



高等学校理工类课程学习辅导丛书



大学物理学

习题分析与解答

靳辰飞 张伶俐 主编



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS



高等学校理工类课程学习辅导丛书

大学物理学

习题分析与解答

Daxue Wulixue Xiti Fenxi yu Jieda

靳辰飞 张伶俐 主编

王 健 张 勇 张思琦 张建隆 参编

赵 远 主审



高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

内容提要

本书是赵远等编写的《大学物理学》的配套辅导书。内容包括：教材中每个章节内容的总结，教材中全部习题的解答，各章中有代表性的习题的详细解题步骤，同时还结合各个章节的重点、难点补充了一些思考题及解答。

本书适用于高等学校理工类 150 学时大学物理课程的教学，也可作为一般理工院校非物理类专业相关课程的教辅参考书。

图书在版编目(CIP)数据

大学物理学习题分析与解答 / 靳辰飞, 张伶俐主编.

-- 北京 : 高等教育出版社, 2013.9

ISBN 978-7-04-038059-0

I. ①大… II. ①靳…②张… III. ①物理学 - 高等学校 - 题解 IV. ①O4 - 44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 160197 号

策划编辑 缪可可

责任编辑 王 硕

封面设计 于文燕

版式设计 马敬茹

插图绘制 尹 莉

责任校对 刘 莉

责任印制 毛斯璐

出版发行 高等教育出版社

社 址 北京市西城区德外大街 4 号

邮政编码 100120

印 刷 国防工业出版社印刷厂

开 本 787mm × 960mm 1/16

印 张 26.5

字 数 480 千字

购书热线 010-58581118

咨询电话 400-810-0598

网 址 <http://www.hep.edu.cn>

<http://www.hep.com.cn>

网上订购 <http://www.landaco.com>

<http://www.landaco.com.cn>

版 次 2013 年 9 月第 1 版

印 次 2013 年 9 月第 1 次印刷

定 价 40.30 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题, 请到所购图书销售部门联系调换

版权所有 侵权必究

物 料 号 38059-00

前 言

本书是与高等教育出版社出版的赵远等主编的教材《大学物理学》配套的教辅用书。全书按主教材体系共分 26 章,每章均分为五个部分。第一部分参照教育部高等学校物理学与天文学教学指导委员会编制的《理工科类大学物理课程教学基本要求》(2010 年版),同时结合主教材的特点给出各章内容的基本要求。第二部分列出每章的学习要点,便于学生深入理解基本内容并掌握主要内容。第三部分将每章的习题归纳为几个主要类型,并有针对性地给出此类问题的一般思路和常用技巧。第四部分通过思考题的方式加强学生对每章基本概念和基本原理的理解,进而拓展至用这些基本概念解释一些日常生活和生产中常见的物理现象,以提高学生灵活运用理论知识解决实际问题的能力。第五部分对主教材的全部习题进行了详细的解答。本书编写过程中也参考了国内同行的许多宝贵的编写经验。

本书由靳辰飞、张伶俐担任主编,赵远主审,参加编写的有王健、张勇、张思琦、张建隆。本书的第 1 至第 4 章、第 21 至第 23 章由张伶俐编写,第 8 至第 11 章、第 24 至第 26 章由靳辰飞编写,第 6 章、第 7 章、第 16 至第 19 章由王健编写,第 5 章、第 14 章由张勇编写,第 12 章、第 15 章由张思琦编写,第 13 章、第 20 章由张建隆编写。靳辰飞、张伶俐完成了全书的统稿工作。

在本书的编写过程中,哈尔滨工业大学物理系大学物理教研室的老师们提出了许多宝贵意见,在此表示衷心的感谢。同时也向本书编写过程中所参阅的书籍、文献的作者致谢。最后对高等教育出版社物理分社刘伟分社长、缪可可编辑的帮助表示衷心的感谢。

由于编者水平有限,书中难免存在缺点和错误,敬请读者不吝指正。

编 者

2013 年 4 月

目 录

第1章 质点运动学	1
一、基本要求	1
二、本章要点	1
三、解题指导	2
四、思考题	2
五、习题分析与解答	5
第2章 牛顿定律	18
一、基本要求	18
二、本章要点	18
三、解题指导	19
四、思考题	19
五、习题分析与解答	23
第3章 动量定理 动量守恒定律	33
一、基本要求	33
二、本章要点	33
三、解题指导	34
四、思考题	34
五、习题分析与解答	36
第4章 动能定理 功能原理	45
一、基本要求	45
二、本章要点	45
三、解题指导	46
四、思考题	46
五、习题分析与解答	49
第5章 角动量 角动量守恒定律	62
一、基本要求	62
二、本章要点	62
三、解题指导	64

四、思考题	64
五、习题分析与解答	68
第 6 章 流体力学基础	84
一、基本要求	84
二、本章要点	84
三、解题指导	86
四、思考题	86
五、习题分析与解答	87
第 7 章 相对论基础	95
一、基本要求	95
二、本章要点	95
三、解题指导	96
四、思考题	97
五、习题分析与解答	100
第 8 章 静电场	112
一、基本要求	112
二、本章要点	112
三、解题指导	113
四、思考题	115
五、习题分析与解答	119
第 9 章 静电场中的导体和电介质	133
一、基本要求	133
二、本章要点	133
三、解题指导	135
四、思考题	137
五、习题分析与解答	140
第 10 章 电磁相互作用和恒定磁场	157
一、基本要求	157
二、本章要点	157
三、解题指导	160
四、思考题	161
五、习题分析与解答	166
第 11 章 磁场中的磁介质	196
一、基本要求	196

二、本章要点	196
三、解题指导	197
四、思考题	198
五、习题分析与解答	201
第 12 章 电磁感应	207
一、基本要求	207
二、本章要点	207
三、解题指导	209
四、思考题	211
五、习题分析与解答	214
第 13 章 电磁场 电磁波	238
一、基本要求	238
二、本章要点	238
三、解题指导	240
四、思考题	240
五、习题分析与解答	242
第 14 章 振动	249
一、基本要求	249
二、本章要点	249
三、解题指导	250
四、思考题	250
五、习题分析与解答	253
第 15 章 机械波	272
一、基本要求	272
二、本章要点	272
三、解题指导	273
四、思考题	274
五、习题分析与解答	277
第 16 章 几何光学	291
一、基本要求	291
二、本章要点	291
三、解题指导	292
四、思考题	293
五、习题分析与解答	295

第 17 章 光的干涉	301
一、基本要求	301
二、本章要点	301
三、解题指导	302
四、思考题	303
五、习题分析与解答	305
第 18 章 光的衍射	313
一、基本要求	313
二、本章要点	313
三、解题指导	314
四、思考题	315
五、习题分析与解答	318
第 19 章 光的偏振	324
一、基本要求	324
二、本章要点	324
三、解题指导	325
四、思考题	325
五、习题分析与解答	327
第 20 章 现代光学	335
一、基本要求	335
二、本章要点	335
三、解题指导	336
四、思考题	336
五、习题分析与解答	339
第 21 章 统计物理学基础	347
一、基本要求	347
二、本章要点	347
三、解题指导	348
四、思考题	348
五、习题分析与解答	350
第 22 章 热力学第一定律	356
一、基本要求	356
二、本章要点	356
三、解题指导	357

四、思考题	357
五、习题分析与解答	360
第 23 章 热力学第二定律 熵	368
一、基本要求	368
二、本章要点	368
三、解题指导	368
四、思考题	369
五、习题分析与解答	370
第 24 章 早期量子论	376
一、基本要求	376
二、本章要点	376
三、解题指导	377
四、思考题	378
五、习题分析与解答	380
第 25 章 量子力学初步	392
一、基本要求	392
二、本章要点	392
三、解题指导	393
四、思考题	394
五、习题分析与解答	396
第 26 章 氢原子的量子理论	401
一、基本要求	401
二、本章要点	401
三、解题指导	401
四、思考题	402
五、习题分析与解答	404
参考文献	412

第 1 章

质点运动学

一、基本要求

1. 掌握描述质点运动状态的方法,建立运动学的基本概念:质点、参考系、坐标系、位置矢量、位移、路程、速度、加速度等.
2. 掌握运动函数的物理意义,熟练掌握质点运动学中两类基本问题,即用求导法由已知的运动函数求速度、加速度;用积分法由已知的速度或加速度求质点的运动函数.
3. 掌握位矢、位移、速度和加速度在几种常用坐标系(直角坐标系、自然坐标系、极坐标系)中的表示方法,加深理解速度、加速度的矢量性、瞬时性和相对性.
4. 掌握用角量描述圆周运动规律,并理解圆周运动中角量和线量的关系.
5. 理解运动的相对性,掌握相对运动的位移关系和速度关系.

二、本章要点

1. 质点

当被研究的物体的大小和形状可以忽略时,这个物体便可看成没有大小和形状,只具有物体全部质量的一个点.

2. 参考系

为描述物体的运动而选为参考的物体或物体系.

3. 描述质点运动的物理量

运动函数:表示质点位置随时间的变化.

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$$

速度:描述物体运动状态的物理量.

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$$

加速度:描述物体运动状态变化快慢的物理量.

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}$$

4. 描述质点圆周运动的角量

角位移 $\Delta\theta = \theta(t + \Delta t) - \theta(t)$

角速度 $\omega = \frac{d\theta}{dt}$

角加速度 $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$

角量和线量的关系 $v = r\omega$, $a_n = \frac{v^2}{r} = r\omega^2$, $a_t = r\alpha$

5. 相对运动

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} + \mathbf{r}'$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{v}'$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}'' + \mathbf{a}'$$

三、解题指导

1. 运动学问题中很关键的问题就是坐标系的选择, 一般情况选用直角坐标系, 在加速度是常矢量时选用直角坐标系处理问题尤其方便. 在物体作平面运动且加速度指向空间某一固定点的情况下常选用平面极坐标系 (见题 1-3). 当质点运动轨迹已知或者固定时可选用自然坐标系 (见题 1-7).

2. 质点运动学中两类基本问题, 第一类问题由已知的运动函数求速度、加速度, 采用求导法; 第二类问题由已知的速度或加速度求质点的运动函数, 运用积分法. 在第二类问题中注意要根据题意, 确定出初始条件, 其中经常遇到已知加速度求速度和位移的函数关系, 解法一就是根据题意, 确定出初始条件积分求出速度和位移, 消去 t 即可; 解法二可采用积分变量变换 (见题 1-4).

四、思考题

1. 什么是参考系、坐标系? 为什么在描述物体运动时要引入参考系和坐标系? 在不同的参考系下, 描述同一物体的运动有什么不同? 在同一参考系不同坐标系下, 描述同一物体的运动有什么不同?

答 参考系是为了描述物体运动而选为参考的物体或物体系. 由于自然界中所有的物体都在运动, 因此对运动的描述肯定是相对的, 这就决定对物体运动的描述必须选取参考系. 坐标系是固结在参考系上的一组有数字刻度的射线、曲线或角度, 是为了定量描述物体的运动而引入的.

在不同参考系中描述同一物体的运动, 物体的运动形式 (轨迹、速度等) 是不同的. 在同一参考系不同坐标系下, 描述同一物体的运动, 物体的运动形式相同 (轨迹、速度等), 但其运动形式的数学表达却不同.

2. 位移和路程的区别是什么? 什么情况下位移的大小与路程相等?

答 位移 $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)$ 是矢量, 是质点在初始时刻的位置到末了时刻的位置的有向线段, 表示 Δt 时间间隔内质点位置变化, 既有大小又有方向. 路程 Δs 是质点运动所经历的实际行程的长度, 是标量.

一般情况下 $|\Delta \mathbf{r}| \neq \Delta s$, 但当时间 Δt 趋于零时 $|\mathrm{d}\mathbf{r}| = \mathrm{d}s$, 以及当质点作同向直线运动时 $|\Delta \mathbf{r}| = \Delta s$.

3. 说明在曲线运动中, $\Delta \mathbf{r}$ 、 $|\Delta \mathbf{r}|$ 、 Δr 的区别.

答 $\Delta \mathbf{r}$ 是两矢量之差, 即 $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, 是矢量. $|\Delta \mathbf{r}|$ 是 $\Delta \mathbf{r}$ 的模. Δr 是两矢量的大小之差(矢量模之差), 即 $\Delta r = |\mathbf{r}_2| - |\mathbf{r}_1|$.

4. 一质点作曲线运动, 其瞬时速度为 $\mathbf{v}$, 瞬时速率为 v , 平均速度为 $\bar{\mathbf{v}}$, 平均速率为 $\bar{v}$, 试问下列选项哪种正确? (C)

(A) $|\mathbf{v}| = v, |\bar{\mathbf{v}}| = \bar{v}$

(B) $|\mathbf{v}| \neq v, |\bar{\mathbf{v}}| = \bar{v}$

(C) $|\mathbf{v}| = v, |\bar{\mathbf{v}}| \neq \bar{v}$

(D) $|\mathbf{v}| \neq v, |\bar{\mathbf{v}}| \neq \bar{v}$

5. 质点位置矢量方向不变, 质点是否一定作直线运动? 质点沿直线运动, 其位置矢量是否一定方向不变?

答 质点位置矢量方向不变, 质点一定作直线运动. 质点沿直线运动, 其位置矢量不一定方向不变.

6. 若质点的速度大小不变而方向改变, 质点作何种运动? 速度方向不变而大小改变, 质点作何种运动?

答 若质点的速度大小不变而方向改变, 质点作曲线运动. 若质点的速度方向不变而大小改变, 质点作变速直线运动.

7. 试就质点直线运动中, 加速度与速度同符号时, 质点作加速运动, 加速度与速度反号时, 作减速运动, 是否可能存在这样的直线运动, 质点速度逐渐增加但其加速度却在减小?

答 存在这样的直线运动, 加速度与速度同符号, 但加速度却在减小的变加速直线运动.

8. 对不同的研究物体如何选择坐标系(直角坐标系、极坐标系、自然坐标系)?

答 通常情况下被研究物体的加速度是常矢量时选择直角坐标系, 直角坐标系也是最常用的坐标系. 对于平面运动且加速度指向空间某一固定点的情况选用平面极坐标系处理问题比较方便. 而当被研究物体的运动轨迹已知或者固定时可选用自然坐标系.

9. 在自然坐标系中研究曲线运动时, $\boldsymbol{v}$ 、 v 和 v_t 三个符号的含义有什么不同?

答 在自然坐标系中研究曲线运动时 $\boldsymbol{v}$ 表示质点运动的速度, 既有大小又有方向, 且方向在曲线的切线方向上. v 和 v_t 含义相同表示质点运动速度的大小.

10. 抛体的轨迹方程为 $y = x \tan \theta - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} x^2$, 分析什么情况下抛体的射程最远, 什么情况下抛体的射高 (飞行时所能达到的最大高度) 最大, 其最大值各为多少?

答 抛体的轨迹是一条抛物线. 令其轨迹方程

$$y = x \tan \theta - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} x^2 = 0$$

可得此抛物线与 Ox 轴的两交点坐标

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$$

其中 x_2 即为抛体的射程, 显然当 $\theta = 45^\circ$ 抛射时, 射程可达最大值 $\frac{v_0^2}{g}$.

令 $\frac{dy}{dx} = 0$ 得 $x = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$, 将其代回 $y = x \tan \theta - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} x^2$ 可得抛体在飞行时所能达到的最大高度即射高 $y_{\max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{2g}$, 显然当 $\theta = 90^\circ$ 即竖直向上抛射时, 射高可达最大值 $\frac{v_0^2}{2g}$.

11. 一抛体以仰角 θ 抛射出去, 不计空气阻力, 当这颗炮弹到达轨道上任一点 P 时的位移 $\Delta \boldsymbol{r}$ 和速度 $\boldsymbol{v}$ 与 Ox 轴正向夹角分别为 α 和 β , 证明 $2 \tan \alpha - \tan \beta = \tan \theta$.

证明 由已知可得

$$\begin{aligned} \tan \alpha = \frac{y}{x} &= \frac{(v_0 \sin \theta)t - \frac{1}{2}gt^2}{(v_0 \cos \theta)t} = \tan \theta - \frac{gt}{2v_0 \cos \theta} \\ \tan \beta = \frac{v_y}{v_x} &= \frac{v_0 \sin \theta - gt}{v_0 \cos \theta} = \tan \theta - \frac{gt}{v_0 \cos \theta} \end{aligned}$$

由以上两式得

$$2 \tan \alpha - \tan \beta = \tan \theta$$

12. 在变速圆周运动中, 加速度的方向是什么, 是否指向圆心? 其法向加速度和切向加速度各有什么作用?

答 圆周运动的加速度 $\boldsymbol{a}$ 方向总是指向圆周的凹侧, 加速度 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{v}$ 的夹角

$\alpha = \arctan \frac{a_n}{a_t}$. 其法向加速度 $a_n = \frac{v^2}{R}$ 指向圆心, 改变圆周运动速度的方向, 切向加

速度 $a_t = \frac{dv}{dt}$ 沿轨道切线方向, 改变圆周运动速度的大小.

13. 一质点作半径为 R 的变速率圆周运动, v 为任一时刻质点的速率, 下式中哪一选项表示加速度的大小? (D)

(A) $\frac{dv}{dt}$ (B) $\frac{dv}{dt} + \frac{v^2}{R}$ (C) $\frac{v^2}{R}$ (D) $\left[\left(\frac{dv}{dt} \right)^2 + \frac{v^2}{R} \right]^{\frac{1}{2}}$

五、习题分析与解答

1-1 一质点在 Oxy 平面内运动, 其运动方程为 $x = 2t, y = 19 - 2t^2$, x 和 y 均以 m 为单位, t 以 s 为单位. 试求: (1) 质点的运动轨迹; (2) $t = 1 s$ 时质点的速度和加速度; (3) 什么时刻质点的位矢与速度恰好垂直? 此时它们的 x, y 分量各是多少? (4) 何时质点距原点最近? 最小距离是多少?

分析 本题属于运动学的第一类问题, 已知运动方程求质点运动的速度、加速度、位置矢量. 本题只需由运动方程的分量式分别求出速度、加速度的分量, 再由运动合成算出速度和加速度的大小和方向.

解 (1) 根据质点的运动方程 $x = 2t, y = 19 - 2t^2$ 得质点的运动轨迹为

$$y = 19 - 2t^2 = 19 - 2 \left(\frac{x}{2} \right)^2 = 19 - \frac{x^2}{2} \quad (\text{SI 单位})$$

(2) 设 x 方向的速度为 v_x , y 方向的速度为 v_y , 则

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 2 \quad (\text{SI 单位})$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = -4t \quad (\text{SI 单位})$$

所以质点的速度为

$$\boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{i} - 4t\boldsymbol{j} \quad (\text{SI 单位})$$

$t = 1 s$ 时速度大小为

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{2^2 + (-4)^2} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 4.47 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

方向与 x 轴正向夹角

$$\arctan \frac{v_y}{v_x} = -71.6^\circ$$

设 x 方向的加速度为 a_x , y 方向的加速度为 a_y , 则

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = 0$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = -4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

所以质点的加速度为

$$\boldsymbol{a} = -4\boldsymbol{j} \quad (\text{SI 单位})$$

$t = 1 \text{ s}$ 时加速度大小为

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = -4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

方向为 y 轴负方向.

(3) 由已知条件可得 t 时刻位矢为

$$\boldsymbol{r} = 2t\boldsymbol{i} + (19 - 2t^2)\boldsymbol{j} \quad (\text{SI 单位})$$

当质点位矢与速度恰好垂直时, 则 $\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{v} = 0$, 即

$$[2t\boldsymbol{i} + (19 - 2t^2)\boldsymbol{j}] \cdot (2\boldsymbol{i} - 4t\boldsymbol{j}) = 2t \times 2 + (19 - 2t^2)(-4t) = 0$$

解得

$$t = 0 \text{ 或 } 3 \text{ s}$$

当 $t = 0 \text{ s}$ 时

$$x = 0 \text{ m}, \quad y = 19 \text{ m}$$

当 $t = 3 \text{ s}$ 时

$$x = 6 \text{ m}, \quad y = 1 \text{ m}$$

(4) 设 t 时刻质点与原点距离为 s , 则

$$s = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{4t^2 + (19 - 2t^2)^2} \quad (\text{SI 单位})$$

当质点距原点最近时, 即 $\frac{ds}{dt} = \frac{8t + 2(19 - 2t^2)(-4t)}{2\sqrt{4t^2 + (19 - 2t^2)^2}} = 0$, 解得

$$t = 0 \text{ 或 } 3 \text{ s}$$

所以 $t = 3 \text{ s}$ 时质点距原点最近, 为

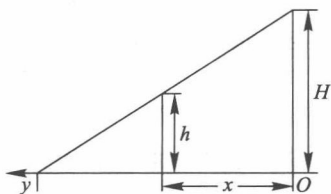
$$s = \sqrt{4 \times 3^2 + (19 - 2 \times 3^2)^2} \text{ m} = 6.08 \text{ m}$$

1-2 路灯离地面高度为 H , 一个身高为 h 的人在灯下水平路面上以匀速 v_0 步行, 如图所示. 求当人与灯水平距离为 x 时, 其头顶在地面上的影子移动速度的大小.

分析 要确定头顶影子的速度, 必须建立确定的坐标系, 写出头顶影子在此坐标系中的运动方程, 根据速度的定义式即可解出头顶影子的速度. 本题的关键是找到头顶在地面上的影子的位置矢量与人的位置矢量间的定量关系, 然后即可用人的速度表示出头顶在地面上的影子移动速度.

解 如题 1-2 图所示, 取路灯所在处为坐标原点, 人与灯水平距离为 x 时, 头顶在地面上的影子与灯水平距离为 y , 则影子长为 $y - x$, 设头顶在地面上的影子移动速度的大小 v , 则

$$\frac{h}{y-x} = \frac{H}{y}$$



题 1-2 图

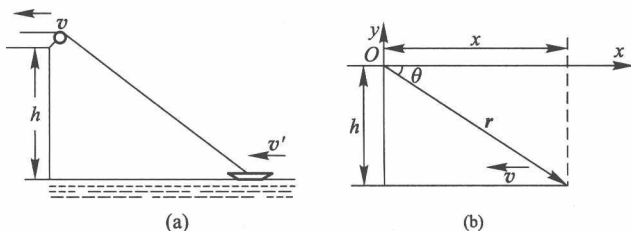
即

$$y = \frac{Hx}{H-h}$$

故头顶在地面上的影子移动速度大小为

$$v = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{Hx}{H-h} \right) = \frac{H}{H-h} \frac{dx}{dt} = \frac{H}{H-h} v_0$$

1-3 如图所示,湖中有一小船.岸上有人用绳跨过定滑轮拉船靠岸.设滑轮距水面高度为 h ,滑轮到原船位置的绳长为 l_0 ,试求:当人以匀速 v 拉绳,船运动的速度 v' 为多少?



题 1-3 图

分析 本题也是要确定船的运动状态,建立确定坐标系,写出船在此坐标系中的运动方程,根据速度的定义式即可解出.需要明确的是人以匀速 v 拉绳是绳速,即收绳的速度,是绳上各点沿绳运动的快慢,也就是绳上各点速度在绳方向上的分量.而绳上各点的速度是不同的.船速是绳端点的移动速度.

解 1 取如题 1-3(b) 图所示的直角坐标系,船的运动方程为

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} - h\mathbf{j}$$

船的运动速度为

$$\mathbf{v}' = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}\mathbf{i} = \frac{d}{dt} \sqrt{r^2 - h^2} \mathbf{i} = \frac{r}{\sqrt{r^2 - h^2}} \frac{dr}{dt} \mathbf{i}$$

而收绳的速率 $v = -\frac{dr}{dt}$, 且因 $r = l_0 - vt$, 故

$$\mathbf{v}' = \frac{r}{\sqrt{r^2 - h^2}} \frac{dr}{dt} \mathbf{i} = -v \left[1 - \frac{h^2}{(l_0 - vt)^2} \right]^{-1/2} \mathbf{i}$$

解 2 取如题 1-3(b) 图所示的极坐标 (r, θ) , 则

$$\mathbf{v}' = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dr}{dt} \mathbf{e}_r + r \frac{d\mathbf{e}_r}{dt} = \frac{dr}{dt} \mathbf{e}_r + r \frac{d\theta}{dt} \mathbf{e}_\theta$$

其中 $\frac{dr}{dt} \mathbf{e}_r$ 是船的径向速度, $r \frac{d\theta}{dt} \mathbf{e}_\theta$ 是船的横向速度, 而 $\frac{dr}{dt}$ 是收绳的速率 v . 由此可知, 收绳的速率只是船速沿绳方向的分量. 由于船速 $\mathbf{v}'$ 与径向速度之间夹角为 θ , 所以

$$v' = -\frac{v}{\cos \theta} \dot{\theta} = -v \left[1 - \frac{h^2}{(l_0 - vt)^2} \right]^{-1/2} \dot{\theta}$$

1-4 一艘正在沿直线行驶的汽艇,在发动机关闭后,其加速度方向与速度方向相反,满足 $dv/dt = -kv^2$, 式中 k 是常量. 试证明汽艇在关闭发动机后又行驶 x 距离时的速度为 $v = v_0 e^{-kx}$, 其中 v_0 是关闭发动机时的速度.

分析 本题是属于质点运动学的第二类问题, 已知加速度表达式, 求速度、位移矢量. 处理此类问题, 只需在给定初始条件下采用积分求解.

解

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dv} \frac{dv}{dt} = \frac{dx}{dv} (-kv^2)$$

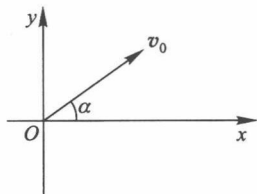
分离变量积分得

$$\int_0^x -k dx = \int_{v_0}^v \frac{dv}{v}$$

$$v = v_0 e^{-kx}$$

1-5 设从某一点 O 以同样的速率, 沿着同一竖直面内各个不同方向同时抛出几个物体. 试证: 在任意时刻, 这几个物体总是散落在某个圆周上.

分析 本题实际上是证明从点 O 以同样的速率, 沿着同一竖直面内各个不同方向同时抛出几个物体, 在任意时刻所在位置都在同一圆周上, 与抛出的方向无关.



题 1-5 图

证明 设小球自原点 O 以 v_0 的速率抛出, 与 x 轴成 α 角, 如图所示, 则小球的运动学方程为

$$x = v_0 \cos \alpha t$$

$$y = v_0 \sin \alpha t - \frac{1}{2} g t^2$$

由以上两式得

$$x^2 + \left(y + \frac{1}{2} g t^2 \right)^2 = (v_0 t)^2$$

所以在任意时刻, 不同方向同时抛出几个物体总是散落在圆心为 $(0, -gt^2/2)$, 半径为 $v_0 t$ 的圆上.

1-6 一质点在 xOy 平面内运动, 其运动方程为 $\mathbf{r} = a \cos \omega t \mathbf{i} + b \sin \omega t \mathbf{j}$, 其中 a, b, ω 均为大于零的常量. (1) 试求质点在任意时刻的速度; (2) 证明质点运动的轨道为椭圆; (3) 证明质点的加速度恒指向椭圆中心.

分析 本题属于运动学的第一类问题, 已知运动方程求质点运动的速度、加速度、轨迹.

解 (1) 由速度的定义得质点在任意时刻的速度为