg x)$; (3) $f(\sin x)$.

解

- (1) 因为 $f(x)$, $0 \leq x \leq 1$, 故 $f(x-4)$, $0 \leq x-4 \leq 1$, 得 $4 \leq x \leq 5$, 即 $D = [4, 5]$.

- (2) 因为 $f(x)$, $0 \leq x \leq 1$, 故 $f(\lg x)$, $0 \leq \lg x \leq 1$, 得 $1 \leq x \leq 10$, 即 $D = [1, 10]$.

- (3) 因为 $f(x)$, $0 \leq x \leq 1$, 故 $f(\sin x)$, $0 \leq \sin x \leq 1$, 得 $2k\pi \leq x \leq (2k+1)\pi$, ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), 即 $D = [2k\pi, (2k+1)\pi] (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$.

3. (1) 设 $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$, 求 $f(x+1)$ 与 $f\left(\frac{1}{x}\right)$;

(2) 设 $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2}$, 求 $f(x-1)$;

(3) 设 $f\left(x - \frac{1}{x}\right) = \frac{x^2}{1+x^4}$, 求 $f(x)$;

(4) 设 $f(x^2-1) = \ln \frac{x^2}{x^2-2}$, 且 $f[\varphi(x)] = \ln x$, 求 $\varphi(x)$.

解 (1) $f(x+1) = \frac{1-(x+1)}{1+(x+1)} = \frac{-x}{x+2}$; $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} = \frac{x-1}{x+1}$.

(2) 由于 $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2$, 故 $f(x-1) = (x-1)^2 - 2 = x^2 - 2x - 1$.

(3) 由于 $f\left(x - \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\frac{1}{x^2} + x^2} = \frac{1}{\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2}$, 故 $f(x) = \frac{1}{x^2 + 2}$.

(4) 由于 $f(x^2-1) = \ln \frac{(x^2-1)+1}{(x^2-1)-1}$, 得 $f[\varphi(x)] = \ln \frac{\varphi(x)+1}{\varphi(x)-1} = \ln x$, 故 $\varphi(x) = \frac{x+1}{x-1}$.

4. 讨论下列函数的奇偶性:

(1) $f(x) = \frac{\sin x}{x} + \cos x$;

(2) $f(x) = x\sqrt{x^2-1} + \tan x$;

(3) $f(x) = x(1-x)$;

(4) $f(x) = \ln(\sqrt{x^2+1}-x)$.

解 (1) 由于 $f(-x) = \frac{\sin(-x)}{-x} + \cos(-x) = \frac{\sin x}{x} + \cos x = f(x)$, 故 $f(x)$ 为偶函数.

(2) 由于 $f(-x) = -x\sqrt{(-x)^2-1} + \tan(-x) = -x\sqrt{x^2-1} - \tan x = -f(x)$, 故 $f(x)$ 为奇函数.

(3) 由于 $f(-x) = -x[1-(-x)] = -x(1+x) \neq f(x)$, $f(-x) \neq -f(x)$, 故 $f(x)$ 为非奇非偶函数.

(4) 由于 $f(-x) = \ln[\sqrt{(-x)^2+1}-(-x)] = \ln(\sqrt{x^2+1}+x) = \ln \frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}$
 $= -\ln(\sqrt{x^2+1}-x) = -f(x)$,

故 $f(x)$ 为奇函数.

5. 已知 $f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数, 且在 $[0, 2]$ 上有 $f(x) = x^2$, 求 $f(x)$ 在 $[0, 6]$ 上的表达式.

解 由于 $f(x) = f(x+2) = f(x+4)$, 因此 $f(x-4) = f(x-2) = f(x)$, 当 $x \in [0, 2]$ 时, $x-2 \in [-2, 0]$, $x-4 \in [-4, -2]$, 故

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x \leq 2, \\ (x-2)^2, & 2 < x \leq 4, \\ (x-4)^2, & 4 < x \leq 6. \end{cases}$$

6. 求下列函数的反函数:

(1) $y = \sqrt{9-x}$;

(2) $y = \frac{2^x}{2^x+1}$;

$$(3) y = \begin{cases} x-1, & x < 0, \\ x^2, & x \geq 0; \end{cases} \quad (4) y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

解 (1) 由于 $y = \sqrt{9-x}$, 得 $x = 9-y^2$, 故反函数为 $y = 9-x^2 (x \geq 0)$.

(2) 由于 $y = \frac{2^x}{2^x+1}$, 得 $2^x = \frac{y}{1-y}$, 即 $x = \log_2 \frac{y}{1-y}$, 故反函数为 $y = \log_2 \frac{x}{1-x}$.

(3) 由 $x < 0$ 时, $y = x-1$, 得 $x = y+1$, 即 $y = x+1$; 由 $x \geq 0$ 时, $y = x^2$, 得 $x = \sqrt{y}$, 即 $y = \sqrt{x}$, 故反函数为

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x < -1, \\ \sqrt{x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

(4) 由于 $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, 得 $(e^x)^2 - 2ye^x - 1 = 0$, 即 $e^x = y \pm \sqrt{y^2+1}$ (负值舍去), 故反函数为 $y = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$.

7. 指出下列各函数是由哪些基本初等函数复合而成:

(1) $y = \ln \sin^2 x$;

(2) $y = 5^{\cos \sqrt{x}}$;

(3) $y = \arctan e^{\frac{1}{x}}$;

(4) $y = \cos^2 \ln x$.

解 (1) $y = \ln \sin^2 x$, 由 $y = \ln u$, 及 $u = v^2$, 和 $v = \sin x$ 复合而成.

(2) $y = 5^{\cos \sqrt{x}}$, 由 $y = 5^u$, 及 $u = \cos v$, 和 $v = \sqrt{x}$ 复合而成.

(3) $y = \arctan e^{\frac{1}{x}}$, 由 $y = \arctan u$, 及 $u = e^v$, 和 $v = \frac{1}{x}$ 复合而成.

(4) $y = \cos^2 \ln x$, 由 $y = u^2$, 及 $u = \cos v$, 和 $v = \ln x$ 复合而成.

8. (1) 设 $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2}, & |x| < 1, \\ x^2+1, & |x| \geq 1, \end{cases}$ 求 $f(f(x))$.

(2) 设 $f(x) = \begin{cases} 1+x, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0, \end{cases}$ 求 $f(f(x))$;

(3) 设 $f(x) = \frac{x+|x|}{2}$, $g(x) = \begin{cases} x, & x < 0, \\ x^2, & x \geq 0, \end{cases}$ 求 $f(g(x))$.

解 (1) $f(f(x)) = \begin{cases} \sqrt{1-[f(x)]^2}, & |f(x)| < 1, \\ [f(x)]^2+1, & |f(x)| \geq 1. \end{cases}$

当 $0 < |x| < 1$ 时, $|f(x)| = \sqrt{1-x^2} < 1$,

$$f(f(x)) = \sqrt{1-[f(x)]^2} = \sqrt{1-[\sqrt{1-x^2}]^2} = |x|;$$

当 $|x| = 1$ 时, $f(x) = 2$, $f(f(x)) = [f(x)]^2 + 1 = 5$;

当 $x = 0$ 时, $f(x) = 1$, $f(f(x)) = [f(x)]^2 + 1 = 2$;

当 $|x| > 1$ 时, $|f(x)| = x^2 + 1 > 1$,

$$f(f(x)) = [f(x)]^2 + 1 = (x^2 + 1)^2 + 1 = x^4 + 2x^2 + 2.$$

因此 $f(f(x)) = \begin{cases} |x|, & 0 < |x| < 1, \\ 2, & x = 0, \\ x^4 + 2x^2 + 2, & |x| \geq 1. \end{cases}$

$$(2) f(f(x)) = \begin{cases} 1+f(x), & f(x) < 0, \\ 1, & f(x) \geq 0. \end{cases}$$

当 $x < -1$ 时, $f(x) = 1+x < 0$, $f(f(x)) = 1+f(x) = 2+x$;

当 $-1 \leq x < 0$ 时, $f(x) = 1+x \geq 0$, $f(f(x)) = 1$.

当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = 1 > 0$, $f(f(x)) = 1$;

$$\text{所以 } f(f(x)) = \begin{cases} x+2, & x < -1, \\ 1, & x \geq -1. \end{cases}$$

$$(3) f(g(x)) = \frac{g(x) + |g(x)|}{2}.$$

当 $x < 0$ 时, $g(x) = x < 0$, $f(g(x)) = \frac{x-x}{2} = 0$;

当 $x \geq 0$ 时, $g(x) = x^2 \geq 0$, $f(g(x)) = \frac{x^2+x^2}{2} = x^2$.

$$\text{所以 } f(g(x)) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x^2, & x \geq 0. \end{cases}$$

9. 分别讨论函数 $y = \lg(a - \sin x)$, 当 $a = 2$, $a = \frac{1}{2}$, $a = -2$ 时, 是否为复合函数? 如果是复合函数, 写出它的定义域.

解 $y = \lg u$, 其定义域 $D_y = (0, +\infty)$.

当 $a = 2$ 时, 函数 $u = a - \sin x$ 的值域 $f_u = [1, 3]$, $D_y \cap f_u \neq \emptyset$, 故 $y = \lg(2 - \sin x)$ 是复合函数, 由 $2 - \sin x > 0$, 得定义域 $(-\infty, +\infty)$;

当 $a = \frac{1}{2}$ 时, 函数 $u = a - \sin x$ 的值域 $f_u = \left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$, $D_y \cap f_u \neq \emptyset$, $y = \lg\left(\frac{1}{2} - \sin x\right)$ 是复合函数, 由 $\frac{1}{2} - \sin x > 0$, 得定义域 $\left[2k\pi - \frac{7\pi}{6}, 2k\pi + \frac{\pi}{6}\right) (k \in \mathbf{Z})$;

当 $a = -2$ 时, 函数 $u = a - \sin x$ 的值域 $f_u = [-3, -1]$, $D_y \cap f_u = \emptyset$, $y = \lg\left(\frac{1}{2} - \sin x\right)$ 不构成复合函数.

10. 某化肥厂日产量最多为 m 吨, 已知固定成本为 a 元, 每多生产 1 吨化肥, 成本增加 k 元. 若每吨化肥的售价为 p 元, 试写出利润与产量的函数关系式.

解 设日产量为 x 吨, 则成本函数 $C(x) = a + kx$, $x \in [0, m]$,

收益函数 $R(x) = px$, $x \in [0, m]$, 利润函数 $L(x) = R(x) - C(x) = (p - k)x - a$, $x \in [0, m]$.

11. 生产某种产品, 固定成本为 2(万元), 每多生产 1(百台), 成本增加 1(万元), 已知需求函数为 $Q = 20 - 4p$ (其中 p 表示产品的价格, Q 表示需求量), 假设产销平衡. 试写出: (1) 成本函数; (2) 收益函数; (3) 利润函数.

解 成本函数 $C(Q) = 2 + Q$ (万元), 收益函数 $R(Q) = pQ = 5Q - \frac{1}{4}Q^2$ (万元), 利润函数 $L(Q) = R(Q) - C(Q) = -\frac{1}{4}Q^2 + 4Q - 2$ (万元).

12. 某商场以每件 a 元的价格出售某种商品, 若顾客一次购买 50 件以上, 则超出 50 件以上的以每件 $0.8a$ 元的优惠价出售, 试将一次成交的销售收入表示成销售量 x 的函数.

解
$$R(x) = \begin{cases} ax, & 0 < x \leq 50, \\ 50a + 0.8a(x-50), & x > 50. \end{cases}$$

13. 某运输公司规定货物的吨公里运价为:不超过 a 公里,每公里 k 元,超过 a 公里,超出部分为每公里 $\frac{4}{5}k$ 元,试求运价 m 与里程 s 之间的函数关系式.

解
$$m = \begin{cases} ks, & 0 \leq s \leq a, \\ ak + \frac{4}{5}k(s-a), & s > a. \end{cases}$$

14. 用数列极限的定义验证:

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n+1} = \frac{1}{2};$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0;$

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+1}}{n} = 1;$

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2-2}{n^2+n+1} = 1.$

解 (1) $\forall \epsilon > 0$, 要使 $\left| \frac{n+1}{2n+1} - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2(2n+1)} < \epsilon$ 成立, 即 $n > \frac{1}{4\epsilon} - \frac{1}{2}$, 取 $N = \left[\frac{1}{4\epsilon} - \frac{1}{2} \right]$, 可见, $\forall \epsilon > 0, \exists N = \left[\frac{1}{4\epsilon} - \frac{1}{2} \right]$, 当 $n > N$ 时, 有 $\left| \frac{n+1}{2n+1} - \frac{1}{2} \right| < \epsilon$ 成立, 所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n+1} = \frac{1}{2}.$$

(2) $\forall \epsilon > 0$, 要使 $|\sqrt{n+1} - \sqrt{n}| = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{1}{2\sqrt{n}} < \epsilon$ 成立, 即 $n > \frac{1}{4\epsilon^2}$, 取 $N = \left[\frac{1}{4\epsilon^2} \right]$, 可见, $\forall \epsilon > 0, \exists N = \left[\frac{1}{4\epsilon^2} \right]$, 当 $n > N$ 时, 有 $|\sqrt{n+1} - \sqrt{n}| < \epsilon$ 成立, 所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0.$$

(3) $\forall \epsilon > 0$, 要使 $\left| \frac{\sqrt{n^2+1}}{n} - 1 \right| = \frac{1}{n(\sqrt{n^2+1} + n)} < \frac{1}{2n^2} < \epsilon$ 成立, 即 $n > \frac{1}{\sqrt{2\epsilon}}$, 取 $N = \left[\frac{1}{\sqrt{2\epsilon}} \right]$, 可见, $\forall \epsilon > 0, \exists N = \left[\frac{1}{\sqrt{2\epsilon}} \right]$, 当 $n > N$ 时, 有 $\left| \frac{\sqrt{n^2+1}}{n} - 1 \right| < \epsilon$ 成立, 所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+1}}{n} = 1.$$

(4) $\forall \epsilon > 0$, 要使 $\left| \frac{n^2-2}{n^2+n+1} - 1 \right| = \frac{n+3}{n^2+n+1} < \frac{2}{n} < \epsilon$ 成立, 即 $n > \frac{2}{\epsilon}$, 取 $N = \left[\frac{2}{\epsilon} \right]$, 可见, $\forall \epsilon > 0, \exists N = \left[\frac{2}{\epsilon} \right]$, 当 $n > N$ 时, 有 $\left| \frac{n^2-2}{n^2+n+1} - 1 \right| < \epsilon$ 成立, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2-2}{n^2+n+1} = 1.$

15. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^k} + \frac{2}{n^k} + \cdots + \frac{n}{n^k} \right)$ (k 为常数).

解
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^k} + \frac{2}{n^k} + \cdots + \frac{n}{n^k} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n^{k-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n^{k-2}} = \begin{cases} \infty, & k < 2, \\ \frac{1}{2}, & k = 2, \\ 0, & k > 2. \end{cases}$$

16. (1) 设 $x_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \cdots + \frac{1}{4n^2-1}$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$;

(2) 设 $x_n = \frac{1}{n^2+1} + \frac{2}{n^2+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n}$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

解 (1) 因为 $x_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \cdots + \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$
 $= \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) \right]$
 $= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1}\right),$

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}.$

(2) 因为

$$x_n = \frac{1}{n^2+1} + \frac{2}{n^2+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n} \leq \frac{1}{n^2+1} + \frac{2}{n^2+1} + \cdots + \frac{n}{n^2+1} = \frac{n(n+1)}{2(n^2+1)},$$

$$x_n = \frac{1}{n^2+1} + \frac{2}{n^2+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n} \geq \frac{1}{n^2+n} + \frac{2}{n^2+n} + \cdots + \frac{n}{n^2+n} = \frac{n(n+1)}{2(n^2+n)},$$

而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{2(n^2+1)} = \frac{1}{2}, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{2(n^2+n)} = \frac{1}{2}$, 由夹逼定理, 所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2+1} + \frac{2}{n^2+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n} \right) = \frac{1}{2}.$$

17. 利用数列极限存在准则(夹逼定理)证明:

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \frac{1}{n}} = 1;$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 2^n + 3^n)^{\frac{1}{n}} = 3.$

解 (1) 由于 $1 < \sqrt{1 + \frac{1}{n}} < 1 + \frac{1}{n}$, 而 $\lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$, 由夹逼定理, 所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \frac{1}{n}} = 1.$$

(2) 由于 $3 = (3^n)^{\frac{1}{n}} < (1 + 2^n + 3^n)^{\frac{1}{n}} < (3 \cdot 3^n)^{\frac{1}{n}} = 3^{\frac{n+1}{n}} = 3 \cdot \sqrt[n]{3}$, 而 $\lim_{n \rightarrow \infty} 3 = 3, \lim_{n \rightarrow \infty} 3 \cdot \sqrt[n]{3} = 3$, 由夹逼定理, 因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 2^n + 3^n)^{\frac{1}{n}} = 3.$

18. 设数列 $\{a_n\}: \sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \cdots, \sqrt{2+a_{n-1}}, \cdots$, 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 存在, 并求此极限值.

解 先证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 存在:

(1) 显然 $\{a_n\}$ 单调增加, 即 $a_n < a_{n+1}$ 成立;

(2) 再证明数列 $\{a_n\}$ 有界. 因为

$$a_1 = \sqrt{2} < 2, a_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}} = \sqrt{2+a_1} < \sqrt{2+2} = 2, \cdots,$$

故 $a_n < 2$, 即数列 $\{a_n\}$ 有上界.

由单调有界数列必有极限, 得 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 存在, 不妨设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$, 下面求出 A .

由 $a_n = \sqrt{2+a_{n-1}}$, 两边取极限得 $A = \sqrt{2+A}$, 即 $A^2 - A - 2 = 0$, 解得 $A = 2$, 或 $A = -1$. 根据收敛数列的保号性的推论可知 A 大于零, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2.$

19. 设 $x_1 = 1$, $x_n = \sqrt{2x_{n-1}}$, 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 并求此极限值.

解 先证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在:

(1) 用数学归纳法证明数列 $\{x_n\}$ 单调增加. $x_1 = 1$, $x_2 = \sqrt{2x_1} = \sqrt{2}$, 显然 $x_1 < x_2$; 假设 $x_{k-1} < x_k$ 成立, 于是

$$x_k - x_{k+1} = \sqrt{2x_{k-1}} - \sqrt{2x_k} < 0,$$

即 $x_k < x_{k+1}$ 成立; 故数列 $\{x_n\}$ 单调增加, 即 $x_n < x_{n+1}$ 成立.

(2) 再证明数列 $\{x_n\}$ 有界. 因为

$$x_1 = 1 < 2, x_2 = \sqrt{2x_1} < \sqrt{2 \cdot 2} = 2, \dots,$$

故 $x_n < 2$, 即数列 $\{x_n\}$ 有上界.

由单调有界数列必有极限, 得 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 不妨设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$, 下面求出 A . 由 $x_n = \sqrt{2x_{n-1}}$, 两边取极限得 $A = \sqrt{2 \cdot A}$, 即 $A^2 - 2A = 0$, 解得 $A = 2$, 或 $A = 0$. 根据收敛数列的保号性的推论可知 A 大于零, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2$.

20. 设 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{1+x^n}$ ($x > 0$), 求 $f(x)$.

$$\text{解 } f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{1+x^n} = \begin{cases} 0, & 0 < x < 1, \\ \frac{1}{2}, & x = 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

21. 用函数极限的定义验证:

$$(1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} = 0;$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x+1}{2x+1} = \frac{3}{2};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 3} (3x-1) = 8;$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{1-4x^2}{2x+1} = 2.$$

解 (1) $\forall \varepsilon > 0$, 要使 $\left| \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{x}} < \varepsilon$, 即 $x > \frac{1}{\varepsilon^2}$, 取 $M = \frac{1}{\varepsilon^2}$, 可见, $\forall \varepsilon > 0, \exists M = \frac{1}{\varepsilon^2}$, 当 $x > M$ 时, 有 $\left| \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \right| < \varepsilon$ 成立, 所以 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} = 0$.

(2) $\forall \varepsilon > 0$, 要使

$$\left| \frac{3x+1}{2x+1} - \frac{3}{2} \right| = \frac{1}{2|(2x+1)|} < \frac{1}{2(2|x|-1)} < \varepsilon,$$

即 $|x| > \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2\varepsilon} + 1 \right)$, 取 $M = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2\varepsilon} + 1 \right)$, 可见, $\forall \varepsilon > 0, \exists M = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2\varepsilon} + 1 \right)$, 当 $|x| > M$ 时, 有 $\left| \frac{3x+1}{2x+1} - \frac{3}{2} \right| < \varepsilon$ 成立, 所以 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x+1}{2x+1} = \frac{3}{2}$.

(3) $\forall \varepsilon > 0$, 要使 $|(3x-1)-8| = 3|x-3| < \varepsilon$, 取 $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$, 可见, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \frac{\varepsilon}{3}$, 当 $0 < |x-3| < \delta$ 时, 有 $|(3x-1)-8| < \varepsilon$ 成立, 所以 $\lim_{x \rightarrow 3} (3x-1) = 8$.

(4) 本题 $f(x) = \frac{1-4x^2}{2x+1}$ 在 $x = -\frac{1}{2}$ 处没有定义, 但不影响函数在该点极限存在.

$\forall \varepsilon > 0$, 要使 $\left| \frac{1-4x^2}{2x+1} - 2 \right| = |2x+1| = 2 \left| x + \frac{1}{2} \right| = 2 \left| x - \left(-\frac{1}{2} \right) \right| < \varepsilon$, 取 $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, 可见,
 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \frac{\varepsilon}{2}$, 当 $0 < \left| x - \left(-\frac{1}{2} \right) \right| < \delta$ 时, 有 $\left| \frac{1-4x^2}{2x+1} - 2 \right| < \varepsilon$ 成立, 所以 $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{1-4x^2}{2x+1} = 2$.

22. 设 $f(x) = \frac{|x-1|}{x-1}$, 求 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

解 本题 $f(x) = \begin{cases} -1, & x < 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$ 在 $x=1$ 处左右两侧 $f(x)$ 的表达式不同, 故求 $x=1$ 处的极限, 需考虑左右极限.

而 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (-1) = -1$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 1 = 1$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$, 所以 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 不存在.

23. 设 $f(x) = \begin{cases} e^x, & x \leq 0, \\ x^2+1 & 0 < x < 1, \\ 2x+1 & x \geq 1. \end{cases}$ 求: (1) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$; (2) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$; (3) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

解 (1) 本题在 $x=0$ 和 $x=1$ 处左右两侧 $f(x)$ 的表达式不同, 故求 $x=0$ 和 $x=1$ 处的极限, 需考虑左右极限.

而 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^x = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2+1) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$, 所以 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$.

(2) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2+1) = 2$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x+1) = 3$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$, 所以 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 不存在.

(3) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (2x+1) = 5$.

24. $f(x) = \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x-1}}}$, 求 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

解 本题 $f(x)$ 中含有特殊函数 $e^{\frac{1}{x-1}}$, 故求 $x=1$ 处的极限, 需考虑左右极限. 由于 $\lim_{x \rightarrow 1^-} e^{\frac{1}{x-1}} = 0$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} e^{\frac{1}{x-1}} = \infty$, 因此

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x-1}}} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x-1}}} = 0,$$

得 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$, 故 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 不存在.

25. 利用函数极限存在准则(夹逼定理)证明:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[n]{1+x} = 1; \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0^+} x \left[\frac{1}{x} \right] = 1.$$

解 (1) 由于是求 $x \rightarrow 0$ 的极限, 故可设 $-1 < x < 1$. 当 $x > 0$ 时, 有 $1 < \sqrt[n]{1+x} < 1+x$; 当 $x < 0$ 时, 有 $1+x < \sqrt[n]{1+x} < 1$, 而 $\lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x) = 1$, 由夹逼定理, 所以 $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[n]{1+x} = 1$.

(2) 因为求 $x \rightarrow 0^+$ 的极限, 又 $\frac{1}{x} - 1 < \left[\frac{1}{x} \right] \leq \frac{1}{x}$, 当 $x > 0$ 时, 有 $x \left(\frac{1}{x} - 1 \right) < x \left[\frac{1}{x} \right] \leq 1$, 而 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \left(\frac{1}{x} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1-x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1$, 由夹逼定理, 所以 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \left[\frac{1}{x} \right] = 1$.

26. 计算下列极限:

$$(1) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt[3]{x+5}-2}{x-3};$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right);$$

$$(5) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}\right);$$

$$(6) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2}\right);$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-1}{2x^2-x+1};$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+x}{x^3-3x^2+5};$$

$$(9) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n});$$

$$(10) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3}\right);$$

$$(11) \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{2\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}}\right);$$

$$(12) \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + x\sqrt{x^2+2}).$$

解 (1) 原式 $\stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{h \rightarrow 0} (2x+h) = 2x.$

(2) 原式 $\stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 4} (\sqrt{x}+2) = 4.$

(3) 令 $\sqrt[3]{x+5} = t$, 则 $x = t^3 - 5$, 原式 $= \lim_{t \rightarrow 2} \frac{t-2}{t^3-8} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{t \rightarrow 2} \frac{1}{t^2+2t+2} = \frac{1}{12}.$

(4) 原式 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)}{1 - \frac{1}{2}} = 2.$

(5) 原式 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$

(6) 原式 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(1+n)n}{2}}{n^2} = \frac{1}{2}.$

(7) 原式 $\stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}.$

(8) 原式 $\stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^3} = 0.$

(9) 原式 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n}+\sqrt{n}} = 1.$

(10) 原式 $\stackrel{\frac{\infty-\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+x-2}{1-x^3} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x+2)}{1+x+x^2} = -1.$

(11) 原式 $\stackrel{\frac{\infty-\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x}{x(\sqrt{x}-1)} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1}{\sqrt{x}-1} = 1.$

(12) 令 $x = -t$, 则原式 $= \lim_{t \rightarrow +\infty} (t^2 - t\sqrt{t^2+2})$, 再令 $t = \frac{1}{u}$,

原式 $\stackrel{\frac{\infty-\infty}{\infty}}{=} \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{1 - \sqrt{1+2u^2}}{u^2} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{-2}{1 + \sqrt{1+2u^2}} = -1.$

27. 若 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x+1} - ax - b \right) = 0$, 求 a, b 的值.

解 由左边 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1-a)x^2 - (a+b)x + (1-b)}{x+1} = 0$, 得 $\begin{cases} 1-a=0, \\ a+b=0, \end{cases}$ 故 $a=1, b=-1$.

28. 计算下列极限:

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} x \cot x$;

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \arcsin x}{3x}$;

(3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2+5}{5x+3} \sin \frac{2}{x}$;

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \sin \frac{x}{2^n}$ (x 为不等于零的常数);

(5) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{\pi - x}$;

(6) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sqrt{1-\cos x}}$;

(7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin 2x}{x + \sin 3x}$;

(8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sin x}$;

(9) $\lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{\frac{2}{x}}$;

(10) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}-1}$;

(11) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1+x}{x}\right)^{2x}$;

(12) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 + \cos x)^{2 \sec x}$;

(13) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + xe^x)^{\frac{1}{x}}$;

(14) 确定 c , 使 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+c}{x-c}\right)^x = 9$;

(15) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x[\ln(x+1) - \ln x]$;

(16) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{n^2+1}}{n+1}\right)^n$.

解 (1) 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\sin x} \cdot \cos x\right) = 1$.

(2) 令 $\arcsin x = t$, 则 $x = \sin t$, 原式 $= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2t}{3 \sin t} = \frac{2}{3}$.

(3) 令 $\frac{2}{x} = t$, 则 $x = \frac{2}{t}$, 原式 $= \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{12+5t}{10+3t} \cdot \frac{\sin t}{t}\right) = \frac{6}{5}$.

(4) 原式 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[x \cdot \frac{\sin \frac{x}{2^n}}{\frac{x}{2^n}} \right] = x$.

(5) 原式 $= \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(\pi-x)}{\pi-x} = 1$.

(6) 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sqrt{2 \sin^2 \frac{x}{2}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sqrt{2} \sin \frac{x}{2}} = \sqrt{2} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} = \sqrt{2}$.

(7) 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{\sin 2x}{x}}{1 + \frac{\sin 3x}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 2 \frac{\sin 2x}{2x}}{1 + 3 \frac{\sin 3x}{3x}} = -\frac{1}{4}$.

(8) 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\sin x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x}+1}\right) = \frac{1}{2}$.

(9) 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{\frac{2}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \{[(1+(-x))^{\frac{1}{-x}}]^{-2}\} = e^{-2}$.

$$(10) \text{ 原式} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{-2}{x}\right)^{\frac{x}{2}} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^{-1} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \left[\left(1 + \frac{-2}{x}\right)^{-\frac{x}{2}} \right]^{-1} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^{-1} \right\} = e^{-1}.$$

$$(11) \text{ 原式} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \right]^2 = e^2.$$

$$(12) \text{ 原式} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} [(1 + \cos x)^{\frac{1}{\cos x}}]^2 = e^2.$$

$$(13) \text{ 原式} = \lim_{x \rightarrow 0} [(1 + xe^x)^{\frac{1}{xe^x}}]^{e^x} = e.$$

$$(14) \text{ 左边} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{2c}{x-c}\right)^{\frac{x-c}{2c}} \right]^{\frac{2cx}{x-c}} = e^{2c}, \text{ 故 } e^{2c} = 9, \text{ 得 } c = \ln 3.$$

$$(15) \text{ 左边} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{x+1}{x} \right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = \ln e = 1.$$

$$\begin{aligned} (16) \text{ 原式} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{n^2+1}}{n+1} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\sqrt{n^2+1} - n - 1}{n+1} \right)^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-2n}{(n+1)\sqrt{n^2+1} + n + 1} \right)^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{-2n}{(n+1)\sqrt{n^2+1} + n + 1} \right)^{\frac{(n+1)(\sqrt{n^2+1} + n + 1)}{-2n}} \right]^{\frac{-2n}{(n+1)(\sqrt{n^2+1} + n + 1)}} = e^{-1}. \end{aligned}$$

29. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 确定无穷小 $\sqrt{a+x^3} - \sqrt{a}$ ($a > 0$) 对于 x 的阶数.

解 因为 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{a+x^3} - \sqrt{a}}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{a+x^3} + \sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$; 所以, 当 $x \rightarrow 0$ 时, 无穷小 $\sqrt{a+x^3} - \sqrt{a}$ ($a > 0$) 是 x 的三阶无穷小.

30. 若当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sqrt{1+ax^2} - 1$ 与 $\sin^2 x$ 为等价无穷小量, 求 a 的值.

解 因为当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sqrt{1+ax^2} - 1 \sim \frac{ax^2}{2}$, $\sin^2 x \sim x^2$, 故

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+ax^2} - 1}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{ax^2}{2}}{x^2} = \frac{a}{2} = 1, \text{ 得 } a = 2.$$

31. 计算下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^3+1} \sin \frac{1}{x}; \quad (2) \lim_{x \rightarrow 2} (x^2-4) \sin \frac{1}{x-2};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cos \frac{1}{x}}{\sin x}; \quad (4) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + \sin x}{x - \sin x};$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x-1}{x^3 \sin \frac{1}{x^2}}; \quad (6) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x});$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow a} \sin \frac{x-a}{2} \tan \frac{\pi x}{2a}; \quad (8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \tan x}{(\sqrt[3]{1+x^2} - 1)(\sqrt{1+\sin x} - 1)}.$$

解 (1) 因为当 $x \rightarrow \infty$ 时, $\frac{1}{x} \rightarrow 0$, 故 $\frac{x^2}{x^3+1} \sim \frac{1}{x}$, $\sin \frac{1}{x} \sim \frac{1}{x}$, 所以

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^3+1} \sin \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = 0.$$