



21世纪数学教育信息化精品教材



高职高专数学立体化教材

线性代数与概率统计

(经管类·高职高专版·第三版)

◎ 吴赣昌 主编



 中国人民大学出版社



Math

21世纪数学教育信息化精品教材

高职高专数学立体化教材

线性代数与概率统计

(经管类·高职高专版·第三版)

◎ 吴赣昌 主编

中国人民大学出版社

· 北京 ·

图书在版编目 (CIP) 数据

线性代数与概率统计 (经管类·高职高专版)/吴赣昌主编. —3 版. —北京: 中国人民大学出版社, 2011. 7

21 世纪数学教育信息化精品教材. 高职高专数学立体化教材
ISBN 978-7-300-13994-4

I. ①线… II. ①吴… III. ①线性代数-高等职业教育-教材②概率论-高等职业教育-教材③数理统计-高等职业教育-教材 IV. ①O151. 2②O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2011) 第 129272 号

21 世纪数学教育信息化精品教材
高职高专数学立体化教材
线性代数与概率统计 (经管类·高职高专版)

第三版

吴赣昌 主编

Xianxing Daishu yu Gailü Tongji

出版发行	中国人民大学出版社		
社 址	北京中关村大街 31 号	邮政编码	100080
电 话	010-62511242 (总编室)	010-62511398 (质管部)	
	010-82501766 (邮购部)	010-62514148 (门市部)	
	010-62515195 (发行公司)	010-62515275 (盗版举报)	
网 址	http://www.crup.com.cn http://www.ttrnet.com (人大教研网)		
经 销	新华书店		
印 刷	北京东君印刷有限公司	版 次	2007 年 3 月第 1 版
规 格	170 mm×228 mm 16 开本		2011 年 12 月第 3 版
印 张	16.25 插页 1	印 次	2011 年 12 月第 1 次印刷
字 数	293 000	定 价	32.80 元(配网络学习空间)

版权所有 侵权必究 印装差错 负责调换

前 言

大学数学是自然科学的基本语言，是应用模式探索现实世界物质运动机理的主要手段。对于大学非数学专业的学生而言，大学数学的教育，其意义不仅仅是学习一种专业的工具而已。中外大量的教育实践事实充分显示了：优秀的数学教育，是一种人的理性的思维品格和思辨能力的培育，是聪明智慧的启迪，是潜在的能动性与合作力的开发，其价值是远非一般的专业技术教育所能相提并论的。

随着我国高等教育自 1999 年开始迅速扩大招生规模，至 2009 年的短短十年间，我国高等教育实现了从精英教育到大众化教育的过渡，走完了其它国家需要三五十年甚至更长时间才能走完的道路。教育规模的迅速扩张，给我国的高等教育带来了一系列的变化、问题与挑战，如大众化教育阶段入学群体的多样化问题、学生规模扩张带来的大班和多班教学问题、由于院校合并导致的“一校多区”及由此产生的教学管理不科学以及师生间交流缺乏等问题，这些都是过去“精英教育”阶段没有遇到的。

进入大众化教育阶段，大学数学的教育问题首当其冲受到影响。过去大学数学教育是面向少数精英的教育，由于学科的特点，数学教育呈现几十年、甚至上百年一贯制，仍处于经典状态。当前大学数学课程的教学效果不尽如人意，概括起来主要表现在以下两方面：一是教材建设仍然停留在传统模式上，未能适应新的社会需求。传统的大学数学教材过分追求逻辑的严密性和理论体系的完整性，重理论而轻实践，剥离了概念、原理和范例的几何背景与现实意义，导致教学内容过于抽象，也不利于与其它课程及学生自身专业的衔接，进而造成了学生“学不会，用不了”的尴尬局面；二是计算机技术迅猛发展的今天，信息化技术本应给数学教育提供空前广阔的天地，但遗憾的是，在数学教育领域，信息化技术的使用远没有在其它领域活跃。正如我国著名数学家张景中院士所指出的，计算机进入数学教育在国内还只是刚刚起步，究其原因有两方面：一是没有充分考虑把信息化技术和数学教学的学科特点结合起来；二是在强调教育技术的同时没有充分发挥教师的作用，这样就难以把信息化技术和数学教学完美结合起来。

关于大学数学教育改革的出路问题，在此，我们引用教育部数学基础课程教学指导分委员会前主任、清华大学数学系冯克勤教授专门撰文所指出的一句话：“数学教育的关键是彻底转变观念。”当前大学数学教学所面临的问题，实际上已经指出了大学数学教育改革的目標：一是深化教学内容和教材体系的改革；二是积极推进大学数学教育信息化建设。

自 2000 年初起，我们成立了一个由专家、教师与软件技术人员组成的研发团队，围绕上述改革目标进行攻关，2002 年推出了第一个“高等数学多媒体教学系统”；2005 年由中国人民大学出版社出版了 12 套面向普通本科院校理工类与经管类专业使用的“大学数学立体化教材”及其配套的多媒体教学系统；2007 年对其修订后出版了第二版，并同时出版了面向高职高专院校和文科类专业的立体化教材及其配套的多媒体教学系统，初步完成了大学数学试题库系统与大学数学精品课程网站等信息化配套建设工作；2009 年对上述教材完成了进一步的升级改版工作，并同时出版了农林类与医药类的教材，鉴于教材的立体化与信息化配套建设显著加强，为更加突出教材的特色和内涵，我们将上述系列教材统一冠名为“21 世纪数学教育信息化精品教材”。令人感到欣慰的是，上述教材及其信息化建设成果已被国内数百所高等院校广泛采用，并对当前大学数学的教育改革起到了积极的推动作用。

2009 年以来，作者团队彻底突破了制约当前教育信息化建设的技術瓶颈——基于 Web 的公式与图形的在线编辑、复制、粘贴、修改、搜索与识别问题。这一核心技术的突破使我们的各项信息化建设有了质变的跨越，集成了网页公式编辑系统（Web-FormulaEdit）与网页图形编辑系统（Web-GraphEdit）的在线答疑平台、在线测试平台、课程论坛平台、师生互动平台以及集成性的网络学习平台陆续完成并投入使用。将这些最新研究与建设的成果及时融入上述系列教材的建设是此次升级改版的动因。

2011 年，“21 世纪数学教育信息化精品教材”升级改版后，共计 27 套各专业类别的大学数学教材，版本分别有：面向普通本科院校的“理工类·第四版”、“经管类·第四版”、“文科类·第三版”、“农林类·第二版”、“医药类·第二版”；面向三本院校或少学时类的“理工类·简明版·第四版”、“经管类·简明版·第四版”；面向高职高专院校的“理工类·第三版”、“经管类·第三版”、“综合类·第二版”。

本次升级改版后的“21 世纪数学教育信息化精品教材”具有以下特点：

一、在教学内容建设方面：

1. 为让读者对经典数学概念在现代科学研究中的应用有更深刻的理解和更高的视角，我们做了深入的研究和建设工。例如，从微分的几何意义出发，引入了

函数在某点的“线性化”定义，从定积分的微元法出发，进一步引入有限单元化的思想，而有限单元化和线性化是用数学解决复杂应用问题的基本思想方法。不同课程教材的内容建设前后呼应，比如，在《线性代数（理工类·第四版）》第3章的引言中就进一步介绍了如何利用有限单元化和线性化方法来解决复杂应用问题，等等。

2. 对部分章节引言做了改进。例如，对数列极限的概念，先从其描述性定义引入，然后以定量分析的观点进一步给出数列极限的严格定义，这样的安排既符合数学发展的本源，又利于学生更好地理解极限的概念。更多参考包括数学建模——函数关系建立、函数连续性、数学建模——最优化、矩阵、线性方程组等章节的引言，这些引言对于学生理解即将学习的数学内容的实质能起到重要的作用。

3. 紧密联系实际，服务专业课程，精选了不少只涉及基本数学知识、能体现数学建模精神、能吸引学生且学生以后又可能接触到的应用范例和数学建模问题，如函数模型的建立及其应用，作为变化率的导数在几何学、物理学、经济学和医药学中的应用，最优化方法及其在工程、经济、农业、医药领域中的应用，逻辑斯蒂模型及其在人口预测、新产品的推广模型与经济增长预测方面的应用，网络流模型及其应用，人口迁移模型及其应用，常用概率模型及其应用，等等，并为所有应用范例配备了相应的应用习题。这些实际应用范例既为学生理解数学的抽象概念提供了认识基础，也有助于加强与后续专业课程的联系。

4. 习题调整方面，除前面提到的补充了不少应用习题外，还在难度梯度上对习题进行了调整，尤其是增补了部分计算比较简单又利于加强概念理解的习题，并重新校订了全部习题及其答案。

5. 值得一提的还有，在《高等数学》与《微积分》中插入了历史上对数学（尤其是近代数学）有杰出贡献的八位伟大数学家的简介，从他们的身上既能管窥近代数学发展的基本过程，又能领略数学家坚韧不拔地追求真理的人格魅力和科学精神。

二、每本教材均配有网络账号，通过它可登录作者团队为用户专门设立的网络学习空间，与来自全国的良师益友在线交流与讨论学习中遇到的问题。网络学习空间设置了课程论坛、学习问答、软件下载、教学视频、名师导学、教学博客、科学搜索等栏目。该学习空间由于集成了数苑网页公式编辑系统与网页图形编辑系统，支持公式与图形的在线编辑、复制、粘贴、修改、搜索与识别，从而全面支持专业学科内容的网络交流与互动。

三、为每位教材用户提供配套的集成性、交互式多媒体学习软件，其中设计了多媒体教案、习题详解、综合训练、实验教学等功能模块。在多媒体教案模块中，我们按动态仿真教学方式设计了大量的教学动画，直击数学思想本质，利于突破学习中的重点和难点，同时可以大大减少课堂教学中的笔记工作量；在习题详解模块

中,我们以多媒体动画的形式给出了习题的求解过程和相关方法,利于读者课后学习;在综合训练模块中,我们总结了每章的教学知识点,并通过精选的总习题进一步揭示解题的一般规律和技巧,利于读者综合提高;在系统的交互与集成方面,我们利用多媒体开发软件的网页特性,为系统中的每个文件提供了丰富的知识点交互与导航,利于读者高效率地学习。

四、为所有教师用户提供配套的集成性、交互式与信息资源立体化的多媒体教学系统,该系统同时兼容了 Flash 和 PPT 两类课件,兼顾了共享动画演示和个性化修改功能。内容模块中包括了多媒体教案、备课系统、习题解答、综合训练、实验教学与实验案例库等;系统功能中包括了长期开发积累的满足专业教学需求的多媒体教学动画演示功能、供教师在教学过程中进行手写板书的手写笔功能、供教师在教学过程中进行知识点交互和数学家介绍的系统导航功能等。如能配合遥控器与手写板等外接小型设备,则既可以充分发挥信息化集成与交互教学的优势,也能够很好地融入板书教学等个性化特色。

五、配套建设了技术领先、功能实用且管理维护方便的大学数学网络学习平台,它包含自主建设、课程问答、师生互动与在线测试等模块。此外,作者团队还建设了在线答疑平台 MathQ、试题库系统平台、课程论坛平台、教学博客平台等一系列软件平台,它们均集成了数苑网页公式编辑系统与网页图形编辑系统,支持课程教学内容的网络交流与互动。

六、在教学资源建设、共享与服务方面,以作者为核心的“数苑团队”倾力建设了面向全国广大师生服务的教育门户网站——“数苑网”(www.math168.com),旨在为广大师生提供数学教育资讯、网络教学资源、网络教学平台以及教学支持服务,打造移动学习、全民学习与终生学习的共享教育平台。

致学生

在你进入高校即将学习的所有大学课程中,就巩固你的学习基础、提升你的学习能力、培养你的科学素质和创新能力而言,大学数学是最有用且最值得你努力的课程。事实上,像《微积分》、《线性代数》、《概率论与数理统计》这些大学数学基础课程,无论怎样评价其重要性都不为过,而学好这些大学数学基础课程,你将受益终生。

主动把握好从“学数学”到“做数学”的转变,这一点在大学数学的学习中尤为重要,不要以为你在课堂教学过程中听懂了就等于学到了,事实上,你需要在课后花更多的时间主动去做相关训练才能真正掌握所学知识。

在大学数学的学习过程中,概念和计算同等重要。只有反复、认真地阅读教材,你才能真正掌握大学数学的基本概念。每个章节的习题中都安排了简单的计算

题，目的是帮助你检查对基本算法的理解，在做习题时，你应先尝试独立完成习题，尽量不看答案，便于发现哪些知识自己还没有真正理解。在今后的工作中，你当然可以使用计算机来完成这些计算，但你必须学会选择算法，理解计算结果的意义并且向他人解释清楚。

从某种意义上说，大学数学就是一门语言——科学的语言。你必须像对待外语一样，每天都学习它。为了真正理解教材中某一部分的内容，你往往需要完全掌握前面章节的内容和习题。跟上课程的进度可以节省很多时间并且避免很多麻烦。

经常登录作者团队倾力为你配套建设的网络学习空间，你将会获得意想不到的收获。在那里，你可以进一步拓展自己的学习空间，寻找到更多教材之外的学习资源，并与全国的良师益友建立联系。

致教师

我们开发的“21世纪数学教育信息化精品教材”是名副其实的信息化精品系列教材，因为在纸质教材之外，我们从教、学、考三方面为它定制了一系列配套的信息化建设，包括教学课件、备课系统、网络学习空间、网络学习平台、试题库系统、在线考试平台与在线答疑平台等。如果您和您的学生正在使用或准备使用本系列教材，请通过下面的邮箱与我们联系以取得相应的教学支持。

此外，欢迎尽早加入我们在“数苑网”建设的面向全国同行提供交流与服务的“教师空间”。该空间将为广大教师提供教学软件下载、教学资源下载、教学研究交流以及教学研究合作等服务。教师空间以实名制方式注册，有意愿加入的教师只需将单位、姓名与注册邮箱发送到下面的邮箱，我们便会尽快给您发送登录账户信息。教师空间的登录账号是教师专用的6位数字，它也是您登录我们开发的新一代即时通讯软件 MathQ 的账号。

MathQ 是我们开发的主要面向教育学习群体、学术研究群体与工程技术人员的新一代即时通讯软件。与同类即时通讯软件相比，该软件最大的特色是它集成了网页公式编辑系统 (Web-FormulaEdit) 与网页图形编辑系统 (Web-GraphEdit)，从而使其能全面支持人们基于文字、公式、图形、语音和视频等多种媒体进行各学科专业知识的在线交流。

经常登录作者团队倾力建设的教师空间，您将会获得意想不到的收获。在那里，您可以进一步拓展自己的教学交流空间，获得更多的教学资源，并与全国的良师益友建立联系。

结束语

正如美国《托马斯微积分》的作者 G. B. 托马斯 (G. B. Thomas) 教授精辟指

出的，“一套教材不能构成一门课；教师和学生在一起才能构成一门课”，教材只是支持这门课程的信息资源。教材是死的，课程是活的。课程是教师和学生共同组成的一个相互作用的整体，只有真正做到以学生为中心，处处为学生着想，并充分发挥教师的核心指导作用，才能使之成为富有成效的课程。而本系列教材及其配套的信息化建设将为教学双方提供支持其课程的充分的信息资源，帮助教师在教学过程中发挥其才华，并利于学生富有成效地学习。

与传统的教材不同的是，有一支实力雄厚、专业专职的作者团队——数苑团队在为本系列教材的使用者提供长期的、日常的教学服务与技术支持。如果在使用本系列教材及其配套的信息化建设过程中遇到任何问题，你可以通过下面的邮箱随时与我们联系：math168@vip.188.com。

编者

2011年6月28日

目 录

第一部分 线性代数

第 1 章 行列式

§ 1.1 行列式的定义	1
§ 1.2 行列式的性质	8
§ 1.3 克莱姆法则	14

第 2 章 矩阵

§ 2.1 矩阵的概念	19
§ 2.2 矩阵的运算	23
§ 2.3 逆矩阵	30
§ 2.4 分块矩阵	34
§ 2.5 矩阵的初等变换	38
§ 2.6 矩阵的秩	45

第 3 章 线性方程组

§ 3.1 消元法	49
§ 3.2 向量组的线性组合	56
§ 3.3 向量组的线性相关性	61
§ 3.4 向量组的秩	66
§ 3.5 线性方程组解的结构	70
§ 3.6 线性方程组的应用	76

第二部分 概率统计

第 4 章 随机事件及其概率

§ 4.1 随机事件	88
§ 4.2 随机事件的概率	93
§ 4.3 条件概率	98
§ 4.4 事件的独立性	104

第 5 章 随机变量及其分布

§ 5.1 随机变量	109
§ 5.2 离散型随机变量及其概率分布	111
§ 5.3 随机变量的分布函数	115
§ 5.4 连续型随机变量及其概率密度	118

§ 5.5 随机变量函数的分布	124
第 6 章 随机变量的数字特征	
§ 6.1 数学期望	127
§ 6.2 方差	131
第 7 章 数理统计的基础知识	
§ 7.1 数理统计的基本概念	137
§ 7.2 常用统计分布	143
§ 7.3 抽样分布	148
第 8 章 参数估计	
§ 8.1 点估计	153
§ 8.2 置信区间	161
第 9 章 假设检验	
§ 9.1 假设检验的基本概念	169
§ 9.2 单正态总体的假设检验	173
§ 9.3 双正态总体的假设检验	178
第 10 章 方差分析与回归分析	
§ 10.1 单因素试验的方差分析	186
§ 10.2 一元线性回归	192
附录 大学数学实验指导	
项目三 矩阵、向量组与线性方程组	203
实验 1 行列式与矩阵	203
实验 2 矩阵的秩与向量组的极大无关组	206
实验 3 线性方程组	209
项目四 数理统计	212
实验 1 统计数据	212
实验 2 区间估计	217
实验 3 假设检验	220
附表 常用分布表	
附表 1 常用的概率分布表	226
附表 2 泊松分布概率值表	227
附表 3 标准正态分布表	229
附表 4 t 分布表	230
附表 5 χ^2 分布表	232

附表 6 F 分布表	235
--------------	-----

习题答案

第 1 章 答案	239
第 2 章 答案	239
第 3 章 答案	241
第 4 章 答案	243
第 5 章 答案	244
第 6 章 答案	245
第 7 章 答案	245
第 8 章 答案	246
第 9 章 答案	247
第 10 章 答案	247

第一部分 线性代数

第1章 行列式

行列式实质上是由一些数值排列成的数表按一定的法则计算得到的一个数. 早在1683年与1693年, 日本数学家关孝和与德国数学家莱布尼茨就分别独立地提出了行列式的概念. 以后很长一段时期内, 行列式主要应用于对线性方程组的研究. 大约一个半世纪后, 行列式逐步发展成为线性代数的一个独立的理论分支. 1750年, 瑞士数学家克莱姆在他的论文中提出了利用行列式求解线性方程组的著名法则——克莱姆法则. 随后, 1812年, 法国数学家柯西发现了行列式在解析几何中的应用, 这一发现激起人们对行列式的应用进行探索的浓厚兴趣, 这种兴趣前后持续了近100年.

在柯西所处的时代, 人们讨论的行列式的阶数通常很小, 行列式在解析几何以及数学的其它分支中都扮演着很重要的角色. 如今, 由于计算机和计算机软件的发展, 在常见的高阶行列式计算中, 行列式的数值意义已经不大. 但是, 行列式公式依然可以给出构成行列式的数表的重要信息. 在线性代数的某些应用中, 行列式的知识依然很有用. 特别是在本课程中, 行列式是研究后面的线性方程组、矩阵及向量组的线性相关性的一种重要工具.

§1.1 行列式的定义

二阶行列式与三阶行列式的内容在中学课程中已经涉及, 本节主要对这些知识进行复习与总结, 归纳给出 n 阶行列式的定义, 并介绍了三种特殊的行列式, 即上三角行列式、下三角行列式和对角行列式.

一、二阶行列式的定义

记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 表示代数和 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, 称为二阶行列式, 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

其中数 a_{11} , a_{12} , a_{21} , a_{22} 叫做行列式的元素, 横排叫做行, 竖排叫做列. 元素 a_{ij} 的第一个下标 i 叫做行标, 表明该元素位于第 i 行, 第二个下标 j 叫做列标, 表明该元素位于第 j 列. 由上述定义可知, 二阶行列式是由 4 个数按一定的规律运算所得的代数和. 这个规律性表现在行列式的记号中就是“对角线法则”. 如图 1-1-1 所示, 把 a_{11} 到 a_{22} 的实连线称为主对角线, 把 a_{12} 到 a_{21} 的虚连线称为副对角线, 于是, 二阶行列式便等于主对角线上两元素之积减去副对角线上两元素之积.

图 1-1-1

下面, 我们利用二阶行列式的概念来讨论二元线性方程组的解.

设有二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 & (1.1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 & (1.2) \end{cases}$$

式(1.1) $\times a_{22}$ - 式(1.2) $\times a_{12}$, 得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}. \quad (1.3)$$

式(1.2) $\times a_{11}$ - 式(1.1) $\times a_{21}$, 得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21}. \quad (1.4)$$

利用二阶行列式的定义, 记

$$D = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

$$D_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

则式(1.3)、式(1.4)可改写为

$$Dx_1 = D_1, \quad Dx_2 = D_2.$$

于是, 在系数行列式 $D \neq 0$ 的条件下, 式(1.1)、式(1.2)有唯一解:

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}.$$

例 1 解方程组 $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 8 \\ x_1 - 2x_2 = -3 \end{cases}$.

解 $D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 2 \times (-2) - 3 \times 1 = -7,$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 8 & 3 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = 8 \times (-2) - 3 \times (-3) = -7,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 2 \times (-3) - 8 \times 1 = -14,$$

因 $D \neq 0$, 故题设方程组有唯一解:

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-7}{-7} = 1, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-14}{-7} = 2. \quad \blacksquare$$

二、三阶行列式的定义

类似地, 我们定义三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

将上式右端按第一行的元素提取公因子, 可得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \\ = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \quad (1.5)$$

式(1.5)具有两个特点:

- (1) 三阶行列式可表示为第一行元素分别与一个二阶行列式乘积的代数和;
- (2) 元素 a_{11}, a_{12}, a_{13} 后面的二阶行列式是从原三阶行列式中分别划去元素 a_{11}, a_{12}, a_{13} 所在的行与列后剩下的元素按原来顺序所组成的, 分别称其为元素 a_{11}, a_{12}, a_{13} 的余子式, 记为 M_{11}, M_{12}, M_{13} , 即

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

令 $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, 称其为元素 a_{ij} 的代数余子式.

于是, 式(1.5)也可以表示为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = \sum_{j=1}^3 a_{1j}A_{1j}. \quad (1.6)$$

式(1.6)称为三阶行列式按第一行展开的展开式.

注: 根据上述推导过程, 读者也可以得到三阶行列式按其它行或列展开的展开式, 例如, 三阶行列式按第二列展开的展开式为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32} = \sum_{i=1}^3 a_{i2}A_{i2}. \quad (1.7)$$

此外,关于三阶行列式的上述概念也可以推广到更高阶的行列式中去.

例2 计算三阶行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \end{vmatrix}$.

解 按第一行展开,得

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \end{vmatrix} &= 1 \times A_{11} + 2 \times A_{12} + 3 \times A_{13} \\ &= 1 \times (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} + 2 \times (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} + 3 \times (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 1 \times 0 + 2 \times (-29) + 3 \times 0 = -58. \end{aligned}$$

注:读者可尝试将行列式按第二列展开进行计算.

类似于二元线性方程组的讨论,对三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix},$$

若系数行列式 $D \neq 0$, 则该方程组有唯一解:

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D}.$$

例3 解三元线性方程组 $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = -2 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$.

解 注意到系数行列式

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \times (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 2 \times (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + 1 \times (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 1 \times 2 - 2 \times 5 + 1 \times 3 = -5 \neq 0, \end{aligned}$$

同理,可得

$$D_1 = \begin{vmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -5, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -10, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -5,$$

故所求方程组的解为

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = 1, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = 2, \quad x_3 = \frac{D_3}{D} = 1. \quad \blacksquare$$

三、 n 阶行列式的定义

前面, 我们首先定义了二阶行列式, 并指出了三阶行列式可通过按行或列展开的方法转化为二阶行列式来计算. 一般地, 可给出 n 阶行列式的一种归纳定义.

定义 由 n^2 个元素 a_{ij} ($i, j=1, 2, \dots, n$) 组成的记号

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式, 其中横排称为行, 竖排称为列. 它表示一个由确定的递推运算关系所得到的数: 当 $n=1$ 时, 规定 $D_1 = |a_{11}| = a_{11}$; 当 $n=2$ 时,

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21};$$

当 $n > 2$ 时,

$$D_n = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n} = \sum_{j=1}^n a_{1j}A_{1j}. \quad (1.8)$$

其中 A_{ij} 称为元素 a_{ij} 的代数余子式, 且

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij},$$

这里 M_{ij} 为元素 a_{ij} 的余子式, 它为由 D_n 划去元素 a_{ij} 所在的行与列后余下的元素按原来顺序构成的 $n-1$ 阶行列式.

例如, 在四阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

中, 元素 a_{32} 的余子式和代数余子式为

$$M_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}, \quad A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = -M_{32}.$$