

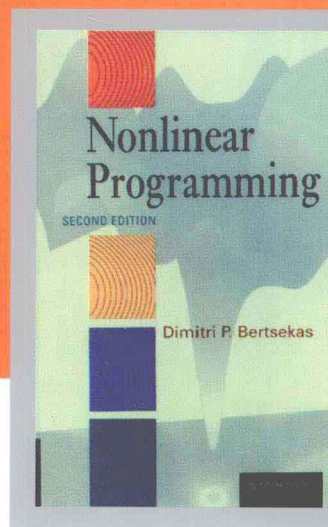
信息技术和电气工程学科国际知名教材中译本系列

Nonlinear Programming Second Edition

非线性规划 (第2版)

[美] Dimitri P. Bertsekas 著

宋士吉 张玉利 贾庆山 译



清华大学出版社



信息技术和电气工程学科国际知名教材中译本系列

Nonlinear Programming
Second Edition

非线性规划（第2版）

[美] Dimitri P. Bertsekas 著

宋士吉 张玉利 贾庆山 译

清华大学出版社
北京

北京市版权局著作权合同登记号 图字: 01-2009-4080

Authorized translation from the English language edition, entitled Nonlinear Programming, Second Edition ISBN 978-1886529007 by Dimitri P. Bertsekas, published by Athena Scientific, copyright ©1999.

All Rights Reserved. No part of this book may be reproduced or transmitted in any form or by any means, electronic or mechanical, including photocopying, recording or by any information storage retrieval system, without permission from Athena Scientific.

Simplified Chinese language edition published by **TSINGHUA UNIVERSITY PRESS** Copyright © 2012. 本书中文简体版由 Athena Scientific 授权给清华大学出版社出版发行. 未经许可, 不得以任何方式复制或抄袭本书的任何部分.

本书封面贴有清华大学出版社防伪标签, 无标签者不得销售.

版权所有, 侵权必究. 侵权举报电话: 010-62782989 13701121933

图书在版编目(CIP)数据

非线性规划: 第2版/(美)博塞克斯(Bertsekas, D.P.)著; 宋士吉, 张玉利, 贾庆山译. --北京: 清华大学出版社, 2013

书名原文: Nonlinear Programming (Second Edition)

信息技术和电气工程学科国际知名教材中译本系列

ISBN 978-7-302-31081-5

I. ①非… II. ①博… ②宋… ③张… ④贾… III. ①非线性规划-教材 IV. ①O221.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 303759 号



责任编辑: 王一玲

封面设计: 傅瑞学

责任校对: 时翠兰

责任印制: 刘海龙

出版发行: 清华大学出版社

网 址: <http://www.tup.com.cn>, <http://www.wqbook.com>

地 址: 北京清华大学学研大厦 A 座 邮 编: 100084

社总机: 010-62770175 邮 购: 010-62786544

投稿与读者服务: 010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn

质 量 反 馈: 010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

印 刷 者: 清华大学印刷厂

装 订 者: 三河市新茂装订有限公司

经 销: 全国新华书店

开 本: 185mm×260mm 印 张: 39.75 字 数: 906 千字

版 次: 2013 年 12 月第 1 版 印 次: 2013 年 12 月第 1 次印刷

印 数: 1~2000

定 价: 79.00 元

关于作者

非线性规划 (第 2 版)

作者 Dimitri P. Bertsekas 曾在希腊雅典国立技术大学机械和电子工程系学习, 并在麻省理工学院获得系统科学专业博士学位.

作者先后在斯坦福大学、伊利诺伊大学执教, 并自 1979 年开始, 任教于麻省理工学院, 现任该系 McAfee 教授. Bertsekas 教授经常为工业界提供相关咨询服务, 并担任众多期刊的编委工作. Bertsekas 教授研究领域广泛, 包括优化理论、控制理论、大规模计算和数据通信网络等领域, 并发表众多研究论文, 同时著有 13 本教材和研究专著.

Bertsekas 教授凭借其与 John Tsitsikli 在运筹优化和计算科学交叉领域的合作专著 Neuro-Dynamic Programming 的杰出研究而获得 1997 年 INFORMS 奖, 同时 Bertsekas 教授还先后获得了 2000 年希腊国家运筹优化奖和 2001 年 ACC John R. Ragazzini 教育奖. 2000 年, 他被评为美国国家工程院院士.

作者的其他著作包括:

1. Programming and Stochastic Control, Academic Press, 1976.
2. Stochastic Optimal Control: The Discrete-Time Case, Academic Press, 1978.
本书由 Athena Scientific 出版社于 1997 年再版 (合著者为 S. E. Shreve; 已翻译为俄语).
3. Constrained Optimization and Lagrange Multiplier Methods, Academic Press, 1982. 本书由 Athena Scientific 出版社于 1996 年再版 (已翻译为俄语).
4. Dynamic Programming: Deterministic and Stochastic Models, Prentice Hall, 1987.
5. Data Networks, Prentice Hall, 1987. 1992 年出版第二版 (合著者为 R. G. Gallager; 已翻译为俄语和日语).
6. Parallel and Distributed Computation: Numerical Methods, Prentice Hall, 1989. 本书由 Athena Scientific 出版社于 1997 年再版 (合著者为 J. N. Tsitsiklis).
7. Linear Network Optimization: Algorithms and Codes, M.I.T. Press, 1991.
8. Dynamic Programming and Optimal Control, 2 Vols., Athena Scientific, 1995.

9. Neuro-Dynamic Programming, Athena Scientific, 1996 (合著者为 J. N. Tsitsiklis).
10. Network Optimization: Continuous and Discrete Models, Athena Scientific, 1998.
11. Introduction to Probability, Athena Scientific, 2002 (合著者为 J. N. Tsitsiklis).
12. Convex Analysis and Optimization, Athena Scientific, 2003 (合著者为 A. Nedic 和 A. E. Ozdaglar).

译者序

非线性规划（第2版）

非线性规划是优化理论和方法的重要研究分支，同时在工程实践、管理决策等很多方面有着广泛的应用。本书系统全面地介绍了非线性规划的理论和方法，是学习、研究相关理论和方法的重要教材和学术著作。

本书涵盖了非线性规划的主要内容，包括无约束优化、凸优化、拉格朗日乘子理论和算法、对偶理论和方法等，并包含了大量的实际应用案例。本书从无约束优化问题入手，通过直观分析和严谨证明给出了无约束优化问题的最优性条件，并讨论了梯度法、牛顿法、共轭方向法等实用算法。进而本书将无约束优化问题的最优性条件和算法推广到具有凸集约束的优化问题中，进一步讨论了处理约束问题的可行方向法、条件梯度法、梯度投影法、双矩阵投影法、坐标块下降法等算法。拉格朗日乘子理论和算法是非线性规划的核心内容之一，也是本书的重点。本书中的第3、4章详尽地论述了这方面的内容。本书首先从等式约束优化问题最优解的必要条件入手，给出了拉格朗日乘子理论最基本的形式，然后给出了等式约束优化问题最优解的充分条件以及不等式约束优化问题的充分条件和必要条件。拉格朗日乘子算法的引入则基于将约束优化问题转化为无约束优化问题和求解最优性条件对应的方程组两个角度展开，分别讨论了障碍函数法、惩罚函数法、序贯二次规划法、拉格朗日法和原始对偶内点法等方法。本书的另一个重点是对偶理论和方法。本书第5章从几何的角度阐述了拉格朗日对偶理论和Fenchel对偶理论，并讨论了离散优化及拉格朗日松弛方法；本书最后一章则详细讨论了求解对偶问题的相关概念和方法，包括次梯度、对偶上升方法、次梯度方法、割平面方法和分解方法等。

本书将深层次的优化理论分析与实用的计算方法密切结合，以解决各种不同类型的优化问题。与其他阐述优化理论和方法的书籍相比，本书具有如下几个特点。首先，本书内容完备，自成体系。本书的附录部分提供了关于矩阵分析、凸分析和线性搜索等内容的数学基础知识，同时阅读本书时也不需要读者提前掌握线性规划、网络优化等其他相关知识内容。其次，本书层次清晰，由浅入深，易于掌握。对于理论性很强的定理命题，本书都首先给出直观的解释，或者进行启发式的思维引导，最后再给出严谨的数学证明。本书整体内容上，按照从无约束优化问题到约束优化问题、从拉格朗日乘子理论到具体算法、从对偶理论到其求解方法的顺序安排，组织结构合理。最后，本书对很多内容的介绍视角独

特、颇具特色. 比如本书中采用大量图片对抽象问题进行直观说明, 采用几何角度对对偶理论进行阐释说明, 同时本书多处对线性规划和非线性规划的联系进行了深入的分析和比较.

本书可以作为高年级本科生、研究生运筹优化类课程教材或者相关研究者、工程师的工具参考书. 近十年来, 本书译者一直在清华大学自动化系主讲的清华大学研究生精品课程就以本书为主要教材. 在授课过程中, 利用从几何直观到定性分析, 再到数学推导的讲解方法, 能够很好地帮助学生深刻理解复杂定理的内涵实质, 同时结合本书提供的众多实际应用案例, 可以激发学生学习抽象数学理论的兴趣和能动性. 教学实践表明, 本书对研究生的科研与实际工作都发挥了很大的指导作用.

本书内容丰富, 翻译过程中译者尽量保持原文的写作风格, 但错误纰漏之处在所难免, 恳请大家批评指正.

参与本书翻译和校对工作的还有清华大学自动化系的几位师生, 包括游科友博士以及博士生周权、李晋华、林金表、艾晓东、李明杨、陆琤, 硕士生张浩、蔺琳等. 在这里, 译者对他们所做的工作以及提出的宝贵意见和建议表示衷心的感谢!

宋士吉
2013年6月

A letter to Chinese readers

非线性规划（第2版）

It is my great pleasure to see the translation of my book in the Chinese language. Since the initial publication of the 2nd edition in 1999 and its last revised printing in 2004, I had the opportunity to visit China several times. I thus became acquainted with the intensely active Chinese academic community, and was pleased to make quite a few friends in Chinese universities.

I was very impressed with the ingenuity and the motivation of young Chinese students, and I have been fortunate to have several of them as my Ph.D. students and close collaborators. Thus I am very satisfied that Chinese scholars will be able to read my Nonlinear Programming book in their native language, along with some of my other books on Network Optimization, Convex Optimization, and Introduction to Probability that have become available in China. I am very thankful to the translators for their effort to bring this project to completion.

Dimitri P. Bertsekas

第2版前言

非线性规划（第2版）

第2版书籍相对于第1版来说，扩展了接近130页的内容。将近40%的新增内容分布在本书的各个章节之中。其余的新增内容讨论了如下三个新的主题：

(a) 第3章中新增一节用于介绍一种简单但是影响深远的处理 Fritz John 必要条件和约束规格的方法，同时也包含了半无限规划的内容。

(b) 第5章中新增一节用于讨论在解决离散优化问题时，对偶性和拉格朗日松弛的使用。这一节描述了一些应用范例，并且将连续优化和离散优化联系起来。

(c) 第6章中新增一节用于讨论近似和渐增的次梯度方法。这些内容基于作者与 Angelia Geary 目前的合作研究成果。这些内容非常有意义，因此本书中对其进行了概括性的介绍。

修订本书的目的之一是为了强调非线性规划与其他优化之间的联系，比如线性规划，网络优化以及离散/整数优化。这为本书的教学方式提供了更多选择。另外我们还改进了本书的表述方式，扩展了附录中的数学背景知识，重新安排了习题，并且增添了很多新的习题。

本书新添了网络支持，从而极大地拓展了本书涵盖的内容。很多理论性较强的习题，其中有一些是新增的习题，都可以在该书的网页上找到详细的解答过程。本书的网页为：

<http://world.std.com/~athenasc/nonlinbook.html>

这些习题使用 www 来标记。

本书的网页还包含了其他资源的网络链接，比如程序代码以及我在 MIT 教授非线性规划课上的课程讲义。

在此我要感谢为本书第2版提出改进意见的同事们。我要特别地感谢 Angelia Geary 女士，她帮助我们将理论习题的答案发布到互联网上。

Dimitri P. Bertsekas

1999年6月

第1版前言

非线性规划（第2版）

非线性规划在过去十年取得了长足的发展，现已成为一门成熟的科学学科。非线性规划理论最早来自于对基于内点法的线性和非线性规划算法的研究，随后研究者开始重新思考如何更好地求解线性规划的问题，并重新认真评估如何对待非线性规划中的约束项。非线性规划理论的第二个研究发展，虽然并不明显，但仍然十分重要。研究者开始重视大规模优化问题的求解，开始研究如何利用问题结构性进行求解以及设计基于硬件的并行算法。第三个进展是广泛利用迭代无约束优化方法解决训练神经网络时遇到的复杂最小二乘问题。通过此类研究，研究者发现简单的梯度类方法和步长准则是有效且重要的。

本书的目的在于为研究生层次的读者提供一个系统严谨且包含最新成果的非线性规划知识结构。除了下降算法、拉格朗日乘子理论、对偶理论等经典内容之外，本书还覆盖了一些重要的最新研究进展，比如针对线性和非线性规划的内点法、大规模优化算法以及最小二乘问题求解和神经网络训练等。

此外，在论述拉格朗日乘子理论和对偶方法的同时，本书中运用了两种不同但又相互补充的方法：第一种方法是基于隐函数定理的变分方法；第二种方法是基于几何解释的凸分析方法。变分方法的适用范围更加广泛，而凸分析方法对于凸规划问题来说更加简洁实用。

本书各个章节的内容安排如下：

第1章：本章讨论了无约束优化问题：包括主要概念、最优性条件以及一系列的无约束优化算法。除了经典内容外，本章还讨论了一些很少被涉及的内容，如奇异问题中的算法特性，神经网络训练问题以及离散时间的最优控制问题。

第2章：本章讨论了在不使用拉格朗日乘子的情况下解决凸集上的无约束优化问题的方法。建议在学习复杂的拉格朗日乘子理论之前学习本章内容，因为条件梯度法、梯度投影法以及坐标下降法都可以看作是前一章中无约束下降算法的自然扩展，相对容易理解。同时本章还讨论了线性规划的仿射缩放方法。

第3章：本章详细地讨论拉格朗日乘子理论的主要内容，给出了相关的充分必要条件以及灵敏性分析。本章中前三节主要分析了包含非线性等式和不等式约束的约束优化问题，最后一节讨论了线性约束的优化问题，并且对线性约束和可微目标函数的

优化问题,包括线性规划和具有线性约束的二次规划问题,给出了对偶理论的一种简单形式.

第4章:本章讨论了使用惩罚项和拉格朗日乘子的约束优化算法,包括线性规划的障碍法、增广的拉格朗日乘子法、序列二次规划方法以及原始对偶内点法.本章涉及的内容很广泛,主要来自于本人在1982年撰写的针对拉格朗日乘子方法的研究专题.

第5章:本章深入地讨论了对偶理论(包括拉格朗日对偶和Fenchel对偶).本章采用几何化视角,试图利用几何方法直观解释对偶理论.

第6章:本章讨论了基于对偶理论的大规模优化方法.本章一部分内容来自于本人与John Tsitsiklis合著的《并行和分布式算法》一书,同时针对不可微的优化问题作了进一步的延伸,包含了次梯度、 ε -次梯度、割平面方法等内容.本章还讨论了如Dantzig-Wolfe分解和Benders分解等方法.

附录:本书包含四个附录.第一个附录是对本书中使用的微积分、数学分析和线性代数知识的一些总结;第二个附录是对凸规划理论的一般介绍,包括多面体极点凸性理论、Farkas引理的证明以及次梯度的基本结果;第三个附录论述了一维最小化方法;最后一个附录讨论了在无约束优化中牛顿方法的实现问题.

非线性规划理论涉及的内容过于丰富和庞杂,本书对所包含的内容进行了必要的取舍,甚至一些相对重要的问题也未曾讨论.比如变分不等式问题、对最优化条件的深入讨论以及拟牛顿法的细节等.同时为了让学习本门课程的同学更好地理解本书的内容,建议授课教师尽量用学生最熟悉的实际案例去补充本书的内容.

本书源于本人20多年来在伊利诺伊大学和麻省理工学院为一年级研究生开设课程时讲授的内容.选修本课程的内容,需要学习者先修矩阵向量代数和高等微积分的课程,需要对收敛性的概念有很好的理解.数学分析和线性代数课程将对学习本门课程很有用,可供学生更好地理解并掌握本书中使用的数学推理.第一次阅读本书时,可以跳过某些用星号标记的内容,因为未标记星号的内容不会用到这些标记星号的内容.

本书可以在如下不同类型课程中作为教科书使用:

- (i) 包含每章的大部分内容的二个学期的课程.
- (ii) 包含第1章除了1.9节的其他内容、第2章除了2.4和2.5节的其他内容、第3章除了3.4节的其他内容、第4章除了4.2和4.3节的其他内容、第5章的前三节以及5.4节和第6章的部分内容的一学期的课程.本人在麻省理工学院就采用了这种授课方式.
- (iii) 包含第1、2、3章的大部分内容以及第4章的部分内容的一学期的课程.本人也曾进行过这样的教学方式.这种方式对学生来说是一种比较轻松的学习方式,因为不需要掌握凸分析机制,同时还能够掌握对偶理论的实用方法(本书3.4节).
- (iv) 包含前4章部分内容的的一个学期的课程.与前一种方式对比,这种方式授课的内容会不太全面.
- (v) 对于学时为一个学期的凸分析和优化课程,可以从附录B开始,然后讲解1.1、2.1和3.4节以及第5章的内容.

对非线性规划问题进行研究的文献众多,很难对该学科的研究历史、现状和其他相关方面进展给出一个全面的文献综述.因此本书中并未给出该领域早期研究成果的文献列表.本书列出了这里广泛使用的并可为本书内容提供重要拓展的且能反映重要主题的综述或者对进一步研究有参考价值的相关文献.同时本书中还列出了一些具有重大历史意义的文献,但是这里列出的这方面的文献很可能也是不全面的.一般来说,为了对该领域的研究人员提供更好的帮助,本人引用了大量的反映相对成熟主题的综述和相关书籍,同时提供了大量的反映最新研究成果的文献.

最后,我愿意对为本书做出贡献的人致以感谢.本书的主题概念是本人在斯坦福大学教授课程并与 David Luenberger 的交流中形成的.与他的交流对我的思考有着深远的影响.本人与几个同事的合作研究,尤其是与 Joe Dunn, Eli Gafni, Paul Tseng 及 John Tsitsiklis 的合作研究成果也反映在本书的内容中.我要感谢很多人的建议和见解,尤其是 David Castanon, Joe Dunn, Terry Rockafellar, Paul Tseng 和 John Tsitsiklis. 同时还要感谢我的学生以及合作者,他们为本书内容的更正和改进提供了很好的意见.在这方面, Steve Patek, Serap Savari 和 Cynara Wu 提供了很有帮助的建议. David Logan, Steve Patek 和 Lakis Polymenakos 帮助绘制了原版书封面的图形,该图形描述了一个简单神经网络训练问题的目标函数.感谢我的妻子 Joanna 和我一起度过的 30 年的时光,她的陪伴和幽默让我精神振奋,完成了这本书的写作过程.最后把这本书以及我对她的爱一并献给她.

Dimitri P. Bertsekas

1995 年 11 月

关于第 2 次印刷说明

非线性规划（第 2 版）

本书第 2 版第 2 次印刷包含了一些相对较小的改动. 我们做这些改动的目的是为了本书与作者 2003 年在 Athena Scientific 出版社出版的《凸分析和优化》(Convex Analysis and Optimization) 一书更好地匹配.

概括来说, 本书第 2 版第 2 次印刷包含的比较明显的改动包括:

- 1) 在第 2.1 节中新增了关于最优解的存在性的研究成果.
- 2) 在第 3.3.5 节中引入了伪正则性的概念.
- 3) 在第 5 章中使用了“几何乘子”而不是“拉格朗日乘子”, 来区分其与第 3 章和第 5 章中使用的乘子的不同.
- 4) 在第 5.2 节中我们采用一种新的方式建立了强对偶性理论.
- 5) 第 5.4.6 节讨论了 EM 算法.
- 6) 附录 B 给出了关于凸分析的更详细的介绍.

在本次修订中, 我还改正了一些打印错误, 并增加了一些新的习题.

Dimitri P. Bertsekas

dimitrib@mit.edu

<http://web.mit.edu/dimitrib/www/home.html>

2004 年 2 月

目 录

非线性规划（第2版）

第 1 章 无约束优化	1
1.1 最优性条件	2
1.1.1 主要的最优性条件	9
1.2 梯度方法的收敛性	16
1.2.1 下降方向和步长准则	16
1.2.2 收敛结果	33
1.3 梯度方法的收敛速率	46
1.3.1 局部分析方法	47
1.3.2 条件数的作用	49
1.3.3 关于收敛速率的结论	57
1.4 牛顿方法及其变形	67
1.5 最小二乘问题	78
1.5.1 高斯-牛顿方法	82
1.5.2 增量梯度法*	83
1.5.3 高斯-牛顿法的增量形式*	92
1.6 共轭方向法	100
1.7 拟牛顿法	114
1.8 非求导方法	122
1.8.1 坐标下降法	123
1.8.2 直接搜索法	124
1.9 离散时间最优控制问题*	127
1.10 一些实用的指导准则	140
1.11 注释和参考资料	144
第 2 章 凸集优化	147
2.1 约束优化问题	147

2.1.1	最优解的充要条件	148
2.1.2	最优解的存在性*	156
2.2	可行方向法和条件梯度法	163
2.2.1	下降方向和步长规则	164
2.2.2	条件梯度法	167
2.3	梯度投影法	173
2.3.1	基于投影方法的可行方向和步长规则	174
2.3.2	收敛性分析*	182
2.4	双矩阵投影方法	190
2.5	流型子优化方法	195
2.6	线性规划的仿射变换	202
2.7	坐标块下降方法*	208
2.8	注释和参考资料	213
第 3 章	拉格朗日乘子理论	215
3.1	等式约束优化问题的必要条件	216
3.1.1	惩罚法	219
3.1.2	消元法	221
3.1.3	拉格朗日函数	224
3.2	等式约束优化问题的充分条件和灵敏度分析	230
3.2.1	增广的拉格朗日方法	231
3.2.2	可行方向法	234
3.2.3	灵敏度 *	235
3.3	不等式约束优化问题	239
3.3.1	Karush-Kuhn-Tucker 最优性条件	241
3.3.2	转化为等式约束处理 *	243
3.3.3	二阶充分条件和灵敏度 *	245
3.3.4	充分性条件及拉格朗日最小化	246
3.3.5	Fritz John 最优性条件 *	247
3.3.6	深化和精练 *	259
3.4	线性约束和对偶性*	279
3.4.1	凸目标函数和线性约束	279
3.4.2	对偶理论: 针对简单等式约束的优化问题	281
3.5	注释和参考资料	287

第 4 章 拉格朗日乘子算法	289
4.1 障碍函数法和内点法	289
4.1.1 线性规划与对数障碍方法 *	292
4.2 惩罚法和增广的拉格朗日方法	303
4.2.1 二次罚函数方法	305
4.2.2 乘子方法 —— 主要思想	311
4.2.3 乘子方法的收敛性分析*	318
4.2.4 对偶性和二阶乘子方法*	321
4.2.5 指数乘子方法*	323
4.3 精确惩罚 —— 序贯二次规划*	329
4.3.1 不可微精确罚函数	330
4.3.2 可微精确罚函数	343
4.4 拉格朗日方法和原始-对偶内点法*	348
4.4.1 一阶方法	348
4.4.2 等式约束问题的类牛顿方法	352
4.4.3 全局收敛性	359
4.4.4 原始-对偶内点法	362
4.4.5 不同方法的比较	369
4.5 注释和参考资料	370
第 5 章 对偶性与凸规划	373
5.1 对偶问题	374
5.1.1 几何乘子	375
5.1.2 弱对偶定理	378
5.1.3 原问题和对偶问题最优解的性质	383
5.1.4 原问题不可行或最优值无界的情形	384
5.1.5 对等式约束的处理	384
5.1.6 可分问题及其几何结构	386
5.1.7 有关对偶性的其他问题	389
5.2 凸目标函数 —— 线性约束问题 *	394
5.3 凸目标函数 —— 凸约束问题	399
5.4 共轭函数及 Fenchel 对偶*	406
5.4.1 单值规划的对偶性	410
5.4.2 网络优化	413
5.4.3 博弈和最小化最大值定理	415
5.4.4 原函数	417
5.4.5 从对偶的角度看罚函数方法	419

5.4.6 最近邻和熵最小化算法	424
5.5 离散优化及其对偶	437
5.5.1 离散优化问题的举例	438
5.5.2 分枝定界	443
5.5.3 拉格朗日松弛	450
5.6 注释和参考资料	459
第 6 章 对偶方法	461
6.1 对偶微分及次梯度	462
6.2 可微对偶问题的对偶上升方法	467
6.2.1 二次规划的坐标上升法	467
6.2.2 严格凸的可分问题	469
6.2.3 划分和对偶严格凹性	470
6.3 不可微优化方法	474
6.3.1 次梯度方法	474
6.3.2 近似次梯度法和增量次梯度法	478
6.3.3 割平面方法	481
6.3.4 上升法和近似上升法	486
6.4 分解方法	497
6.4.1 耦合约束的拉格朗日松弛	497
6.4.2 基于约束右侧常数分解的方法	500
6.5 注释和参考资料	502
附录 A 数学背景	505
A.1 向量和矩阵	506
A.2 范数、数列、极限和连续性	508
A.3 方阵和特征值	514
A.4 对称和正定矩阵	516
A.5 导数	520
A.6 压缩映射	524
附录 B 凸分析	527
B.1 凸集和凸函数	527
B.2 分离超平面	543
B.3 锥和多面体的凸性	546
B.4 极点	553
B.5 可微性问题	557