

工科高等数学习题集

上册

黄华 李盈科 张瑜 肉孜阿吉 编著

Gongke Gaodeng Shuxue Xitiji



中国农业大学出版社

CHINA AGRICULTURAL UNIVERSITY PRESS

工科高等数学习题集

上 册

黄 华 李盈科 张 瑜 肉孜阿吉 编著

中国农业大学出版社

• 北京 •

图书在版编目(CIP)数据

工科高等数学习题集(上册)/黄华等编著. —北京:中国农业大学出版社, 2013. 8
ISBN 978-7-5655-0731-1

I. ①工… II. ①黄… III. ①高等数学-高等学校-习题集 IV. ①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 134152 号

书 名 工科高等数学习题集(上册)

作 者 黄 华 李盈科 张 瑜 肉孜阿吉 编著

策划编辑 赵 中 董夫才

责任编辑 洪重光

封面设计 郑 川

出版发行 中国农业大学出版社

社 址 北京市海淀区圆明园西路 2 号

邮政编码 100193

电 话 发行部 010-62818525, 8625

读者服务部 010-62732336

编辑部 010-62732617, 2618

出 版 部 010-62733440

网 址 <http://www.cau.edu.cn/caup>

e-mail cbsszs @ cau. edu. cn

经 销 新华书店

印 刷 北京时代华都印刷有限公司

版 次 2013 年 8 月第 1 版 2013 年 8 月第 1 次印刷

规 格 787×1 092 16 开本 8 印张 193 千字

定 价 17.00 元

图书如有质量问题本社发行部负责调换

前 言

《工科高等数学习题集》是参考同济大学数学系编写的《高等数学》(第六版)内容次序编写的。本习题集分上、下册,内容包括函数与极限、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用、微分方程、空间解析几何与向量代数、多元函数微分法及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数共 12 章的习题、综合题、自测题及期末模拟试题。本习题集适合高等院校的工科本科生使用。

本习题集的内容编写具有如下特点:

一、基本点、重点、难点突出:本习题集紧密衔接同济大学数学系编写的《高等数学》(第六版)教材内容,选题注重基本概念、基本定理和基本运算,重难点突出,题型难易程度适中,并在每一章配备自测题,帮助学生迅速而全面地掌握所有基本知识点。

二、密切结合考研、有利考研学生:本习题集每一章配备了一定数量的综合题,题型紧密结合考研大纲,处处渗透考研经常考到的考点、重点等,同时添加了部分典型的历年考研试题,这对有志于报考硕士研究生的学生具有很大的促进作用,让学生对考研的内容、范围、难易程度有较清楚的认识和把握。

三、利于作业的布置与批改:作业的布置与批改,是教学工作的一个重要部分。组织好学生的作业,有利于帮助学生巩固和消化所学的知识点,并使知识转化为技能和技巧。编写本习题集一方面可减轻学生抄作业题的负担,方便课后作业的布置和作业本的保留,同时有助于培养学生独立思考的习惯;另一方面,也便于老师批改和讲解作业。

本习题集上册由新疆农业大学数理学院黄华、李盈科、张瑜和肉孜阿吉编著。

在本习题集的编写中,得到了新疆农业大学教务处、数理学院德娜教授、教材科帕尔哈提科长的关心和支持,得到了中国农业大学出版社的大力支持,谨在此一并表示感谢。

由于编者水平有限,书中难免有不妥和错误之处,恳请广大读者批评指正,我们不胜感激。

编 者

2013 年 7 月于乌鲁木齐

目 录

第一章 函数与极限	1
综合练习题一	13
第一章自测题	17
第二章 导数与微分	19
综合练习题二	29
第二章自测题	31
第三章 微分中值定理与导数的应用	33
综合练习题三	49
第三章自测题	53
第四章 不定积分	57
综合练习题四	65
第四章自测题	67
第五章 定积分	71
综合练习题五	82
第五章自测题	85
第六章 定积分的应用	89
综合练习题六	95
第六章自测题	97
第七章 微分方程	99
综合练习题七	113
第七章自测题	115
工科高等数学(上册)模拟试题	119

第一章 函数与极限

第一节 映射与函数

1. 填空题

(1) 函数 $y = \frac{1}{x} - \sqrt{4-x^2}$ 的定义域是_____.

(2) 若 $y = f(x)$ 的定义域是 $(0, 1)$, 则 $f(x+a)$ 的定义域为_____, $f(x^2)$ 的定义域为_____.

(3) 设 $f_1(x) = \sqrt{x^2}$, $f_2(x) = \ln e^x$, $f_3(x) = (\sqrt{x})^2$, $f_4(x) = e^{\ln x}$, $f_5(x) = x$, 则相同的两个函数是_____.

(4) 设 $y = 2^{x-1} + 5$, 则其反函数为_____.

(5) 设 $f(x) = x^3$, $g(x) = \cos x$, 则 $f(g(x)) =$ _____, $g(f(x)) =$ _____.

(6) $f(x) = \ln(-x + \sqrt{1+x^2})$ 的奇偶性为_____.

(7) $f(x) = \tan(6\pi x - 5)$ 的最小正周期为_____.

(8) $y = \ln \sin \frac{x}{2}$ 是由_____、_____和_____复合而成.

(9) $y = (\arcsin \sqrt{1-x^2})^2$ 是由_____、_____、_____和_____复合而成.

(10) 已知偶函数 $f(x)$ 在 $[0, 4]$ 上是单增函数, 则 $f(-\pi)$ 和 $f(\log_{\frac{1}{3}} 27)$ 的大小关系是_____.

(11) 设 $f(n) = \begin{cases} n+13, & n \leq 2000 \\ f(f(n-18)), & n > 2000 \end{cases}, n \in \mathbf{N}$, 则 $f(2000) =$ _____.

(12) 已知函数 $y = a^x + b$ 的图像过点 $(1, 4)$, 其反函数的图像过 $(2, 0)$, 则 $a =$ _____.

2. 设 $A = (-\infty, -5) \cup (5, +\infty)$, $B = (-11, 3)$, 求 $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $A \setminus (A \setminus B)$.

3. 设 $f(x) = \begin{cases} x, & x < 0, \\ 1, & 0 \leq x < 1, \\ 2x-1, & x \geq 1. \end{cases}$ 问 f 是不是 $\mathbf{R}$ 到 $\mathbf{R}$ 的映射?

是不是单射? 是不是满射?

4. 已知 $f(x) = \sqrt{1-x}$, $g(x) = x^2 - 4$, 分别求 $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ 及定义域.

6. 某停车场收费标准为: 凡停车不超过 2 h 的, 收费 5 元, 以后每多停 1 h (不到 1 h 按 1 h 计), 增加收费 1.5 元, 但是停车时间最长不能超过 5 h, 试建立停车费用与停车时间之间的函数关系.

5. 设 $\varphi(x) = \begin{cases} |\sin x|, & |x| < \frac{\pi}{3} \\ 0, & |x| \geq \frac{\pi}{3} \end{cases}$, 求 $\varphi\left(\frac{\pi}{6}\right)$, $\varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right)$, $\varphi(0)$,

并作出 $y = \varphi(x)$ 的图形.

第二节 数列的极限

1. 观察如下数列 $\{x_n\}$ 的变化趋势, 写出它们的极限:

(1) $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$

(2) $\left\{(-1)^n \frac{1}{n}\right\}$

(3) $\left\{\frac{n-1}{n+1}\right\}$

2. 根据数列的定义证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{2n+1} = \frac{3}{2}$.

3. 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, 数列 $\{y_n\}$ 有界, 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$.

第三节 函数的极限

1. 根据函数极限的定义证明:

(1) $\lim_{x \rightarrow 2} (4x-5) = 3$

(2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+x^2}{3x^2} = \frac{1}{3}$

2. 当 $x \rightarrow 3$ 时, $y = x^2 \rightarrow 9$, 问当 δ 等于多少时, 使当 $|x - 3| < \delta$ 时, $|x^2 - 9| < 0.001$?

* 4. 证明 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 的充要条件是 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时的左、右极限均为 A .

3. 求 $f(x) = \frac{|x|}{x}$ 当 $x \rightarrow 0$ 时的左、右极限, 并说明 $x \rightarrow 0$ 时 $f(x)$ 的极限是否存在.

第四节 无穷小与无穷大

1. 填空题:

(1) 凡无穷小量皆以_____为极限.

(2) 在_____条件下, 直线 $y=c$ 是函数 $y=f(x)$ 的水平渐近线.

(3) 在_____条件下, 直线 $x=x_0$ 是函数 $y=f(x)$ 的垂直渐近线.

(4) 在同一过程中, 若 $f(x)$ 是无穷大, 则_____是无穷小.

(5) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ _____ 是 $f(x) = A + \alpha$ (其中 $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha = 0$).

2. 根据定义证明: 当 $x \rightarrow 2$ 时, $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 2}$ 是无穷小.

3. 根据定义证明: 当 $x \rightarrow 0$ 时, $y = \frac{1 + 2x}{x}$ 是无穷大. 问 x 满足什么条件时, 能使 $|y| > 10^8$?

4. 无穷小的商是否一定是无穷小? 举例说明之.

第五节 极限运算法则

1. 填空题:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 5}{x - 3} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{x^2 - 3}{x^4 + x^2 + 1} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$(3) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(4 + \frac{1}{x} \right) \left(5 - \frac{1}{x^2} \right) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{3x^2 - 2x + 1} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{3x^2 - 2x + 1} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$(8) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(2n+1)(3n-2)}{6n^3} = \underline{\hspace{2cm}}$$

5. 下列函数当 $x \rightarrow \infty$ 时, 均具有极限, 把它表示为常数(极限值)与一个无穷小的形式.

$$(1) y = \frac{x^3 + 1}{x^3 - 1}$$

$$(2) y = \frac{1 - 2x^2}{1 + x^2}$$

2. 计算下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 5x + 4}$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{3^n} \right)$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right)$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} x \cos \frac{1}{x}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+1}{(x-2)^2}$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\arctan x}{x}$$

第六节 极限存在准则

两个重要极限

1. 填空题:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 5x}{x} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 7x} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{\frac{1}{x}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x = \underline{\hspace{2cm}}$$

2. 计算下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} x \cot x$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \sin x}$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \sin \frac{x}{2^n}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x$$

3. 利用极限存在准则证明:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + \frac{1}{n}} = 1;$$

(2) 数列 $\sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \dots$ 的极限存在.

第七节 无穷小的比较

1. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $2x^2 - x^3$ 与 $x + x^2$ 相比, 哪一个高阶无穷小?

2. 当 $x \rightarrow 1$ 时, 无穷小 $1 - x$ 和 (1) $1 - x^2$, (2) $\frac{1}{2}(1 - x^2)$ 是否同阶? 是否等价?

3. 证明当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sec x - 1 \sim \frac{x^2}{2}$.

4. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 试决定下列各无穷小对 x 的阶数:

(1) $x^3 + 1000x^2$

(2) $x + \sin x$

5. 利用等价无穷小的性质, 求下列极限:

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x}$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{\sin x}{3}} - 1}{x}$

第八节 函数的连续性与间断点

1. 讨论 $f(x) = \begin{cases} x, & |x| \leq 2 \\ 2, & |x| > 2 \end{cases}$ 的连续性, 并作出函数的图形.

2. 讨论 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n} - 1}{x^{2n} + 1} x$ 的连续性, 若有间断点, 判断其类型.

3. 下列函数在指出的点处间断, 说明这些间断点属于哪一类. 如果是可去间断点, 补充或改变函数的定义使它连续.

$$(1) y = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 6x + 5}, x = 1, x = 5;$$

$$(2) y = \cos^2 \frac{1}{x}, x = 0.$$

第九节 连续函数的运算与 初等函数的连续性

1. 求 $f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 - x - 3}{x^2 + x - 6}$ 的连续区间, 并求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$.

2. 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^3 - 5x + 6}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{2x^2}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{4x^2 + x} - \sqrt{4x^2 - x})$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{x}}$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} \ln \frac{\sin x}{x}$$

3. 设函数

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 1, \\ a + x, & x \geq 1. \end{cases}$$

如何选择 a , 使得 $f(x)$ 成为在 $(-\infty, +\infty)$ 内的连续函数?

第十节 闭区间上连续函数的性质

3. 证明:若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, $a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < b (n \geq 3)$, 则在 (x_1, x_n) 内至少有一点 ξ , 使 $f(\xi) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n}$.

1. 证明方程 $x^5 - 3x = 1$ 至少有一个根介于 1 和 2 之间.

2. 证明方程 $\sin x + x + 1 = 0$ 在开区间 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 内至少有一个根.