基于三角模的模糊逻辑理论及其应用

裴道武 著

科学出版社

基于三角模的模糊逻辑理论及其应用

裴道武 著

科学出版社
北京

—

内 容 简 介

模糊逻辑与模糊推理是当代计算智能计算的理论基础之一，而基于三角模的模糊逻辑理论及其应用则是其中重要的研究方向，近年来得到快速发展，相继提出了几个重要的模糊逻辑系统，其中比较有影响的有修正的 Kleene 逻辑系统、基本逻辑系统，以及 Monoidal 模糊逻辑系统及其形式化理论. 本书系统阐述这个研究领域的理论与应用研究成果，主要包括这三个模糊逻辑理论及其在模糊推理、模糊控制中的应用.

本书以三角模为主线，对于以上提及的模糊逻辑系统做统一的处理，并且突出模糊逻辑在近似推理中的应用. 读者可以通过本书了解现代模糊逻辑的基本理论，熟悉国内外同行的研究工作，从而提升我国在这个领域的研究水平.

本书可以作为从事模糊逻辑与模糊推理研究的同行专家的参考资料，也可以作为数学各专业、计算机各专业、智能控制、智能信息处理等相关专业的硕士研究生和博士研究生的教材或教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

基于三角模的模糊逻辑理论及其应用/裴道武著. —北京：科学出版社，2013.10

ISBN 978-7-03-038875-9

Ⅰ. ①基… Ⅱ. ①裴… Ⅲ. ①模糊逻辑 Ⅳ. ①B815.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013) 第 243996 号

责任编辑：王丽平 / 责任校对：张怡君
责任印制：赵德静 / 封面设计：陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

文林印务有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2013 年 10 月第 一 版 开本：720 × 1000 1/16
2013 年 10 月第一次印刷 印张：22 1/2
字数：430 000

定价：98.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

序

时间确实过得很快, 自从本人的《非经典数理逻辑与近似推理》一书 (第一版) 于 2000 年由科学出版社出版以来, 一转眼已经过去十二个年头了, 如果再算上该书的初稿作为讲义在 1997 年问世, 就恰好十五年了.

在这十五年里, 模糊逻辑领域取得了不少新的成果, 一些重要的理论和应用问题得到了比较好的解答, 一些新的模糊逻辑理论体系应运而生, 模糊逻辑与模糊推理的关系研究也得到应有的关注. 所有这些, 确实有进行系统总结的必要. 令人欣喜的是, 我的学生裴道武博士正在着手做这样的工作, 而且已经完成了书稿, 准备由科学出版社出版.

裴道武教授长期从事模糊逻辑与模糊推理的研究工作, 在模糊逻辑形式系统的完备性、模糊谓词逻辑、模糊推理的算法与逻辑基础以及实际应用等方面完成了具有创新水平的研究工作, 取得了一批具有重要学术价值的研究成果, 也积累了相当丰富的科研写作经验.

该书以基于三角模的模糊逻辑理论为主线, 比较全面地介绍了国内外模糊逻辑形式化理论工作的研究成果, 特别是系统地阐述了作者自己在模糊逻辑系统完备性方面的研究成果, 还重点讨论了国内外研究同行工作之间的联系, 以及模糊逻辑在模糊推理中的应用. 本书构思新颖, 结构严谨, 特点鲜明.

作为本人 2000 年出版著作的续篇, 该书的出版, 不仅具有重要的理论意义, 同时也具有较高的应用价值, 相信该书的出版可以有力地推动我国在这个领域的研究工作.

很高兴将这本书推荐给研究同行, 是以作序.

王国俊

2012 年 12 月 12 日于陕西师范大学

前　言

模糊逻辑是经典二值逻辑与有限值逻辑的自然延伸, 已经成为当代不确定性理论与方法的主要理论基础之一, 在人工智能的多个研究领域得到广泛的应用. 近年来, 模糊逻辑研究成为重要的热点方向, 涌现了一批重要的理论和应用研究成果.

一方面, 形式模糊逻辑方向的研究取得了重大的进展, 文献中相继提出了几个著名的模糊逻辑形式演绎系统, 包括修正的 Kleene 逻辑的形式系统、基于连续三角模的模糊逻辑的形式系统、基于左连续三角模的模糊逻辑的形式系统等. 国内学者通过最近十多年的研究, 基本解决了基于修正的 Kleene 逻辑系统的模糊逻辑理论中的一些重要理论问题, 比如, 该系统的完备性问题、建立相应的谓词演算系统问题、模糊推理模型的形式化问题等. 这些最新研究成果已经在模糊逻辑、模糊推理以及二者的深刻联系等方面取得了一系列有意义的进展, 确有系统总结的必要. 而对于基于连续和左连续三角模的模糊逻辑系统, 相应的跟踪研究工作不断出现, 取得了相当丰富的研究成果, 已经发展成国际模糊逻辑研究的主流. 系统地介绍国际模糊逻辑界在这个领域的主要研究成果, 也是一项有意义的工作.

另一方面, 在模糊推理的理论研究方向, 近些年的研究工作也有许多亮点. 比如, 关于模糊集近似等式的研究, 关于模糊推理摄动性、鲁棒性和连续性的研究, 以及关于模糊推理误差分析的工作. 鉴于这些重要的研究成果分散地发表在多种学术刊物上, 系统地总结这些工作, 推动模糊推理理论研究工作走向成熟, 已经成为这个领域的当务之急.

本书的主要目的就是按照基于三角模的模糊逻辑的总体框架, 总结近二十年中外学者在模糊逻辑与模糊推理领域的最新研究成果, 以期推动我国在这个领域的研究工作.

本书可以作为在模糊逻辑领域工作的同行专家的参考资料, 也可以作为该领域研究生的教材或参考书.

全书共分成 6 章.

第 1 章简要介绍一些必要的预备知识, 包括数理逻辑的理论体系、模糊逻辑的概况、三角模与三角余模的初步知识, 以及泛代数和偏序代数的初步知识. 这些知识对于本书的顺利阅读是不可或缺的.

第 2 章重点介绍国内学者对修正的 Kleene 逻辑系统的最新研究成果. 在扼要介绍该系统已有成果的基础上, 分四个部分阐述这方面的理论研究成果: 其一是相

应的代数理论, 其二是该系统的完备性和强完备性, 其三是该系统的有限值扩张及其完备性, 其四是与该系统相应的谓词演算系统及其完备性.

第 3 章系统地介绍基于连续三角模的模糊逻辑理论, 包括这个逻辑的形式系统及其主要定理、语义及准完备性、几个重要的模式扩张、对应的谓词演算系统, 以及该系统的标准完备性等.

第 4 章阐述基于左连续三角模的模糊逻辑理论. 介绍这个逻辑的形式系统的结构与主要定理, 准完备性定理, 谓词系统及标准完备性定理. 特别讨论了几个形式系统的等价性与独立性问题, 还介绍了与该系统相关联的两个格值逻辑系统.

第 5 章建立模糊推理的基本理论, 包括模糊推理的基本模型、基本方法、基本性质, 以及模糊推理方法的逻辑基础等.

第 6 章介绍模糊推理的应用. 主要介绍基于模糊推理方法设计的模糊系统的响应性能分析, 以及模糊推理在专家系统中的初步应用.

书中穿插安排了一些有意义的思考问题, 供读者阅读时作为练习. 同时, 为了便于读者参考, 本书在每章中设置了单独一节, 对于相关文献做了注释.

作者在研究工作中, 得到两位恩师王国俊先生与徐宗本院士长期的关心和指导, 还多次聆听了四川大学刘应明院士、西安交通大学张文修先生、哈尔滨工业大学吴从炘先生、深圳大学谢维信先生、首都师范大学郑崇友先生、南京航空航天大学朱梧槚先生的精彩演讲, 与罗懋康、徐扬、李洪兴、应明生、张德学、李庆国、赵东升、杨忠强、樊太和、赵彬、徐晓泉、陈仪香、李永明、徐泽水、李生刚、吴洪博、傅丽、覃锋、刘华文、张兴芳、罗敏霞、陈水利、范九伦、高新波、张小红、吴伟志、曹飞龙、王学平、王绪柱、洪龙、曾文艺、刘用麟、詹建明等多位教授, 王三民、侯健、任芳、王香云、李骏、惠小静、周红军、折延宏、周湘南、唐益明、潘海玉等多位博士进行过有益的讨论与交流, 使作者对一些学术问题有了新的认识和见解, 在多年从事研究生“模糊逻辑与模糊推理”课程的教学工作中, 杨瑞博士, 中国计量学院的张花蓉老师及研究生姚宁和桑睨, 我的研究生潘海玉、黄阿敏、潘俊任、白植铭、毛敏、张乐、刘焕章、戴松松、李龙、邱晓春、单玉莹、张爱英等, 也对本书的初稿提供了不少好的建议. 作者谨向这些老师、朋友和研究生表示衷心的感谢!

在本书的写作过程中, 一直得到恩师王国俊先生的关心与指导, 初稿完成后, 王先生在百忙中欣然为本书作序, 这是对晚辈的鼓励与鞭策, 作者对此深表感谢.

本书的出版得到下列科研和专业建设项目的资助: 国家自然科学基金项目 (编号: 10871229, 11171308, 60863002); 浙江省重点学科建设项目 (编号: 11120031211101); 浙江省重点专业建设项目 (编号: 11120031341101, 11435132340912), 特此致谢.

浙江理工大学的领导和同事们为本书的出版提供了多方面的支持, 科学出版社的王丽平编辑为本书的出版做了许多细致而有效的工作, 作者谨致谢忱.

在本书出版之际, 特别感谢我的爱人孙骏多年来为我的科研工作所做的默默奉

献, 以及我的儿子裴植博士为本书的编排与校对提供的帮助, 正是有了他们不断的鼓励与多方面的支持, 才使本书得以如期出版.

限于作者的水平, 书中可能还有许多不妥之处, 恳请同行专家提出宝贵的修改意见, 以使本书逐步完善.

裴道武

2012 年秋于杭州下沙清雅苑

本书常用符号说明

第 1 类符号: 逻辑学

集合符号

数集: $\mathbf{N}$ (非负整数集), $\mathbf{N}^+$(正整数集), $\mathbf{Q}$ (有理数集), $\mathbf{R}$ (实数集)
原子命题符号: $p, q, r, p_1, p_2, \cdots$
所有原子命题的集合: S
真值常元: 0, 1
命题联结词: $\neg$ (非), $\wedge$ (合取), $\vee$ (析取), $\to$ (蕴涵), $\leftrightarrow$ (等价), &(联络, 或强合取)
量词: $\forall$ (全称量词), $\exists$ (存在量词)
逻辑公式: $A, B, C, A_1, A_2, \cdots$
所有逻辑公式的集合: $F(S)$
经典命题演算系统: $\mathcal{L}$
分离规则, 或者假言推理规则, 取式规则: MP (*modus ponens*)
拒取式规则: MT (*modus tollens*)
三段论规则: HS (*hypothetical syllogism*)
形式推演: $\sim$ (可证等价), $\vdash A$ (A 是定理), $\varGamma \vdash A$ (A 是 $\varGamma$ 推论, 或 $\varGamma$ 结论)
系统 $\mathcal{L}$ 的所有定理之集: $\mathrm{Thm}(\mathcal{L})$
系统 $\mathcal{L}$ 的所有 $\varGamma$ 结论之集: $\mathrm{Ded}(\varGamma)$
公式集的赋值: $v, u, w, v_1, v_2, \cdots$
所有赋值之集: $\varOmega$
系统 $\mathcal{L}$ 的所有重言式之集: $T(\mathcal{L})$
语义蕴涵: $\approx$ (逻辑等价), $\vDash A$ (A 是重言式), $\varGamma \vDash A$ ($\varGamma$ 是 A 的模型)

第 2 类符号: 模糊数学与模糊逻辑

论域: $X, Y, Z, U, X_1, X_2, \cdots$
论域中的元素: $x, y, z, u, \cdots$
集合 E 的幂集: $\mathscr{P}(E)$
论域 X 的模糊集: $A, B, C, \cdots$
论域 X 的模糊集 A 的隶属函数: A: $X \to [0,1]$, 或者 μ_A: $X \to [0,1]$
论域 X 的所有模糊集组成之集: $\mathscr{F}(X)$
模糊关系: $Q, Q_1, Q_2, \cdots$
三角模: $T, T_1, T_2, \cdots$
三角余模: $S, S_1, S_2, \cdots$

模糊否定: $N, N_1, N_2, \cdots$

标准否定: a': $a' = 1 - a,\ a \in [0,1]$

Gödel 否定: N_G

模糊蕴涵: $R, R_1, R_2, \cdots$

由三角模 T 诱导的剩余蕴涵: R_T

修正的 Kleene 逻辑命题演算系统: $\mathcal{L}^*$

系统 $\mathcal{L}^*$ 的第 k 条公理: (L^*k)

系统 $\mathcal{L}^*$ 的第 k 条定理: (TL^*k)

系统 $\mathcal{L}^*$ 的所有广义重言式之集: $QT(\mathcal{L}^*)$

系统 $\mathcal{L}^*$ 的所有 α- 重言式之集: $\alpha\text{-}T(\mathcal{L}^*)$

系统 $\mathcal{L}^*$ 的所有可达 α- 重言式之集: $[\alpha]\text{-}T(\mathcal{L}^*)$

修正的 Kleene 逻辑谓词演算系统: $\boldsymbol{K}^*$

系统 $\boldsymbol{K}^*$ 的第 k 条定理: (TK^*k)

基本逻辑命题演算系统: BL

系统 BL 的第 k 条公理: $(\mathrm{BL}k)$

系统 BL 的第 k 条定理: $(\mathrm{TBL}k)$

基本逻辑谓词演算系统: BL∀

Monoidal 逻辑命题演算系统: MTL

系统 MTL 的第 k 条公理: $(\mathrm{MTL}k)$

系统 MTL 的第 k 条定理: $(\mathrm{TMTL}k)$

Monoidal 逻辑谓词演算系统: MTL∀

弱幂零极小逻辑命题演算系统: WNM

弱幂零极小逻辑谓词演算系统: WNM∀

对合 Monoidal 逻辑命题演算系统: IMTL

对合 Monoidal 逻辑谓词演算系统: IMTL∀

幂零极小逻辑命题演算系统: NM

幂零极小逻辑谓词演算系统: NM∀

Łukasiewicz 伴随对: $(T_{\mathrm{L}}, R_{\mathrm{L}})$

Gödel 伴随对: $(T_{\mathrm{G}}, R_{\mathrm{G}})$

Goguen 伴随对: $(T_{\mathrm{Go}}, R_{\mathrm{Go}})$

R_0 **伴随对:** (T_0, R_0)

R_0 **代数的第 k 条性质:** (PR_0k)

BL 代数的第 k 条性质: $(\mathrm{PBL}k)$

MTL 代数的第 k 条性质: $(\mathrm{PMTL}k)$

R_p **伴随对:** (T_p, R_p)

R_{RDP} **伴随对:** $(T_{\mathrm{RDP}}, R_{\mathrm{RDP}})$

Mamdani 蕴涵: R_{M}

早期 Zadeh 蕴涵: R_{Z}

Kleene 蕴涵: R_{K}
Gaines-Rescher 蕴涵: R_{GR}
Yager 蕴涵: R_{Y}
Reichenbach 蕴涵: R_{R}

为了方便阅读和引用, 同时也为了记号的简便与统一, 本书对于主要项目的编号及引用采用国内外学术著作比较流行的编号规则: 按照项目的种类分节编号, 这些项目包括定义、定理、命题、推论、引理、附注、表、图和公式等, 在引用这些项目时, 以定理为例, 第 3 章第 2 节的第 4 个定理标号为定理 2.4, 在第 3 章中引用该定理时为定理 2.4, 在其他章引用该定理时为定理 3.2.4, 其余项目情形类似. 另外, 方框 "□" 表示某个命题证明的结束, 或者该命题是容易证明的, 证明过程省略.

目　　录

第 1 章　预 备 知 识

为了使读者顺利地阅读本书, 这里简要介绍一些必要的预备知识, 包括从经典逻辑到模糊逻辑的基本常识、三角模与剩余蕴涵的概念与性质, 以及泛代数与偏序代数结构的若干知识. 如果读者已经熟悉这些知识中的某些部分, 在阅读时可以跳过相关内容.

1.1　从经典逻辑到模糊逻辑

本节分两个部分, 分别介绍经典逻辑的理论框架和模糊逻辑的基本思想方法.

1. 命题与公式

经典逻辑又叫二值逻辑, 或 Boole 逻辑, 可以分为形式逻辑与数理逻辑两个主要分支, 前者是基础, 而后者则是前者的符号化. 因此, 后者也叫符号逻辑. 本书主要涉及数理逻辑, 以后提到的模糊逻辑则是数理逻辑的自然延伸.

在数理逻辑中, 人们将具有确定真值的陈述句叫做命题, 每个这样的陈述句的真值为 "真" 或 "假", 二者必居且仅居其一.

通常, 用 T 表示真 (true), 用 F 表示假 (false). 命题通常用英文大写字母 A, B, C 等表示.

在数理逻辑中, 习惯上也用 1 表示真, 用 0 表示假. 集合$\{0, 1\}$也称为数理逻辑的真值域. 这就是 "二值逻辑" 名称的由来. 数理逻辑的理论体系源自英国逻辑学家 Boole 的杰出工作. 这也是 "Boole 逻辑" 名称的由来.

如果将以上两个真值 1 和 0 与电路中某个开关的 "连接" 或 "断开" 状态相对应, 那么含有多个开关的逻辑电路就可以用二进制数表示. 基于这样的考虑, 人们在数理逻辑与计算机结构之间建立起紧密的联系. 因此, 数理逻辑已经成为计算机数字逻辑电路设计与程序设计的重要理论基础.

简单的命题被称为原子命题, 而由原子命题通过命题联结词构成的命题被称为复合命题. 常用的命题联结词有五个: 否定 $\neg$, 用于表达 "不 $\cdots$ ", 或 "非 $\cdots$ " 等否定命题; 合取 $\wedge$, 用于表达 "$\cdots$ 且 $\cdots$ " 形式的复合命题; 析取 $\vee$, 用于表达 "$\cdots$ 或 $\cdots$ " 形式的命题; 蕴涵 $\rightarrow$, 用于表达 "如果 $\cdots$ 那么 $\cdots$ " 形式的条件命题; 等价 $\leftrightarrow$, 用于表达 "$\cdots$ 当且仅当 $\cdots$ " 形式的双条件命题.

本书用小写字母 p, q, r 等表示原子命题. 而由五个命题联结词构成的复合命题的真值由表 1.1 确定.

表 1.1　命题联结词真值表

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \to q$	$p \leftrightarrow q$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

利用这个真值表, 可以通过原子命题的真值确定复合命题的真值.

经典逻辑的命题演算系统包括语法和语义两个部分, 语法是经典逻辑的形式结构, 而语义则是经典逻辑含义的具体说明.

以下几个定义给出了经典逻辑的语法结构.

定义 1.1　设 $S = \{p_1, p_2, \cdots\}$ 是由可数多个元素组成的集合, S 中的元素称为原子公式. 按照以下三条规则生成所有的合式公式 (well-formed formula), 简称为公式, 或 wff:

(i) 原子公式是公式;

(ii) 如果 A 和 B 是公式, 那么 $\neg A, A \wedge B, A \vee B, A \to B, A \leftrightarrow B$ 都是公式;

(iii) 仅由有限次使用以上规则 (i) 和 (ii) 生成的符号串是公式.

全体公式组成的集合记作 $F(S)$.

在逻辑学中, 为了减少括号的使用, 通常对命题联结词的优先级做这样的规定: 非 $\neg$ 作为一级运算, 而合取 $\wedge$ 与析取 $\vee$ 作为二级运算, 蕴涵 $\to$ 和等价 $\leftrightarrow$ 作为三级运算, 同级运算按照从左到右的顺序进行.

由以上定义可知, 公式集 $F(S)$ 仍然是可数集, 即在 $F(S)$ 与自然数集合 $\mathbf{N}$ 之间存在一一对应.

2. *经典命题演算形式系统*

逻辑的核心问题是推理, 推理的基础是一些 “好” 公式, 推理的手段是一些 “可靠” 的规则. 在数理逻辑中, “好” 公式以 “公理” 或者 “定理” 的形式出现, 而 “可靠” 的规则以 “推理规则” 的形式出现.

定义 1.2　命题演算系统 $\mathcal{L}$ 包含以下两个部分:

(i) 公理　系统 $\mathcal{L}$ 有以下三个公理模式:

(L1) $A \to (B \to A)$,

(L2) $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$,

(L3) $(\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$,

其中 A, B, C 是任意公式.

(ii) 推理规则 系统 $\mathcal{L}$ 有一条推理规则:

(MP 规则) 由 $A \to B$ 和 A 可推出 B.

系统 $\mathcal{L}$ 的所有公理组成的集合记作 $\mathrm{Axm}(\mathcal{L})$.

这里的推理规则 MP(modus ponens) 通常称为**分离规则**, 或假言推理规则、取式规则.

细心的读者可能已经注意到, 在系统 $\mathcal{L}$ 中, 出现的命题联结词只有 $\neg$ 和 $\to$. 这是为了使形式系统简洁, 便于理论研究. 事实上, 其余联结词可以由 $\neg$ 和 $\to$ 按照以下方式导出:

$$A \wedge B = \neg(A \to \neg B), \quad A \vee B = \neg(\neg A \wedge \neg B), \quad A \leftrightarrow B = (A \to B) \wedge (B \to A).$$

后面将提出评判公式优劣的标准 (见定义 1.6), 在那些标准下可以证明, 系统 $\mathcal{L}$ 的公理都是 "好" 公式, 而且系统 $\mathcal{L}$ 的推理规则 MP 是 "可靠" 的推理规则.

请读者注意, 系统 $\mathcal{L}$ 有三条公理模式, 实际上有可数多条公理. 因此, 集合 $\mathrm{Axm}(\mathcal{L})$ 也是可数集.

以下定义规定了逻辑体系 $\mathcal{L}$ 中的推理形式.

定义 1.3 设 $A \in F(S)$, $\Gamma \subseteq F(S)$.

(i) 称 A 是系统 $\mathcal{L}$ 的**定理**, 或 A 在系统 $\mathcal{L}$ 中可证, 或系统 $\mathcal{L}$ 可证 A, 记作 $\vdash A$, 如果存在公式序列

$$A_1, A_2, \cdots, A_n \tag{1-1}$$

使得 $A = A_n$, 且对于任意 $i = 1, 2, \cdots, n, A_i \in \mathrm{Axm}(\mathcal{L})$, 或者 A_i 由公式序列 (1-1) 中位于它之前的两项 A_j, A_k $(j < i,\ k < i)$ 通过规则 MP 推得. 公式序列 (1-1) 称为 A 的证明, n 叫该证明的长度.

系统 $\mathcal{L}$ 的所有定理之集记作 $\mathrm{Thm}(\mathcal{L})$.

(ii) 称 A 是 Γ 推论, 记作 $\Gamma \vdash A$, 如果存在公式序列 (1-1), 使得 $A = A_n$, 且对于任意 $i = 1, 2, \cdots, n$, $A_i \in \mathrm{Axm}(\mathcal{L}) \cup \Gamma$, 或者 A_i 由 (1-1) 中位于它之前的两项 A_j, A_k $(j < i,\ k < i)$ 通过规则 MP 推得. 公式序列 (1-1) 称为从 Γ 到 A 的**推演**, n 叫该推演的长度.

所有 Γ 推论之集记作 $\mathrm{Ded}(\Gamma)$.

在系统 $\mathcal{L}$ 中, 以下命题给出了三个重要的推理规则, 它们可以在形式推演中像 MP 规则一样被使用.

命题 1.1 假设 $\Gamma \subseteq F(S)$, $A, B, C \in F(S)$. 则

(i) (**演绎定理**) 当 $\Gamma \cup \{A\} \vdash B$ 时, 有 $\Gamma \vdash A \to B$;

(ii) (**三段论规则**, hypothetical syllogism, HS) $\{A \to B,\ B \to C\} \vdash A \to C$;

(iii) (**拒取式规则**, modus tollens, MT) $\{A \to B,\ \neg B\} \vdash \neg A$.

以下命题列举了系统 $\mathcal{L}$ 中一些重要的定理, 用于以后讨论的参照.

命题 1.2 以下形式的公式都是系统 $\mathcal{L}$ 的定理:

(T1) $A \to A$;

(T2) $\neg\neg A \to A$;

(T3) $A \to \neg\neg A$;

(T4) $(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$;

(T5) $(A \to (B \to C)) \to (B \to (A \to C))$;

(T6) $(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$;

(T7) $\neg A \to (A \to B)$;

(T8) $(A \to B) \vee (B \to A)$.

如下定义的公式集 $F(S)$ 上的可证等价关系是十分重要的逻辑概念.

定义 1.4 假设 $A, B \in F(S)$, 如果

$$\vdash A \to B, \text{且} \vdash B \to A,$$

则称 A 与 B**可证等价**, 记作 $A \sim B$.

不难证明, 可证等价关系 $\sim$ 是公式集 $F(S)$ 上的等价关系, 而且读者可以在数理逻辑教材中找到系统 $\mathcal{L}$ 的许多可证等价的公式对.

3. 语义与完备性

接下来简要介绍经典逻辑的语义理论.

定义 1.5 映射 v: $F(S) \to \{0,1\}$称为公式集 $F(S)$ 的**赋值**, 如果对于任意 A, $B \in F(S)$, 有

(i) $v(\neg A) = 1 - v(A)$;

(ii) $v(A \to B) = 1$ 当且仅当 $v(A) \leqslant v(B)$.

此时, 也称 $v(A)$ 是 A 在 v 下的赋值.

公式集 $F(S)$ 的全体赋值组成的集合记作 Ω, 称之为系统 $\mathcal{L}$ 的**语义**.

根据赋值的定义可知, 赋值由它在原子公式集合 S 上的值唯一确定. 如果 $U \subseteq S$, 那么由 U 确定的赋值 v_U 可以按照以下方式定义:

$$v_U(p) = \begin{cases} 1, & p \in U, \\ 0, & p \in S \backslash U. \end{cases} \tag{1-2}$$

如果在集合$\{0,1\}$上按表 1.2 方式引入对应于$\neg$和 $\to$ 的运算, 则公式集 $F(S)$ 的赋值就是从 $F(S)$ 到$\{0, 1\}$的代数同态.

表 1.2 {0,1}上的运算

x	y	$\neg x$	$x \to y$
1	1	0	1
1	0		0
0	1	1	1
0	0		1

以下定义给出了公式优劣的评判标准.

定义 1.6 设 $A \in F(S)$.

(i) 如果对于任意 $v \in \Omega$, 总有 $v(A)=1$, 则称 A 为重言式, 记作 $\vDash A$;

(ii) 如果对于任意 $v \in \Omega$, 总有 $v(A)=0$, 则称 A 为矛盾式;

(iii) 如果存在 $v_0 \in \Omega$, 使得 $v_0(A)=1$, 则称 A 为可满足式.

读者容易看出, 重言式永远是真的, 因而是"好"公式, 矛盾式永远是假的, 因而是"差"公式, 而可满足式则是"好于"矛盾式的公式.

关于公式集与公式之间的真假关系, 有以下概念.

定义 1.7 设 $U \subseteq S$, $v=v_U$ 是由 U 确定的赋值, $A \in F(S)$, $\Gamma \subseteq F(S)$.

(i) 如果 $v(A)=1$, 则称 U 满足 A, 也称 U 是 A 的**模型**, 记作 $U \vDash A$;

(ii) 如果 U 是 Γ 中每个公式的模型, 则称 U 是 Γ 的模型, 记作 $U \vDash \Gamma$;

(iii) 如果对于 S 的任何子集 U, 当 $U \vDash \Gamma$ 时, 有 $U \vDash A$, 则称 Γ 满足 A, 记作 $\Gamma \vDash A$.

注意, 根据定义 1.7 的第 (iii) 条, Γ 满足 A 的含义是, 对于任意赋值 v, 如果 $v(\Gamma)\subseteq\{1\}$, 则必有 $v(A)=1$.

以下两个定理反映了系统 $\mathcal{L}$ 语法与语义的和谐性.

定理 1.1(标准完备性) 系统 $\mathcal{L}$ 是完备的, 即对于任意 $A \in F(S)$,

$$\vdash A \quad \text{当且仅当} \quad \vDash A.$$

这个定理的第一部分指出, 系统 $\mathcal{L}$ 的每个定理都是重言式. 这个性质又称为系统 $\mathcal{L}$ 的**可靠性**. 定理的第二部分是说, 每个重言式都在系统 $\mathcal{L}$ 中可证. 这个性质有时也称为系统 $\mathcal{L}$ 的完备性.

定理 1.1 可以推广为如下更一般的结论.

定理 1.2(强标准完备性) 系统 $\mathcal{L}$ 是强完备的, 即对于任意 $A \in F(S)$, $\Gamma \subseteq F(S)$, 有

$$\Gamma \vdash A \quad \text{当且仅当} \quad \Gamma \vDash A.$$

在当代逻辑理论中, 以上两个定理反映的逻辑性质分别称为标准完备性和强标准完备性.