尚实图书 东华出品

SHUXUE JIANMO YU SHUXUE SHIYAN

数学建模与数学实验

主编 李路

東華大學出版社

数学建模与数学实验

主编 李 路
编者 周 雷 方 涛 肖 翔
江开忠 张学山
主审 袁震东

東華大學出版社

内容简介

本书介绍了数学建模的基本方法，包括微分方程模型、线性规划与动态规划模型、图论与网络模型、多元统计分析模型、模糊综合评价决策模型、优化与进化算法模型等，附录给出了数学建模论文的写作要点. 各章不仅介绍相关模型的基本理论和方法，并结合具体案例和数学软件Matlab，强调具体问题的模型的建立、求解和分析等整个过程.

本书可作为本科生和研究生数学建模、数学实验等课程的教材和参考书，也可作为参加数学建模竞赛的辅导书以及工程技术人员学习数学建模的参考用书.

图书在版编目(CIP)数据

数学建模与数学实验/李路主编. —上海：东华大学出版社，2013.7

ISBN 978-7-5669-0314-3

Ⅰ.①数…　Ⅱ.①李…　Ⅲ.①数学模型—高等数学—实验—高等学校—教材　Ⅳ.①O141.4②O13—33

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 159465 号

责任编辑：杜亚玲
文字编辑：念　宇
封面设计：潘志远

数学建模与数学实验
主编　李　路
出　　版：东华大学出版社(上海市延安西路 1882 号，200051)
本社网址：http://www.dhupress.net
天猫旗舰店：http://dhdx.tmall.com
营销中心：021-62193056　62373056　62379558
印　　刷：苏州望电印刷有限公司
开　　本：710 mm×1 000 mm　1/16
印　　张：9.5
字　　数：200 千字
版　　次：2013 年 7 月第 1 版
印　　次：2013 年 7 月第 1 次印刷
书　　号：ISBN 978-7-5669-0314-3/O・014
定　　价：25.00 元

前　言

数学建模的教学尝试,始于20世纪70年代末,其教学理念是将数学与工程技术、管理科学、计算机科学紧密联系在一起,培养学生运用数学思维和方法解决实际问题的能力.数学建模课程的开设改变了传统的知识灌输型数学教育方式.数学实验是计算机技术和数学软件引入教学后出现的新生事物,是数学教学体系、内容和方法改革的一项创造性的尝试.数学实验概括地讲包含两部分内容,即"数学的实验"和"数学应用的实验"."数学的实验"是用计算机及有关的工具软件解决数学问题;"数学应用的实验"是用计算机、工具软件及数学知识和方法求解其它学科领域的实际问题.

20世纪60—70年代美、英等国家的一些学校开设了一门称为"数学建模"的课程,着重讲授一些把实际问题归纳为数学模型的方法,以培养建模能力。1986年开始的美国大学生数学建模竞赛推动了数学建模课程的普及.20世纪80年代初,数学建模作为一门崭新的课程进入我国高校,萧树铁先生1983年在清华大学首次为本科生讲授数学模型课程.1987年由姜启源教授编写了我国第一本数学建模教材.

数学建模课程早期教学活动的成功使我们认识到高等教育除了传授知识以外,还应注重对学生综合素质的培养,尤其应当创造一定的机会和环境让学生们去运用书本知识,在运用过程中开拓他们的进取精神、创新精神和竞争意识.在国家教育部关于"高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革"计划中,已把"数学实验"列为高校非数学类专业的数学基础课之一.1991年中国开始了由教育部高教司和中国工业与应用数学学会联办的每年一届的全国大学生数学建模竞赛.受这一竞赛的影响,从1993年至今,数学建模教学在全国各高校迅速发展起来,目前几乎所有的高校都开设这门课程或相似名称的课程.

本书是上海工程技术大学教学团队多年来在数学建模与数学实验教学和竞赛辅导工作中的积累,在讲解数学模型的过程中,选取近年来数学建模竞赛的试题作

为教学内容,注重于在教学过程中培养学生分析问题和解决问题的综合能力.在这个过程中,结合计算机等手段,培养学生独立完成从建立数学模型、模型的求解、模型理论解释、计算结果分析等完整的解决问题的过程。正如数学建模竞赛的口号“一次参赛,终生受益”所说的,给学生一次完整的参与,对学生能力的提高起到较好的效果,这种训练是课本知识的讲授难以代替的.

本书内容包括微分方程模型、线性规划与动态规划模型、图论与网络模型、多元统计分析模型、模糊综合评价决策模型、优化与进化算法模型,每章包含相应的程序和习题.书中大部分内容的基础是高等数学、线性代数和概率统计,可作为工科和管理学科开设数学建模、数学实验等课程的教学用书或参考书.

本书是在上海工程技术大学数学教学部面向工科和管理学科的本科生和研究生开设的数学建模和数学实验的公选课的讲稿基础上,在基础数学建模教练组多年来辅导我校本科生和研究生参加全国数学建模竞赛的基础上编写而成.李路编写了第1章、第4章和第7章,江开忠编写了第5章,肖翔编写了第2章,周雷编写了第3章,方涛编写了第6章,张学山编写了附录.全书由李路统稿,袁震东教授审稿.

感谢上海工程技术大学基础教学学院张子厚教授、许伯生老师以及数学建模教练组的全体老师的帮助.

由于编者水平有限,书中存在不少错误和不当之处,敬请各界同仁和广大读者给予批评指正,编者将不胜感激.

编 者

2013年5月

目　录

第1章　绪　论

20世纪60年代以来，随着计算机技术的迅速发展，数学的应用不仅在工程技术、自然科学等领域发挥着越来越重要的作用，而且以空前的广度和深度向经济、管理、金融、生物、医学、环境、地质、人口、交通等新的领域渗透，所谓数学技术已经成为当代高新技术的重要组成部分.

数学是研究现实世界数量关系和空间结构的科学，在它产生和发展的历史中，一直是和各种各样的应用问题紧密相关的. 数学的特点不仅在于概念的抽象性、逻辑的严密性，结论的明确性和体系的完整性，而且在于它应用的广泛性. 随着科学技术的迅速发展和计算机的日益普及，人们对各种问题的要求越来越精确，使得数学的应用越来越广泛和深入，特别是知识经济时代，数学科学的地位发生了巨大的变化，它正在从国家经济和科技的后备走到前沿. 经济发展的全球化、计算机技术的迅猛发展，数学理论与方法的不断扩充使得数学已经成为当代高科技的一个重要组成部分，数学已经成为一种能够普遍实施的技术. 应用数学的意识和能力已经成为理工科大学生知识和能力体现的一个重要方面.

1.1　数学建模的概念

1.1.1　什么是数学建模

数学模型是一种模拟，是用数学符号、数学式子、程序、图形等对实际研究问题本质属性的抽象和简洁的刻划，它或能解释某些客观现象，或能预测未来的发展规律，或能为控制某一现象的发展提供某种意义下的最优策略或较好策略. 数学模型一般并非现实问题的直接翻版，它的建立常常既需要人们对现实问题深入细微的观察和分析，又需要人们灵活巧妙地利用各种数学知识. 这种应用知识从实际研究问题中抽象、提炼出数学模型的过程就称为数学建模.

数学建模是一种数学的思考方法，是运用数学的语言和方法，通过抽象、简化建立能近似刻画并“解决”实际问题的一种强有力的数学手段.

我们也可以这样直观地理解这个概念：数学建模是一个让纯粹数学家（指只懂

数学不懂数学在实际中的应用的数学家)变成物理学家、生物学家、经济学家,甚至心理学家等等的过程.

应用数学去解决各类实际问题时,建立数学模型是十分关键的一步,同时也是十分困难的一步.建立教学模型的过程,是把错综复杂的实际问题简化、抽象为合理的数学结构的过程.要通过调查、收集数据资料,观察和研究实际对象的固有特征和内在规律,抓住问题的主要矛盾,建立起反映实际问题的数量关系,然后利用数学的理论和方法去分析和解决问题.这就需要深厚扎实的数学基础,敏锐的洞察力和想象力,对实际问题的浓厚兴趣和广博的知识面.

1.1.2 数学建模与数学的区别

数学模型与数学的不同主要体现在以下三个方面:

1. 研究内容:数学研究的主要是对象的一般规律,数学模型研究的是对象的特殊个性.

2. 研究方法:数学的主要研究方法是演绎推理,数学模型的主要研究方法是归纳和演绎.

3. 研究结果:数学更强调结果的正确性、完备性,强调严密的逻辑推理,数学模型的结果往往和模型的假设等有关,其结论需要接受实际的检验.

1.2 数学建模的方法和步骤

1.2.1 数学建模的方法

数学建模面对的实际问题多种多样,所以没有适用于所有问题的统一方法.从方法论的意义上来说,建模方法主要分为机理分析和测试分析两种.

机理分析方法是根据对客观事物特性的认识,找出反映内部机理的数量规律,建立的模型有明确的物理或现实意义.

测试分析方法是将对象看作“黑箱”,通过对量测数据的统计分析,找出与数据拟合最好的模型.

实际问题中,常常将两种方法结合起来,用机理分析建立模型结构,用测试分析确定模型中的参数.

1.2.2 数学建模的步骤

数学建模的过程和具体的问题、建模的目的等有关,没有固定的模式.对于常用的机理分析方法,通常有以下的一些步骤:

1. 模型准备

了解问题的实际背景，明确其实际意义，掌握对象的各种信息. 以数学思想来包容问题的精髓，数学思路贯穿问题的全过程，进而用数学语言来描述问题. 要求符合数学理论，符合数学习惯，清晰准确.

2. 模型假设

根据实际对象的特征和建模的目的，对问题进行必要的简化，并用精确的语言提出一些恰当的假设.

3. 模型建立

在假设的基础上，利用适当的数学工具来刻划各变量常量之间的数学关系，建立相应的数学结构，如微分方程模型、规划模型、优化模型、概率统计模型、图论模型等.

4. 模型求解

利用获取的数据资料，运用不同的数学方法，对模型的所有参数做出计算(或近似计算)，特别是数学软件的使用.

5. 模型分析和检验

对所得的结果进行数学上的分析. 将模型分析结果与实际情形进行比较，以此来验证模型的准确性、合理性和适用性. 如果模型与实际较吻合，则要对计算结果给出其实际含义，并进行解释. 如果模型与实际吻合较差，则应该修改假设，再次重复建模过程.

1.3 数学建模的例子

本节通过几个建模的例子来说明数学建模的过程，让读者进一步理解数学建模的含义.

1.3.1 椅子问题

把椅子往坡度不大但不平的地面上一放，通常开始只有三只脚着地，放不稳，然而只要稍稍挪动几次，就可以四脚着地，放稳了. 试论证这种现象的合理性.

1. 模型假设

对椅子和地面都要作一些必要的假设：

(1) 椅子的四条腿一样长，椅脚与地面接触可视为一个点，四脚的连线为正四边形.

(2) 地面高度是连续变化的，无间断点(没有像台阶那样的情况)，即地面可视为数学上的连续曲面.

(3) 对于椅脚的间距和椅脚的长度而言,地面是相对平坦的,使椅子在任何位置至少可以有三只脚同时着地.

2. 模型建立

如何用数学语言表示四只脚同时着地的条件、结论是问题的关键.

首先用变量表示椅子的位置,由于椅脚的连线呈正方形,所以可以中心为坐标原点,椅脚的连线为坐标轴建立坐标系(如图 1.1). 正方形绕中心的旋转正好代表了椅子的位置如图的改变,可以用旋转角度 θ 这一变量来表示椅子的位置.

如果用变量 $f_A(\theta)$ 表示椅脚 A 与地面的竖直距离. 当 $f_A(\theta)$ 为 0 时,表示椅脚 A 着地了;当椅脚不着地时,有 $f_A(\theta)>0$. 椅子挪动位置说明距离 $f_A(\theta)$ 是位置变量 θ 的连续函数.

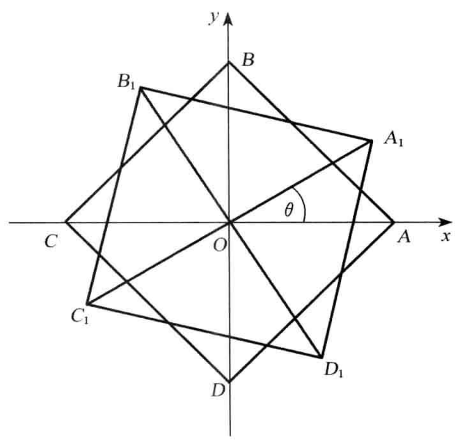

图 1.1

由于正方形的中心对称性,只要设两个距离函数就行了,记 A、C 两脚与地面距离之和为 $f_1(\theta)=f_A(\theta)+f_C(\theta)$,$B$、$D$ 两脚与地面距离之和为 $f_2(\theta)=f_B(\theta)+f_D(\theta)$,显然 $f_1(\theta)$、$f_2(\theta)\geqslant 0$,由假设 2 知 $f_1(\theta)$、$f_2(\theta)$都是连续函数,再由假设 3 知 $f_1(\theta)$、$f_2(\theta)$至少有一个为 0. 当 $\theta=0$ 时,不妨设 $f_1(\theta)=0$, $f_2(\theta)>0$,这样通过旋转改变椅子的位置使四只脚同时着地,就归结为如下命题:

命题 已知 $f_1(\theta)$、$f_2(\theta)$都是关于θ的连续函数,对任意θ, $f_1(\theta)*f_2(\theta)=0$,且 $f_1(0)=0$, $f_2(0)>0$,则存在 θ_0,使 $f_1(\theta_0)=f_2(\theta_0)=0$.

3. 模型求解

将椅子旋转 90°,即对角线 AC 和 BD 互换,由 $f_1(0)=0$, $f_2(0)>0$ 可知 $f_1(\pi/2)>0$, $f_2(\pi/2)=0$. 令 $h(\theta)=f_2(\theta)-f_1(\theta)$,则 $h(0)>0$, $h(\pi/2)<0$,由 $f_1(\theta)$、$f_2(\theta)$ 的连续性知 $h(\theta)$ 也是连续函数,由零点定理,必存在 $\theta_0(0<\theta_0<\pi/2)$使 $h(\theta_0)=0$, $f_1(\theta_0)=f_2(\theta_0)$,由 $g(\theta_0)*f(\theta_0)=0$,所以 $g(\theta_0)=f(\theta_0)=0$.

4. 模型评价

模型巧妙在于用变量 θ 表示椅子的位置,用变量 θ 的函数表示椅脚与地面的距离,从而将椅脚着地的问题变成函数零点的求解.

1.3.2 商人过河

有三名商人各带一名仆人要乘船从此岸过河到达彼岸,但河中只有一条仅能

容纳两人的小船. 三个仆人商定,在河的任意岸边,只要仆人的人数超过商人,他们就杀人越货. 乘船的方案由商人决定. 如果商人知道了仆人的阴谋,需要制定怎样的过河方案,才能确保三名商人都是安全的?

这道题从数学建模的角度来说,可以归结为多步决策过程,利用状态转移来描述和求解.

1. 模型建立

设小船第 i 次开始渡河时,此岸的商人人数记为 s_i,仆人人数记为 p_i,则彼岸商人人数记为 $3-s_i$,仆人人数记为 $3-p_i$. 则二元组(s_i, p_i)为可描述当时两岸人数情况的状态. 商人安全的状态包括:

$\Omega=\{(3,3),(3,2),(3,1),(3,0),(2,2),(1,1),(0,0),(0,1),(0,2),(0,3)\}$. 显然要求$(s_i, p_i)\in\Omega$.

设 $c_i=(cs_i, cp_i)$ 表示第 i 次渡河方案的小船搭载的商人和仆人的人数,满足 $1\leqslant cs_i+cp_i\leqslant 2$,且状态转移方程为表示为

$$\begin{cases} s_{i+1}=s_i+(-1)^i\cdot cs_i, \\ p_{i+1}=p_i+(-1)^i\cdot cp_i. \end{cases}$$

完成全部商人和仆人渡河,即经过 n 次(n 为奇数)状态转移从状态 $(s_1, p_1)=(3,3)$ 到$(s_{n+1}, p_{n+1})=(0,0)$.

2. 模型求解

对于商人数和仆人数较少的情况下,可以用图解法求解,该方法更为直观易懂.

如图 1.2 所示,横坐标表示此岸的商人数 s,纵坐标表示此岸的仆人数 p,安全状态用灰色圆点表示,安全决策为从状态(3, 3)出发,沿着方格线每次移动 1～2 格(表示船上搭载 1～2 人),经过的位置均为安全状态,奇数次移动是朝着左下方移动,图中用实线表示,偶数次移动是朝着右上方移动,图中用虚线表示,最终到达状态(0, 0).

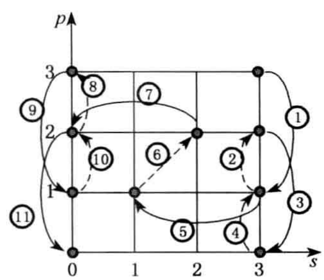

图 1.2

1.3.3　双重玻璃的隔温效果

北方很多房间的窗户是双层的,即在窗户上装两层玻璃,且中间留有一定的空隙. 在玻璃总的厚度相同的情况下,比较双层玻璃窗与单层玻璃窗的热量流失?

1. 模型假设

(1) 设双层玻璃窗的两玻璃的厚度都为 d,两玻璃的间距为 l;单层玻璃窗的玻璃厚度为 $2d$,所用玻璃材料相同,如图 1.3.

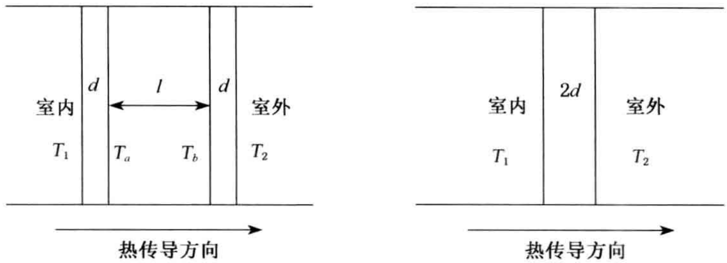

图 1.3

(2) 假设窗户的封闭性能很好，两层玻璃之间的空气不流动，即忽略热量的对流，只考虑热量的传导.

(3) 室内温度 T_1 和室外温度 T_2 保持不变，且 $T_1 > T_2$，热传导过程处于稳定状态，即单位时间通过单位面积的热量为常数.

(4) 玻璃材料均匀，导热系数为常数.

2. 模型建立

对于厚度为 d 的均匀介质，两侧温度差为 $\Delta T = T_1 - T_2$，则单位时间由温度高的一侧向温度低的一侧通过单位面积的热量 Q 满足

$$Q = k \cdot \frac{\Delta T}{d},$$

其中 k 为导热系数.

设玻璃的导热系数为 k_1，空气的导热系数为 k_2.

(1) 先考虑单层玻璃的单位时间，单位面积的热量传导

$$Q_1 = k_1 \cdot \frac{T_1 - T_2}{2d}.$$

(2) 考虑双层玻璃情形

此时热量先通过厚度为 d 的玻璃传导到两层玻璃的夹层空气中，再通过空气传导，再通过厚度为 d 的玻璃传导；设内层玻璃的外侧温度为 T_a，外层玻璃的内侧温度为 T_b；则有：

$$Q_2 = k_1 \frac{T_1 - T_a}{d} = k_2 \frac{T_a - T_b}{l} = k_1 \frac{T_b - T_2}{d}. \tag{1.1}$$

3. 模型求解

由(1.1)式可得

$$\begin{cases} T_a + T_b = T_1 + T_2, \\ T_a - T_b = \dfrac{k_1}{k_2} \dfrac{l}{d}(T_b - T_2), \end{cases}$$

记 $s=\dfrac{k_1 l}{k_2 d}$,则

$$2T_b=T_1+T_2-s(T_b-T_2),$$

$$(T_b-T_2)=\frac{1}{2+s}(T_1-T_2),$$

$$Q_2=\frac{1}{(2+s)}\frac{k_1}{d}(T_1-T_2).$$

考虑两者之比

$$\frac{Q_2}{Q_1}=\frac{2}{2+s},$$

显然 $Q_2<Q_1$,也即双层玻璃的热量损失较小.

4. 模型分析与应用

常用玻璃的导热系数 $k_1=4\times10^{-2}\ \mathrm{W/(m\cdot k)}$,而不流通,干燥空气的导热系数 $k_2=2.5\times10^{-2}\ \mathrm{W/(m\cdot k)}$,

若取 $\dfrac{l}{d}=h$,则

$$\frac{Q_2}{Q_1}\leqslant\frac{1}{1+8h}. \tag{1.2}$$

若取 $h=4$,则 $\dfrac{Q_2}{Q_1}\leqslant\dfrac{1}{33}$,由此可见双层玻璃的保暖效果是相当可观的.

我国北方寒冷地区的建筑物,通常采用双层玻璃. 由(1.2)式,$h=4$ 时,$Q_2\approx\dfrac{1}{33}Q_1$,$h$ 再大,热量传递的减少就不明显了,再考虑到墙体的厚度,所以建筑规范通常要求 $h\approx4$.

习 题 1

1. 在一个边长为 1 的正三角形内最多能找到几个点,而使这些点彼此间的距离大于 0.5.

2. 能否在 8×8 的方格表 $ABCD$ 的各个空格中,分别填写 1, 2, 3 这三个数中的任一个,使得每行,每列及对角线 AC, BD 的各个数的和都不相同? 为什么?

3. 椅脚着地问题中,如果椅子的四脚呈长方形的情形,椅子放在不平的地面,能放稳吗?

4. 人、狗、鸡、米均要过河,船上除 1 人划船外,最多还能运载一物,而人不在场时,狗要吃鸡,鸡要吃米,问人、狗、鸡、米应如何过河?

5. 商人过河问题中,如果是 4 名商人,各带一名仆人过河,同样的河中只有一条仅能容纳两人的小船. 仆人商定,在河的任意岸边,只要仆人的人数超过商人,他们就杀人越货. 商人能想出安全的过河方案吗? 如果小船能容纳三人,结果如何?

6. 双重玻璃的功效问题中,若单层玻璃窗的玻璃厚度也是 d,结果将如何? 如果采用三层玻璃,它和厚度为 $3d$ 的玻璃相比,功效如何?

第 2 章　微分方程模型

微分方程建模是数学建模的重要方法，因为许多实际问题的数学描述将导致求微分方程的定解问题. 把形形色色的实际问题化成微分方程的定解问题，大体上可以分为以下几步：

1. 根据实际要求确定研究的量（自变量、未知函数、必要的参数等）并确定坐标系；
2. 找出这些量所满足的基本规律（物理的、几何的、化学的或生物学的等）；
3. 运用这些规律列出方程和定解条件.

在实际的微分方程建模过程中，主要利用微元分析、常见定律、以及近似模拟等方法建立数学模型. 不论应用哪种方法，还是上述方法的综合应用，通常要根据实际情况，做出一定的假设与简化，并要把模型的理论或计算结果与实际情况进行对照验证，以修改模型使之更准确地描述实际问题进而达到预测的目的.

本章介绍几类常见的微分方程模型，以及如何运用 Matlab 软件求出微分方程的数值解.

2.1　传染病模型

各种传染病一直是严重危害人类健康的主要病患，2003 年春天的非典型肺炎（SARS）给人们的生命财产带来了极大的危害，2009 年的甲型 H1N1 流感再次向人们敲响了警钟，传染病问题不容忽视. 因此，认识传染病的传播规律，对预防传染病的蔓延具有十分重要的意义. 在一次传染病的传播过程中，被传染者与哪些因素有关？如何预报传染病高峰的到来？这些问题都是有关专家与学者十分关注的课题.

传染病传播涉及因素很多，例如传染病人的多少，传染率的大小，治愈率的大小，人口的出生和死亡等，如果还要考虑人员的迁入与迁出，潜伏期的长短以及预防疾病的宣传等因素的影响，那么传染病的传播变得非常复杂. 下面由简单到复杂，将建模的思考过程作一示范，读者可以从中得到很好启发.