

高新技术专著系列

# Antennas of the Deep Space Survey

## 深空探测天线

杨可忠 著

- 深空探测天线——深空探测的关键技术
- 我国天线设计权威专家倾力力作
- 提出了一些新的设计方法和计算公式，可指导实际工程设计

 人民邮电出版社  
POSTS & TELECOM PRESS

高新技术专著系

Antennas of the  
Deep Space Survey

深空探测  
天线

杨可忠 著

人民邮电出版社

北京

ANTENNAS

## 图书在版编目 (C I P) 数据

深空探测天线 / 杨可忠著. — 北京 : 人民邮电出版社, 2014.1  
(高新技术专著系列)  
ISBN 978-7-115-22319-7

I. ①深… II. ①杨… III. ①空间探测—空间通信系统—天线 IV. ①V11②TN821

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第019921号

## 内 容 提 要

本书是一本关于深空探测天线技术的专著,详细讨论和研究了几何光学分析方法、物理光学分析方法、高斯模分析方法和焦平面场共轭匹配分析方法。书中还就波束波导的3种设计方法,即高通法、高斯波束法和高内率设计法进行了设计实例研究,给出了一些新颖的设计方法。书中也讨论了馈源设计技术、噪声温度计算技术以及全息法测量天线面形误差技术。

本书可供从事天线、馈源和微波技术研究和设计的工程技术人员及相关专业大学生和研究生阅读参考。

- 
- ◆ 著 杨可忠  
责任编辑 姚予疆 杨凌  
责任印制 杨林杰
  - ◆ 人民邮电出版社出版发行 北京市丰台区成寿寺路11号  
邮编 100164 电子邮件 315@ptpress.com.cn  
网址 <http://www.ptpress.com.cn>  
北京铭成印刷有限公司印刷
  - ◆ 开本: 700×1000 1/16  
印张: 18.75 2014年1月第1版  
字数: 352千字 2014年1月北京第1次印刷
- 

定价: 88.00 元

读者服务热线: (010)81055296 印装质量热线: (010)81055316  
反盗版热线: (010)81055315

# 前 言

2000年发布的《中国的航天》白皮书对深空探测给出了科学的定义：深空探测是指对太阳系内除地球外的行星及其卫星、小行星、彗星等的探测，以及太阳系外的银河系乃至整个宇宙的探测。

21世纪初这几年来的人类深空探测活动表明，深空探测已成为并将继续成为人类航天事业的新舞台。近些年来，在这一领域里呈现的特点是，深空探测活动正从发达国家向发展中国家扩展。目前在深空进行探测的探测器中，不但有由火星发回的大量高质量信息的美国“机遇号”、“勇气号”火星探测器，有落抵土星又成功释放惠更斯探测器飞抵土卫六的“卡西尼号”探测器，以及日本发射成功的月球探测器，也有中国的“嫦娥一号”探月器在绕月飞行，此外，印度的探月器也已发射。我国“嫦娥一号”月球探测器的成功发射和所取得的可喜成果，标志着我国深空探测的良好开端。开展对火星、小行星和其他太阳系内行星及其卫星的探测将是我国未来深空探测的目标。

作为人类深空探测的主要工具，深空探测天线是一项复杂的系统工程，涉及多方面的技术。本书所讨论和研究的只是深空探测天线电气技术，特别着重于电性能分析方法和电尺寸设计技术。

本书共分9章，分别详细研究了下列内容。

第1章详细讨论了几何光学法。几何光学法是人们最熟悉的分析和设计方法。对于深空探测天线，通常以几何光学方法为先导，设计出天线的电尺寸，进而针对不同的使用频段，再用更精确的分析和计算方法（例如高斯波束法和物理光学法）对其进行计算和分析，给出修正设计。第1章主要讨论了反射镜面的微波光学，由几何光学所推演出的波束波导中的对称转换准则，几何光学法计算反射镜的辐射场等问题。

物理光学法被认为是最精确的计算辐射特性的方法。第2章详细讨论了

物理光学法，即将反射镜表面用大量很小的三角形来代替，每个三角形小子域小到场点对该子域可认为是充分的远场点，子域上的电流幅度可认为是均匀的，以小三角形质心的电流所表征，而只计及子域各点对相位因子的影响。

鉴于采用波束波导馈电的深空探测天线越来越多，波束波导系统的设计和分析技术成为这类天线的关键技术。高斯模分析法在波束波导分析和设计中受到广泛的重视和研究，这是因为利用高斯模分析法，人们可对电磁波在波束波导中的传播特性获得直观、透彻的了解。第3章从基模高斯波束入手，详细研究了高斯波束的基本特性、主要特征参数、高斯波束的变换以及3种常用的高斯模的物理特性。在第3章中还研究了反射镜高斯波束参数的近似求解方法和高斯波束在波束波导中的传输特性的计算。针对被照射口径波长比  $D/\lambda$  特大时，利用基于近轴近似的高斯波束分析波分析其传输和辐射特性的精度将严重劣化这一技术困扰，本章还研究了高斯波束组法，即将馈源的辐射方向图展成一组高斯波束，而每一个高斯波束照射的反射镜局部表面都满足近轴近似条件。

多频段共用波束波导中，例如 S/X/Ka 三频段共用波束波导系统，对于低频段 S 频段，基于波束波导中的偏置反射镜所设计的馈源用以照射副反射镜，相位中心会产生很大的变化，反之亦然。针对这种情况，第4章探讨了利用焦平面场共轭匹配法解决这一问题的技术途径，即由入射在主反射镜上平面波所产生的场求出副反射镜表面的场，进而利用副反射镜表面的场求出过副反射镜顶点且垂直于副反射镜轴的平面上的场，将该平面上的场展成高斯波束，通过高斯波束在波束波导内的转换，进而求出最后一个偏置反射镜焦平面的场，再根据场的共轭匹配原理设计馈源。

第5章给出了多模馈源和波纹馈源的设计技术，主要讨论了各种高次模激励机构的模比计算和波纹喇叭的设计方法。

20 世纪 80 年代，人们将全息法引入到天线表面误差的测量领域。第 6 章详细介绍了全息法测量天线表面误差的基本原理、处理方法和最佳拟合抛物面的求解。

对于深空探测地球站，最主要的技术指标是品质因数  $G/T$  值，因此降低噪声温度成为深空探测天线的关键技术。第 7 章深入研究了波束波导中的噪声源及噪声温度的计算方法。

第 8 章是研究波束波导设计方法的章节，对目前流行的 3 种设计方法，即高通设计法、高斯波束设计法和高功率设计方法进行了全面深入的研究。这一章通过作者拟定的设计实例，给出实际设计演示，说明了各种设计方法的应用范围和局限性。并且，在研究高通设计法时，提出了波纹喇叭的新颖设计方法；在研究高斯波束设计法时，提出了高斯波束的腰部固定于两偏置反射镜中间的波束波导设计方法，同时也提出了利用高斯波束特性设计波纹喇叭的新方法；在研究高功率设计方法时，提出了控制波束波导输入高斯波束腰部位置的设计方法。

第 9 章研究了非波束波导馈电的深空探测天线，讨论了多频段共用天线的技术途径和非对称副反射面的赋形。

本书各章相对独立，自成体系，注重理论的系统性。书中提出了一些新的设计方法和计算公式，对实际工程设计是有用的。

限于作者水平，书中难免存在一些缺点和错误，敬请广大读者批评指正。

杨可忠

2009 年 12 月

# 目 录

## 第 1 章 几何光学法

1.1	概述	2
1.2	反射镜面的微波光学	2
1.2.1	反射镜表面的单位法线矢量	2
1.2.2	反射镜表面的斯耐尔定律	3
1.2.3	射束波前面积元和射束所截割的反射镜表面面积元之间的关系	4
1.2.4	多反射镜的射线描迹技术	5
1.3	波束波导中的对称转换原则	7
1.3.1	波束波导的对称转换准则	8
1.3.2	拓展的对称转换准则	8
1.3.3	对称转换波束波导系统中的等光程传输	9
1.4	卡塞格仑天线主、副反射镜的赋形	10
1.4.1	主、副反射镜几何及物理参数的确定	10
1.4.2	卡塞格仑天线的赋形	13
1.4.3	重新赋形副反射镜的技术	15
1.5	抛物面/抛物面型波束波导的几何光学分析	18
1.6	几何光学法计算反射镜的辐射场	20
1.6.1	E 模辐射场公式	20
1.6.2	朱兰成公式	23
1.6.3	几何光学法计算天线辐射特性的适用性	24
	参考文献	25

## 第2章 物理光学法

2.1 概述 .....	27
2.2 几何处理 .....	28
2.3 近似处理 .....	29
参考文献 .....	35

## 第3章 高斯模分析方法

3.1 概述 .....	37
3.2 近轴近似的波动方程解 .....	37
3.2.1 基模高斯波束解 .....	38
3.2.2 基模高斯波束的基本特点 .....	40
3.2.3 关于基模高斯波束的讨论 .....	40
3.3 高斯波束的变换 .....	44
3.3.1 传播通过一段空间距离 $d$ 的变换 .....	44
3.3.2 高斯波束的折射过程 .....	44
3.3.3 通过理想薄透镜的变换过程 .....	46
3.3.4 对称抛物面反射镜的反射变换 .....	47
3.3.5 球面反射镜的反射变换 .....	49
3.3.6 偏置角 $\theta_0 = \pi/2$ 的偏置抛物面天线的变换 .....	50
3.4 椭圆高斯波束 .....	52
3.5 高阶高斯模 .....	54
3.5.1 厄米—高斯波束 .....	55
3.5.2 拉盖尔—高斯波束 .....	58
3.6 常用的拉盖尔—高斯模 .....	61
3.6.1 基模 .....	61
3.6.2 $(0, 1)$ 模 .....	62
3.6.3 $(0, 2)$ 模 .....	63
3.7 高斯模法分析喇叭馈源的场 .....	64
3.7.1 平衡混合状态下的波纹馈源 .....	64
3.7.2 非平衡混合状态下的波纹喇叭 .....	67



3.8	高斯模法分析偏置抛物面反射镜 .....	68
3.8.1	偏置角为 $\theta_0$ 的偏置抛物面反射镜高斯波束的 变换机理 .....	68
3.8.2	偏置抛物面反射镜不对称性激励的高阶高斯模 .....	70
3.8.3	偏置抛物面反射镜的反射矩阵 .....	72
3.9	反射镜高斯波束参数的求解 .....	74
3.9.1	等效球面波法 .....	74
3.9.2	高斯模法同射线描述相结合的综合方法 .....	76
3.9.3	近似球面波法同射线描述法相结合的综合方法 .....	79
3.9.4	全高斯模处理方法 .....	80
3.9.5	薄透镜理论法 .....	82
3.10	用远场方向图表示馈源的高斯波束 .....	86
3.11	高斯波束组法 .....	88
3.11.1	方法的基本描述 .....	89
3.11.2	馈源辐射场的高斯波束展开式 .....	89
3.11.3	几何及物理参数的确定 .....	91
3.11.4	高斯波束模系数 $C_{1m}$ 的确定 .....	97
3.11.5	反射镜的反射场 .....	98
3.12	高斯模系数的确定 .....	106
3.12.1	有限空间电磁场高斯模展开式 .....	107
3.12.2	将反射镜上的表面电流展成高斯模场 .....	108
3.13	波束波导反射镜的截获效率 .....	109
3.13.1	第一枚反射镜的截获效率 .....	110
3.13.2	第二枚反射镜的截获效率 .....	111
3.13.3	高斯模的矢量模函数、标量模函数和模的单位 矢量 .....	114
3.14	波束波导系统中的交叉极化特性 .....	115
3.14.1	(0,0) 模与 (0,1) 模传输的相位差 .....	115
3.14.2	偏置镜的置位误差对交叉极化的影响 .....	116
3.14.3	波束波导系统的输出场 .....	118
3.15	波束波导中的差模传输特性 .....	120
	参考文献 .....	121

## 第4章

## 焦平面场共轭匹配法

4.1	概述 .....	124
4.2	平行于主反射镜孔径轴的平面来波在主反射镜表面所激励的场 ...	125
4.3	副反射镜表面的场 .....	126
4.4	过副反射镜顶点且与副反射镜轴 $e_z$ 垂直的平面内的场 .....	128
4.5	过 $V_s$ 且垂直于 $z$ 轴的平面的场高斯波束展开 .....	130
4.5.1	搜索法 .....	131
4.5.2	$V_s$ 平面场分布近似为高斯波束横向场分布法 .....	132
4.6	焦平面场的处理 .....	134
4.7	关于偏置椭球反射镜高斯模的处理 .....	137
4.7.1	偏置抛物面反射镜与偏置椭球面反射镜的几何关系 .....	138
4.7.2	偏置椭球面反射镜的薄透镜方程 .....	138
4.8	副反射镜上的表面电流展成高斯波束 .....	142
	参考文献 .....	145

## 第5章

## 馈源技术

5.1	概述 .....	147
5.2	多模馈源 .....	147
5.2.1	多模馈源的构成单元及其作用 .....	147
5.2.2	不连续截面处高次模的激励 .....	148
5.2.3	多模馈源的辐射方向图 .....	153
5.3	波纹馈源 .....	154
5.3.1	表面阻抗法 .....	156
5.3.2	$HE_{11}$ 模的单模工作区 .....	163
5.3.3	宽频带波纹喇叭的设计 .....	163
5.4	散射矩阵法分析波纹馈源 .....	167
5.4.1	典型组件的处理 .....	168
5.4.2	相邻两组件的组合散射矩阵 .....	172
5.4.3	矩阵参数 .....	173

5.4.4	喇叭或波导与口面之间波导段的处理 .....	175
5.4.5	口面对半空间的辐射 .....	176
5.4.6	整体处理 .....	179
5.4.7	模数的选取 .....	180
5.4.8	球面波展开法计算波纹喇叭的方向图 .....	181
	参考文献 .....	184

## 第6章

### 微波全息法测量天线表面误差

6.1	概述 .....	186
6.2	基本原理 .....	186
6.3	计及反射面变形影响的辐射场 .....	190
6.4	变形反射镜面形的构建 .....	192
6.4.1	取样规则 .....	193
6.4.2	离散傅里叶变换 .....	194
6.5	最佳拟合抛物面 .....	196
6.5.1	坐标变换 .....	196
6.5.2	最佳拟合抛物面的确定 .....	197
6.6	变形赋形双镜天线的最佳拟合反射面 .....	202
6.6.1	坐标变换 .....	202
6.6.2	主反射镜变形、副反射镜不变形 .....	203
6.6.3	主反射镜不变形、副反射镜变形 .....	207
	参考文献 .....	210

## 第7章

### 天线噪声温度

7.1	概述 .....	212
7.2	天线方向图所确定的噪声温度 .....	212
7.2.1	地面噪声温度模型 .....	214
7.2.2	天线方向图所确定的噪声温度整体模型 .....	215
7.2.3	天线面的欧姆损耗所产生的噪声温度 .....	218

7.3 波束波导中的噪声温度的确定 .....	219
7.3.1 基本模型 .....	219
7.3.2 互易定理求解法向模场 .....	220
7.3.3 反射镜泄漏所产生的噪声温度 .....	224
参考文献 .....	224

## 第8章

### 关于波束波导系统的设计

8.1 概述 .....	227
8.2 波束波导系统设计的重要技术因素 .....	228
8.2.1 低噪声温度因素 .....	228
8.2.2 波束的转换因素 .....	229
8.2.3 两偏置反射镜之间的距离选择因素 .....	230
8.2.4 结构因素 .....	231
8.3 波束波导的高通设计法 .....	233
8.3.1 多频段共用波束波导的特点 .....	233
8.3.2 高通设计法的基本描述 .....	234
8.3.3 关于各频段馈源的设计 .....	234
8.4 高斯波束法 .....	248
8.4.1 各高斯波束之间的转换关系 .....	249
8.4.2 $M_1$ 镜反射高斯波束参数的确定 .....	251
8.4.3 $M_1$ 镜入射高斯波束参数的确定 .....	252
8.4.4 副反射镜顶点 $V_s$ 处的高斯波束参数 .....	253
8.4.5 利用高斯波束法设计波纹喇叭馈源 .....	254
8.4.6 利用高斯波束法设计波束波导的实际设计案例 .....	255
8.5 高功率设计法 .....	263
8.5.1 基本原理 .....	263
8.5.2 主要技术因素及其分析 .....	265
8.5.3 高功率波束波导系统第一种设计方法—— $Z_{02}$ 位于 $V_1V_2$ 中途法 .....	265
8.5.4 高功率波束波导系统第二种设计方法—— $Z_{02}$ 最佳确定法 .....	270
参考文献 .....	272

## 第 9 章

## 非波束波导馈电的卡塞格仑型深空探测天线

9.1	概述 .....	274
9.2	副反射镜的赋形 .....	275
9.2.1	偏轴馈源的射线描述 .....	276
9.2.2	副反射镜的重新赋形 .....	276
9.2.3	等光程常数 $C_k$ 的确定 .....	277
9.2.4	$F_2$ 位置的选择 .....	279
9.2.5	不对称卡塞格仑天线可能存在的问题 .....	279
9.3	双频功能的开拓 .....	280
9.3.1	双频段馈源系统 .....	280
9.3.2	椭球型反射镜 .....	281
9.4	降低天线噪声、提高天线 $G/T$ 值的技术 .....	282
9.4.1	副反射镜边缘的几何光学射线内拨技术 .....	282
9.4.2	副反射镜边缘附加赋形凸缘 .....	283
	参考文献 .....	284



第 1 章  
几何光学法

## 1.1 概述

几何光学是人们最熟悉的设计和分析方法。对于波束波导馈电的天线系统，通常以几何光学为先导，勾画出波束波导系统的轮廓，进而针对不同的使用频段，再用更精确、更快速的分析方法，例如数值物理光学法、高斯模法等，对其进行计算和分析，给出修正设计。况且对于波束波导中的反射镜口径波长比  $D/\lambda$  特别大的波束波导系统，几何光学法能较精确地预期其性能，因此几何光学法又称“高通”方法，它没有频率上限限制。当然，当反射镜面的口径波长比较小时，几何光学的结果是不精确的。

本章主要讨论反射镜面的微波光学分析，由几何光学所推演出的波束波导中的对称转换准则，几何光学法计算反射镜面的辐射场等问题。

## 1.2 反射镜面的微波光学<sup>[1]</sup>

如图 1.1 所示， $e_{s_i}$ 、 $e_{u_i}$ 、 $e_{v_i}$  为互相垂直的 3 个单位矢量，构成正交坐标系，其中  $e_{s_i}$  表征入射射线方向的单位矢量。 $e_{s_r}$ 、 $e_{u_r}$ 、 $e_{v_r}$  也是相互垂直的 3 个单位矢量，其中  $e_{s_r}$  表征反射射线方向的单位矢量。通常  $e_{s_i}$  和  $e_{s_r}$  为入射波束中心射线方向和反射波束中心射线方向的单位矢量。

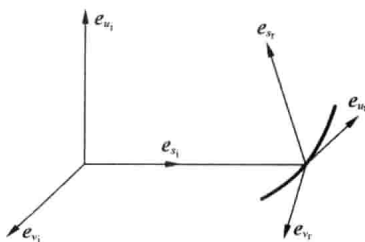


图 1.1 反射镜面的微波光学机理

### 1.2.1 反射镜表面的单位法线矢量

如果在坐标系  $(e_s, e_u, e_v)$  系统中反射镜表面表示为

$$s = s(u, v) \quad (1.1)$$

反射镜表面方程可表示为

$$G = -s + s(u, v) \quad (1.2)$$

根据曲面的法线定义, 则得

$$\mathbf{e}_n = -\frac{\nabla G}{|\nabla G|} = \frac{\mathbf{e}_s - \frac{1}{h_u} \cdot \frac{\partial s}{\partial u} \mathbf{e}_u - \frac{1}{h_v} \cdot \frac{\partial s}{\partial v} \mathbf{e}_v}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{h_u} \cdot \frac{\partial s}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{1}{h_v} \cdot \frac{\partial s}{\partial v}\right)^2}} \quad (1.3)$$

$$\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}_s = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{h_u} \cdot \frac{\partial s}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{1}{h_v} \cdot \frac{\partial s}{\partial v}\right)^2}} \quad (1.4)$$

所以  $\mathbf{e}_n$  又可表示为

$$\mathbf{e}_n = \left( \mathbf{e}_s - \frac{1}{h_u} \cdot \frac{\partial s}{\partial u} \mathbf{e}_u - \frac{1}{h_v} \cdot \frac{\partial s}{\partial v} \mathbf{e}_v \right) (\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}_s) \quad (1.5)$$

上面诸式中,  $\mathbf{e}_s$ 、 $\mathbf{e}_u$ 、 $\mathbf{e}_v$ 、 $h_u$ 、 $h_v$  用  $\mathbf{e}_{s_i}$ 、 $\mathbf{e}_{u_i}$ 、 $\mathbf{e}_{v_i}$ 、 $h_{u_i}$ 、 $h_{v_i}$  或  $\mathbf{e}_{s_r}$ 、 $\mathbf{e}_{u_r}$ 、 $\mathbf{e}_{v_r}$ 、 $h_{u_r}$ 、 $h_{v_r}$  代替, 便得到  $\mathbf{e}_n$  用入射波曲线正交坐标系表示的法线单位矢量和反射波曲线正交坐标系表示的法线单位矢量表示式。

用入射波曲线正交坐标系表示的反射镜面的法线单位矢量为

$$\mathbf{e}_n = \frac{\mathbf{e}_{s_i} - \frac{1}{h_{u_i}} \cdot \frac{\partial s_i}{\partial u_i} \mathbf{e}_{u_i} - \frac{1}{h_{v_i}} \cdot \frac{\partial s_i}{\partial v_i} \mathbf{e}_{v_i}}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{h_{u_i}} \cdot \frac{\partial s_i}{\partial u_i}\right)^2 + \left(\frac{1}{h_{v_i}} \cdot \frac{\partial s_i}{\partial v_i}\right)^2}} \quad (1.6)$$

$$\mathbf{e}_n = \left( \mathbf{e}_{s_i} - \frac{1}{h_{u_i}} \cdot \frac{\partial s_i}{\partial u_i} \mathbf{e}_{u_i} - \frac{1}{h_{v_i}} \cdot \frac{\partial s_i}{\partial v_i} \mathbf{e}_{v_i} \right) (\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}_{s_i}) \quad (1.7)$$

用反射波曲线正交坐标系表示的反射镜面的法线单位矢量为

$$\mathbf{e}_n = \frac{\mathbf{e}_{s_r} - \frac{1}{h_{u_r}} \cdot \frac{\partial s_r}{\partial u_r} \mathbf{e}_{u_r} - \frac{1}{h_{v_r}} \cdot \frac{\partial s_r}{\partial v_r} \mathbf{e}_{v_r}}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{h_{u_r}} \cdot \frac{\partial s_r}{\partial u_r}\right)^2 + \left(\frac{1}{h_{v_r}} \cdot \frac{\partial s_r}{\partial v_r}\right)^2}} \quad (1.8)$$

$$\mathbf{e}_n = \left( \mathbf{e}_{s_r} - \frac{1}{h_{u_r}} \cdot \frac{\partial s_r}{\partial u_r} \mathbf{e}_{u_r} - \frac{1}{h_{v_r}} \cdot \frac{\partial s_r}{\partial v_r} \mathbf{e}_{v_r} \right) (\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}_{s_r}) \quad (1.9)$$

上面诸式中,  $h_{u_i}$ 、 $h_{v_i}$ 、 $h_{u_r}$ 、 $h_{v_r}$  为米兰系数。

### 1.2.2 反射镜表面的斯耐尔定律

众所周知, 理想导体表面的斯耐尔定律为

$$\mathbf{e}_{s_r} = \mathbf{e}_{s_i} - 2(\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}_{s_i}) \mathbf{e}_n \quad (1.10)$$

$$\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}_{s_r} = -\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}_{s_i} \quad (1.11)$$



由式 (1.10) 和式 (1.11) 得

$$2(\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}_{s_i})(\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}_{s_r}) = \mathbf{e}_{s_i} \cdot \mathbf{e}_{s_r} - 1 \quad (1.12)$$

$$\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}_{u_i} = -\frac{\mathbf{e}_{s_r} \cdot \mathbf{e}_{s_i}}{2(\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}_{s_i})} = -\frac{(\mathbf{e}_{s_r} \cdot \mathbf{e}_{u_i})(\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}_{s_i})}{1 - (\mathbf{e}_{s_i} \cdot \mathbf{e}_{s_r})} \quad (1.13)$$

$$\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}_{u_r} = -\frac{(\mathbf{e}_{s_r} \cdot \mathbf{e}_{u_r})(\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}_{s_r})}{1 - (\mathbf{e}_{s_i} \cdot \mathbf{e}_{s_r})} \quad (1.14)$$

以式 (1.9) 代入式 (1.14) 得

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{h_{u_r}} \cdot \frac{\partial s_r}{\partial u_r} &= \frac{\mathbf{e}_{s_i} \cdot \mathbf{e}_{u_r}}{1 - (\mathbf{e}_{s_i} \cdot \mathbf{e}_{s_r})} \\ \frac{1}{h_{v_r}} \cdot \frac{\partial s_r}{\partial v_r} &= \frac{\mathbf{e}_{s_i} \cdot \mathbf{e}_{v_r}}{1 - (\mathbf{e}_{s_i} \cdot \mathbf{e}_{s_r})} \end{aligned} \right\} \quad (1.15)$$

以式 (1.8) 代入式 (1.13) 得

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{h_{u_i}} \cdot \frac{\partial s_i}{\partial u_i} &= \frac{\mathbf{e}_{s_r} \cdot \mathbf{e}_{u_i}}{1 - (\mathbf{e}_{s_i} \cdot \mathbf{e}_{s_r})} \\ \frac{1}{h_{v_i}} \cdot \frac{\partial s_i}{\partial v_i} &= \frac{\mathbf{e}_{s_r} \cdot \mathbf{e}_{v_i}}{1 - (\mathbf{e}_{s_i} \cdot \mathbf{e}_{s_r})} \end{aligned} \right\} \quad (1.16)$$

式 (1.15) 和式 (1.16) 描述了入射场  $\mathbf{e}_{u_i}$  和  $\mathbf{e}_{v_i}$  分量及反射场  $\mathbf{e}_{u_r}$  和  $\mathbf{e}_{v_r}$  分量在反射点处的关系, 因此式 (1.15) 和式 (1.16) 是斯耐尔定律的另一种表征形式。

### 1.2.3 射束波前面积元和射束所截割的反射镜表面面积元之间的关系

假定  $(\mathbf{e}_s, \mathbf{e}_u, \mathbf{e}_v)$  表示反射镜表面的正交坐标系, 镜面方程如式 (1.1) 所示, 令

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{s}_1 &= \left( \frac{1}{h_u} \cdot \frac{\partial s}{\partial u} \mathbf{e}_s + \mathbf{e}_u \right) h_u du \\ \mathbf{s}_2 &= \left( \frac{1}{h_v} \cdot \frac{\partial s}{\partial v} \mathbf{e}_s + \mathbf{e}_v \right) h_v dv \end{aligned} \right\} \quad (1.17)$$

$$\mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2 = \left( -\frac{1}{h_u} \cdot \frac{\partial s}{\partial u} \mathbf{e}_u - \frac{1}{h_v} \cdot \frac{\partial s}{\partial v} \mathbf{e}_v + \mathbf{e}_s \right) h_u h_v dudv \quad (1.18)$$

$$\mathbf{e}_n \cdot (\mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2) = \frac{h_u h_v dudv}{\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}_s} \quad (1.19)$$

$$\mathbf{e}_s \cdot (\mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2) = h_u h_v dudv \quad (1.20)$$

式 (1.17) 至式 (1.20) 既适用于入射波束的曲线正交坐标系  $(\mathbf{e}_{s_i}, \mathbf{e}_{u_i}, \mathbf{e}_{v_i})$ , 又适用于反射波的曲线正交坐标系  $(\mathbf{e}_{s_r}, \mathbf{e}_{u_r}, \mathbf{e}_{v_r})$ , 即