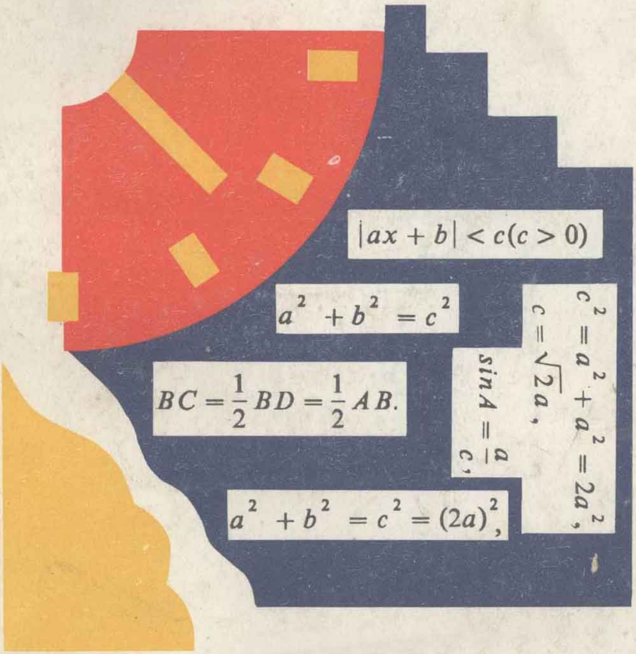
上册

竞赛

数学读本 初中册

周春荔 主编



北京工业大学出版社

竞赛数学读本

初中册

（上）

主编　周春荔

作者　吴建平　唐守默
　　　魏仲和　孔令颐
　　　李延林　周春荔 等

北京工业大学出版社

内 容 简 介

《竞赛数学读本(初中册)》是关于竞赛数学(奥林匹克数学)的普及读本,它是根据中国数学会普委会制订的《初中数学竞赛大纲》以及作者长期从事数学竞赛活动的实践经验及科研成果编写而成.内容基本覆盖了初中数学竞赛的内容,由浅入深,采用从课内到课外逐步引伸扩充的方式形成系统的教材,体现了数学课外活动"以课内教学为主,课外活动为辅,激发广大同学学习数学的兴趣,在普及基础上提高"的原则.本书可供初中各年级数学课外小组和数学奥林匹克学校学生作为教材使用,也可供数学奥林匹克教练员、广大中学数学教师及高师数学专业学生参考。

初中册分上、下两册出版。

竞赛数学读本

初中册(上)

周春荔 主编

*

北京工业大学出版社出版发行

各 地 新 华 书 店 经 销

徐 水 宏 远 印 刷 厂 印 刷

*

1993 年 7 月第 1 版　1993 年 7 月第 1 次印刷

787×1092 毫米 32 开本　10.625 印张　238 千字

印数:1～11000 册

ISBN 7－5639－0295－3/G・154

定价:5.50 元

(京)新登字 212 号

写在前面

数学竞赛是一项深受中学生中的数学爱好者喜爱的活动. 在国外称数学竞赛为"数学奥林匹克". 奥林匹克(Olympic)起源于古希腊人关于灵活、力量与美的竞赛,最初限于体育方面,而后又扩充到棋类等智力方面. 随着科学的发展,灵活与美的较量又反映到数学领域,因为数学是锻炼思维的体操. 数学奥林匹克竞赛活动达到了思维中灵活、准确、迅速与美的比赛的境界.

然而,像今天这样以激发数学才能和引起数学兴趣为目的、中学生们自愿参加的数学竞赛通常被认为是从 1894 年匈牙利组织的竞赛开始的,至今已快 100 年了. 我国中学生数学竞赛从 50 年代起至今也有近 40 年的历史了. 特别是近十年以来的发展,可以看出数学奥林匹克现在已经形成数学教育中的一股潮流,数学竞赛有益于培养和选拔人材的作用已得到公认. 我国中学生数学奥林匹克活动已跻身于世界先进行列,有力地推动了数学思想、方法、知识的广泛普及. 与此同时,许多专家都在逐渐探索奥林匹克数学的新体系,并试图编写一些教材来适应普及奥林匹克数学的需要.《竞赛数学读本(初中册)》就是这方面的一次尝试.

《读本》既要体现奥林匹克数学的内容,又要与现行中学教材自然衔接,适当扩充,以适应广大初中学生,包括初一学生也可以逐次阅读. 其内容基本覆盖了初中各级各类数学竞赛所涉及的知识、方法,体现了中国数学会普及工作委员会制订的《初中数学竞赛大纲》中规定的要求. 所选例题、习题,绝

大多数是国内外的数学竞赛题．通过分类分析讲解，别有一番情趣．对提高解题能力和应赛能力是很有帮助的．

学好数学，一定要动手解题．建议读者要亲自动手做每节后面的练习题及每章后面的综合练习题，必要时可以查阅书中的提示与答案．

本书是北京数学会普及工作委员会与首都师范大学数学研究所奥林匹克数学课题组的老师们组织了部分有经验的数学奥林匹克教练员共同编写的．第一章是吴建平同志执笔的；第二章是唐守默同志执笔的；第三章是魏仲和同志执笔的；第四章是孔令颐同志执笔的；第五章是李延林同志执笔的；第六章是周春荔同志执笔的．全书的框架构想与统稿是由周春荔同志完成的．此外还有曹树杰、张立群、侯瑞兰、吴艳妹等同志参加了本书的有关技术工作．

本书尚有许多不完备之处，希望读者在使用中多提宝贵意见，以便再版时充实完善它．

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.c

目　　录

第一章 实数初步

在初中阶段,同学们所学数的概念首先由小学算术中的数扩充到有理数,然后扩充到实数.

我们首先介绍有理数及其四则运算,然后在整数范围内,较系统地介绍数的整除性等初等数论的初步常识.这部分内容是竞赛数学中的基本内容.此后,我们通过有理数与无理数一节初步介绍判定有理数与无理数的一些方法.最后介绍实数的绝对值与非负数的应用,因为平方后非负是实数的基本特征.

第一节 有理数及其运算

在小学阶段的算术,介绍过自然数、零,还有分数、小数,甚至还学过圆周率 π 这个数.小学阶段所学过的这些数,不妨统称为"算术数".

1.由于表示具有相反意义的量的需要,我们引进了正与负的概念并区分出正的量与负的量.并规定正的量用小学学过的不等于 0 的算术数前面加"+"(读正)来表示,也可把"+"号省略不写.这样,带有正号的不等于 0 的算术数就叫做正数,如 $+5$、$+\frac{1}{2}$、$+0.7$ 等等都是正数;负的量用小学学过的不等于 0 的算术数前面加"-"(读负)号来表示,像 -1、$-\frac{3}{7}$、-1.5 等等带有负号的数叫负数.零既不是正数,也不是负数.从现在起,我们说整数,它包括正整数、零和负整数:

我们说的分数，包括正分数与负分数. 整数和分数统称有理数，其关系如表所示：

$$
\text{有理数}\begin{cases}\text{整数}\begin{cases}\text{正整数}\\ 0\\ \text{负整数}\end{cases}\\ \text{分数}\begin{cases}\text{正分数}\\ \text{负分数}\end{cases}\end{cases}
\qquad \boxed{\text{正有理数}} \quad \boxed{\text{负有理数}}
$$

例 1　a 是有理数，$-a$ 是负数吗？

分析：若 a 是不为 0 的算术数，$-a$ 表示负数，但题设条件给的 a 是有理数，因此应分情况讨论.

答：若 a 是正有理数，则 $-a$ 是负数.

若 a 是负有理数，则 $-a$ 是正数.

若 $a=0$，则 $-a=0$.

所以当 a 是有理数时，$-a$ 不一定就是负数.

2. 从图形的观点，我们可以用数轴上的点来表示有理数.

所谓数轴，就是规定了原点、正方向和单位长度的直线. 其中原点、正方向和单位长度称为数轴三要素. 只要画数轴，就应标明这三个要素.

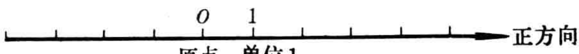


图　1-1

凡有理数都能用数轴上的点来表示. 我们知道，只有符号不同的两个数，叫做互为相反数. 零的相反数是零. 显然，与原点等距离的两点所表示的数，互为相反数. 这个相等的距离，称为绝对值. 因此，一个正数的绝对值是它本身；一个负数的绝对值是它的相反数；零的绝对值是零. 结合数轴很容易理解

相反数、绝对值的概念以及比较有理数的大小.

例 2 大于 -8.14 并且不是自然数的整数共有多少个?

解:画出数轴(图 1-2),标出 -8.14 的位置. 大于 -8.14

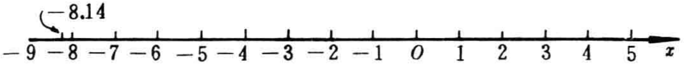


图 1-2

的整数均分布在 -8.14 点的右方. 数一数可知,其中不是自然数的整数只有 -8、-7、-6、-5、-4、-3、-2、-1、0 共九个.

例 3 a 代表有理数,那么 a 和 $-a$ 的大小关系是( )

(A)a 大于 $-a$. (B)a 小于 $-a$.

(C)a 大于 $-a$ 或 a 小于 $-a$. (D)a 不一定大于 $-a$.

解:答(D).

因为若 $a=0$,则 $-a=0$,此时 $a=-a$. 显然(A)、(B)、(C)均不成立. 由于 a 大于 $-a$ 不真,所以 a 不一定大于 $-a$ 是成立的.

例 4 如图 1-3,数轴上标出了有理数 a、b、c 的位置,其中 0 是原点,则 $\frac{1}{a}$、$\frac{1}{b}$、$\frac{1}{c}$ 的大小次序是( )

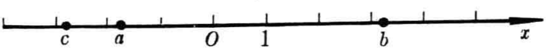


图 1-3

(A)$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}>\frac{1}{c}$. (B)$\frac{1}{b}>\frac{1}{c}>\frac{1}{a}$.

(C) $\frac{1}{b}>\frac{1}{a}>\frac{1}{c}$.　(D) $\frac{1}{c}>\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$.

解：选择(B).

因为从图中易见 $|c|>|a|$，推出 $\frac{1}{c}>\frac{1}{a}$，排除(A)、(C). 但 $\frac{1}{b}>0$，所以必有 $\frac{1}{b}>\frac{1}{c}>\frac{1}{a}$.

例 5　下面说法中不正确的是(　)

(A)有最小的自然数.

(B)没有最小的正有理数.

(C)没有最大的负整数.

(D)没有最大的非负整数.

答：选择(C).

因为 1 是最小的自然数，所以(A)成立. 正有理序列 0.1，0.01，0.001，…，$\underbrace{0.00\cdots01}_{n\text{个}0}$，…，无穷多个，没有最小的一个，可知(B)成立. 负整数中最大的是 -1，所以(C)不成立. (D)显然成立.

3. 有理数范围内可以进行加、减、乘、除(除数不为 0)四则运算. 对于相同的有理数相乘，规定了简捷算法——有理数乘方运算. 除了要熟悉上述运算法则外，还应注意到：①有理数对加、减、乘、除(除数不为 0)的运算结果是封闭的(仍为有理数)；②在有理数范围内，加法、乘法交换律、结合律成立，乘法对加法的分配律成立；③由于有了正、负数，加法与减法的界限消失，加减可以互相转化，统一为代数和. 在有理数范围内，乘法与除法也可以互相转化，如 $a\div b=a\times\frac{1}{b}$. 总之，加法与减法，乘法与除法的辩证联系显示出来了.

例 6　给出下列 20 个数

87、91、94、88、93、91、89、87、92、86、90、92、88、90、91、86、

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

89、92、94、88

试求这20个数之和.

解:选90为0点,则原序列与90之差可依次写为-3、$+1$、$+4$、-2、$+3$、$+1$、-1、-3、$+2$、-4、0、$+2$、-2、0、$+1$、-4、-1、$+2$、$+4$、-2.这20个数的代数和为-2.所以原20个数之和为$90\times 20-2=1800-2=1798$.

例7 在数1,2,3,…,1989前面无论如何放置"+"、"−"号,并且顺次完成所指出的运算,求证:其代数和一定不等于0.

证明:整数前添加"+"、"−"号,并不改变整数的奇、偶性,所以这1989个整数代数和的奇偶性是确定的.由于代数和的奇偶性与$(1-2)+(3-4)+\cdots+(1987-1988)+1989=-994+1989=995$奇偶性相同,是个奇数,所以所指出的1989个数任意添加"+"、"−"号后的代数和永远不会等于偶数0.

例8 计算$1987\times 19861986-1986\times 19871987$.

解:
$$\begin{aligned}&1987\times 19861986-1986\times 19871987\\&=1987\times 1986\times 10001-1986\times 1987\times 10001\\&=0.\end{aligned}$$

例9 计算

$2+(-3)+(-4)+5+6+(-7)+(-8)+9+10+(-11)+(-12)+13+14+15=?$

解:$2+(-3)+(-4)+5=0$

$6+(-7)+(-8)+9=0$

$10+(-11)+(-12)+13=0$

所以原式总和$=14+15=29$.

例10 计算

$1992-\{1991-1992[1991-1990(1991-1992)^{1990}]\}=?$

解：原式$=1992-\{1991-1992[1991-1990]\}$

$=1992-\{1991-1992\}=1992-(-1)$

$=1993.$

例 11 在下面所示的每个小方格中都填入一个整数.

z			9				x				2					y

并且任意三个相邻格子中所填数之和都等于 5. 试计算 $\frac{x+y+z}{xyz}$之值.

解：容易断定与 x 相邻的两个数分别为 9 与 2. 即

9	x	2

因为 $9+x+2=5$，则 $x=-6$.

依任意三个相邻格子中所填数之和都等于 5，分别确定出每个格子中所填之数如下：

9	-6	2	9	-6	2	9	-6	2	9	-6	2	9	-6	2	9	-6
z			9				x				2					y

断定 $y=-6$，$z=9$. 所以

$$\frac{x+y+z}{xyz}=\frac{(-6)+(-6)+9}{(-6)(-6)\cdot 9}=\frac{-3}{324}=-\frac{1}{108}.$$

例 12 如图 1-4，a、b、c、d、e、f 均为有理数，图中各行、各列以及两条对角线上三个数之和都相等. 试计算 $\left(\frac{a+b+c+e+f}{d}\right)^2$ 之值.

3.7	a	b
c	d	e
-1.1	4.9	f

图 1-4

解:由　$3.7+d+f=-1.1+4.9+f$

得　$d=0.1$.

由　$3.7+a+b=-1.1+d+b$

得　$3.7+a=-1.1+0.1$

$\therefore$　$a=-4.7$.

由此得　$a+d+4.9=-4.7+0.1+4.9=0.3$,

即每行、每列、两对角线之和均等于 0.3.

于是由　$3.7+c+(-1.1)=0.3$

得　$c=-2.3$.

由　$3.7+a+b=0.3$,其中 $a=-4.7$,

得　$b=0.3-(-4.7)-3.7=1.3$.

由　$-1.1+4.9+f=0.3$

得　$f=-3.5$.

由　$b+e+f=0.3$,其中　$b=1.3$,$f=-3.5$,

得　$e=2.5$.

于是

$$\left(\frac{a+b+c+e+f}{d}\right)^2$$

$$=\left[\frac{(-4.7)+(1.3)+(-2.3)+2.5+(-3.5)}{0.1}\right]^2$$

$$=\left[\frac{(-4.7)+(-1.0)+(-1.0)}{0.1}\right]^2$$

$$=\left[\frac{-6.7}{0.1}\right]^2=67^2$$

$$=4489.$$

说明:例 11、例 12 都是以比较趣味的形式给出有理数之间的关系,然后要发现利用这些关系,确定各有理数之值,最后达到进行有理数的四则运算,这是一种比较综合的题型.

例 13　计算

$$0.0125\times 3\frac{1}{5}-\frac{1}{7}(-87.5)\div\frac{15}{16}\times\frac{16}{15}+(-2^2)-4=?$$

说明：本题主要考查有理数的运算顺序，以及运算的基本功. 因此，我们建议读者自己动手演算，完成演算过程.

答案为 $6\frac{59}{225}$.

如果你运算结果与上述答案不符，就请你认真检查一下你运算中哪个地方失误了. 这对你是很有好处的！

4. 有理数是整数与分数的统称. 由于整数可以看作分母为 1 的分数，所以有理数都是两个整数的比. 为什么叫有理数？其“理”就在于它能表示为两个整数之比，因而有理数(rational)外文原意是“有比数”.

设 a、b 均为整数，$b\neq 0$，a、b 互质，则 $\frac{a}{b}$ 为有理数的一般表示形式.

例 14 求证：任意两个有理数之间都存在无穷多个有理数.

证明：设结论不成立，则至少存在两个有理数 a、b(设 $a<b$)，它们之间的有理数只有有限个(n 个). 不妨设由小到大这 n 个有理数为

$$a<c_1<c_2<\cdots<c_n<b.$$

这时，由 c_n 为有理数，b 为有理数，则 $\frac{c_n+b}{2}$ 也必为有理数，

且
$$a<c_n<\frac{c_n+b}{2}<b,$$

即在 a、b 之间存在异于已给的 n 个有理数的新的有理数 $c_{n+1}=\frac{c_n+b}{2}$，这与题设矛盾.

所以，任意两个有理数之间都存在无穷多个有理数.

说明：本题结论在数轴上看，有理数的分布具有稠密性.

例 15 边长为 1 的正方形的对角线的长度不能用有理数表示.

证:设边长为 1 的正方形对角线可以表示为有理数 $\frac{a}{b}$,a、b 为正整数,且 $(a,b)=1$,则依勾股定理知

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2=2,$$

即 $$a^2=2b^2.$$

$\therefore\quad 2\mid a^2\Rightarrow 2\mid a.$

不妨设 $a=2a_1$,其中 a_1 为正整数,代入得

$$(2a_1)^2=2b^2.$$

化简得 $b^2=2a_1{}^2.$

$\therefore\quad 2\mid b^2\Rightarrow 2\mid b.$

即 a、b 之间有公因数 2,与 $(a、b)=1$ 矛盾.

$\therefore$ 边长为 1 的正方形的对角线之长不能表示为有理数.

说明:有理数在数轴上分布是那样稠密,每个有理数都能用数轴上的点表示,但例 15 表明,反过来,数轴上的点并不一定都能表示为有理数.虽然有理数很稠密,但还没有填满数轴.没有被有理数填满的数轴上的那些点,以后将用不能表示为两个整数比的一种新数——无理数去填充它.

习题 1-1(答案见第 282 页)

1.设有三个有理数 a、b、c,它们满足 $\frac{|a|}{a}+\frac{|b|}{b}+\frac{|c|}{c}=1$.求

$$\frac{|abc|}{abc}=?$$

2.给出下面三个命题

(1)若 a、b、$a-b$ 都是有理数,则 $a+b$ 也是有理数.

(2)若 k 是整数,则 2^k 也是整数.

(3)若 a、b 都是有理数，则 a^b 也是有理数.

上述命题中正确命题的个数是(　　)

(A)0 个.(B)1 个.(C)2 个.(D)3 个.

3. 有理数 $-\frac{1}{a}$ 的值一定不是(　　)

(A)正整数.(B)负整数.(C)负分数.(D)0.

4. 若 $a<0$,$b>0$,且 $|a|<|b|$,那么下列式子中结果是正数的是(　　)

(A)$(a-b)(ab+a)$.　　(B)$(a+b)(a-b)$.

(C)$(a+b)(ab+a)$.　　(D)$(ab-b)(a+b)$.

5. 张梅求出了 1991 个有理数的平均数后，粗心地把这个平均数和原来的 1991 个有理数混在一起，成为 1992 个有理数，而忘掉哪个是平均数了. 如果这 1992 个有理数的平均数恰为 1992，问原来的 1991 个有理数的平均数是多少?

6. 四个互不相等的正数 a、b、c、d 中，a 最大，d 最小，且 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. 试确定 $a+d$ 与 $b+c$ 的大小关系.

7. 三个互不相等的有理数，既可表示为 1、$a+b$、a 的形式，又可表示为 0、$\frac{b}{a}$、b 的形式. 试求 $a^{1992}+b^{1993}$ 之值.

8. 一个负有理数 a 在数轴上的位置为 A，问：在数轴上与 A 相距为 d 个单位($d>0$)的点中与原点距离最远的点所对应的数是什么?

第二节　数的整除性

形如…,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,…的数称为整数. 两个整数的和、差、积仍然是整数，但两个整数的商却不一定是整数了.

设 a、b 是任意整数，其中 $b\neq 0$，如果能找到一个整数 q，使得

$$a=b\cdot q$$

成立，那么就称 a 能被 b 整除，记作 $b|a$. 此时称 b 为 a 的约数，称 a 为 b 的倍数. 如果 a 不能被 b 整除，则记作 $b\nmid a$.

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com