概率论与数理统计

周 慧 编

NEUPRESS
东北大学出版社

概率论与数理统计

周　慧　编

东北大学出版社

·沈　阳·

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计 / 周慧编 .— 沈阳 : 东北大学出版社, 2005.8

ISBN 7-81102-184-6

Ⅰ. 概…　Ⅱ. 周…　Ⅲ. 概率论-高等学校-教材；数理统计-高等学校-教材　Ⅳ. O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第 090495 号

出 版 者：东北大学出版社
地址：沈阳市和平区文化路 3 号巷 11 号
邮编：110004
电话：024—83687331（市场部）　83680267（社务室）
传真：024—83680180（市场部）　83680265（社务室）
E-mail：neuph @ neupress.com
http：//www.neupress.com
印 刷 者：东北大学印刷厂
发 行 者：东北大学出版社
幅面尺寸：140mm × 203mm
印　　张：6.25
字　　数：180 千字
出版时间：2005 年 8 月第 1 版
印刷时间：2005 年 8 月第 1 次印刷
印　　数：1～2600 册
责任编辑：牛连功　　责任校对：丽　萍
封面设计：唐敏智　　责任出版：杨华宁

定　　价：15.90 元

前　言

随着我国高等教育从精英教育向大众化教育的转变和高校人才培养的多元化，对教材的要求也呈现出多元化的需求特点．在多年的教学实践中，我们也深切地感受到，现行的许多教材在与教学对象的相容性等方面存在着或多或少的欠缺．因此，编写既适合本校的办学层次又兼顾本校各专业学生的需求、易读好懂、实用性强、利教利学的教材势在必行．

在学院领导的热情关怀和指导下，结合多年的教学实践，我们组织编写了这套体现基础课“以应用为目的，以必需、够用为度”的教学原则，适应新的教育形式和新的教学需求的数学系列教材．这套教材包括：高等数学（上册、下册）、线性代数、概率论与数理统计、复变函数与积分变换．其特点是：注重数学基本内容的选取和基本概念的阐述，不过分追求理论的严密性及过多的定理证明；注重基本运算技能的训练，不过分追求复杂的计算；对数学课程中的一些难点，采取强调直观描述、强化几何说明的方式处理；在表述上注重精炼准确，力求通俗易懂，总体上突出体现了少而精，强化应用的数学教育的新理念．

本书为这套系列教材中的《概率论与数理统计》部分．内容包括：随机事件及其概率，一维随机变量的分布及数字特征，多维随机变量，抽样及

其分布，参数估计，假设检验，方差分析及回归分析.

本书对概率论的基础知识作了扼要的介绍，对一些定理和多维随机变量的内容作了简化处理. 对数理统计的基础知识作了比较详细的阐述，并配备了一定数量的有实践意义的例题和习题.（附有习题答案）另外还配有少量标有“*”号的内容及若干用到综合条件求解的习题（在分隔横线下）供不同专业的师生在教学中选用. 本书突出体现了少而精，强化应用的数学教育的新理念，可作为高等学校工科类、经济管理类概率论与数理统计课程的教材，也可作为其他非数学类专业同名课程的教学参考书.

本系列教材由王晓光副教授主持编写. 王群副教授和唐芳英副教授对本书的初稿提出了许多宝贵意见，在此一并表示感谢.

有于编者水平所限，书中难免有疏漏与不妥之处，敬请读者不吝指教.

编　者

2005 年 7 月

目　　录

第1章 随机事件及其概率

1.1 随机事件及其运算

1.1.1 随机事件

在自然界和人类的社会活动中，人们会遇到各种各样的随机现象，如：抛掷一枚硬币可能会出现有字的一面，也可能会出现有花的一面；再如：同一炮手用同一门炮向同一目标射击，各次的弹着点却不尽相同. 人们经过长期的实践与观察，发现随机现象虽然对个别的试验或观察来说，无法预知其结果，但在相同条件下进行大量的试验或观察时，却又呈现出某种规律性，如：重复多次地抛掷一枚质地均匀的硬币，则出现有花的一面和出现有字的一面的次数大体相同. 随机现象所呈现的这种规律性被称为统计规律性，概率论和数理统计就是揭示和应用随机现象统计规律性的一门学科.

具备下列几个特点的试验称为随机试验，简称为试验，记为 E.

(1) 重复性：可以在相同的条件下重复进行；

(2) 明确性：每次试验的可能结果不止一个，但事先明确试验的所有可能结果；

(3) 随机性：每次试验之前不能确定哪一个结果会出现.

试验中可能发生的结果称为该随机试验的随机事件，简称事件，通常用字母 A，B，C，…表示.

例 1.1 将硬币有花的一面称为正面，有字的一面称为反面. 在抛掷一枚硬币的随机试验中，A =“出现正面”、B =“出现反面”都是随机事件.

例 1.2 骰子是一个正六面体，每面分别标有“1”，“2”，“3”，“4”，“5”，“6”. 在抛掷一枚质地均匀的骰子且观察向上一面的点数的随机试验中，如令 A =“出现 3 点”，B =“出现奇数点”，C=“出现的点数大于 3”，则它们均为随机事件.

在试验 E 的所有可能发生的结果中有一类最简单最基本的结果，称为基本事件. 如在例 1.2 中，令 A_i =“出现 i 点”($i=1, 2, 3, 4, 5, 6$)，则 A_i 就是基本事件. 而其他的随机事件则可看做是基本事件的集合，称之为复合事件. 如 $B=\{A_1, A_3, A_5\}$，$C=\{A_4, A_5, A_6\}$. 由 E 的全体基本事件构成的集合称为试验 E 的样本空间，记为 Ω. 如例 1.2 的样本空间 $\Omega=\{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6\}$. 这里 B，C 和 Ω 都是复合事件. 显然，对复合事件，当其中的某一个基本事件发生时，便有该复合事件发生. 对于 Ω，由于每次试验时必有一个结果发生，因而事件 Ω 必然发生，故又称 Ω 为必然事件. 与此对应，把空集合 $\varnothing$ 作为特殊的事件，称之为不可能事件，因为它在每次试验中都不会发生. 如在例 1.2 中，“出现的点数小于 6”为必然事件、“出现的点数大于 6” 为不可能事件.

1.1.2 事件间的关系和运算

由集合间的关系不难理解事件间的关系.

设 Ω 为样本空间；A，B，$A_i(i=1, 2, \cdots)$为事件，它们都是 Ω 的子集，则集合之间的关系与事件间的关系可对应如下.

(1) $A\supset B$ 或$B\subset A$：B 的发生必然导致A 发生；

(2) $A=B$：$A\supset B$ 且$B\supset A$，A 与 B 是相同的事件；

(3) $A\cup B$=“A 与 B 至少有一个发生”，又称为 A 与 B 的和事件；

(4) $A\cap B$=“A 与 B 同时发生”，又称为 A 与 B 的积事件，也可记为 AB；

(5) $A-B$=“A 发生而B 不发生”，又称为 A 与B 的差事件；

(6) $A\cap B=\varnothing$：A 与B 不能同时发生，又称 A 与B 互不相容

或互斥；

(7) $A\cap B=\varnothing$ 且 $A\cup B=\Omega$：A 与 B 必有一个且仅有一个发生，又称 A 与 B 互为逆事件(对立事件)，记为 $B=\bar{A}$ 或 $A=\bar{B}$. 显然，$\bar{A}$ 表示的事件为“A 不发生”.

事件间的关系可以利用文氏图(图 1-1)形象地表示出来.

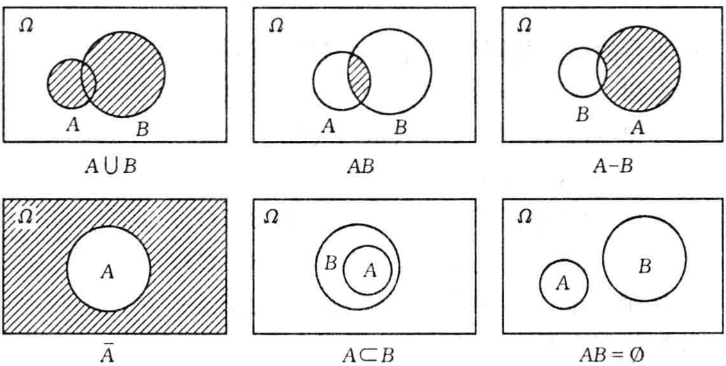

图 1-1

如在例 1.2 中“出现 3 点”即是“出现奇数点”，所以 $A\subset B$；$B\cup C=$“出现 1，3，4，5 点”；$B\cap C=$“出现 5 点”；$B-A=$“出现 1，5 点”；$\bar{B}=$“出现偶数点”；$A\cap\bar{B}=\varnothing$；“出现奇数点”与“出现偶数点”是对立事件.

上述两事件间的关系可以推广至多个事件：

$\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=$“$n$ 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中至少有一个发生”；

$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\cup\cdots=$“可列个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 中至少有一个发生”；

$\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i=A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n=$“$n$ 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 同时发生”；

$\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \cap \cdots =$“可列个事件 A_1，A_2，…，A_n，… 同时发生”；

$A_i \cap A_j = \varnothing$，$i \neq j$ 且 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = \Omega$，表示 A_1，A_2，…，A_n 中必有一个且仅有一个发生. 又称 A_1，A_2，…，A_n 为 Ω 的一个完备事件组.

由集合的运算规则可以得到事件间的运算规则：

交换律　$A \cup B = B \cup A$，$A \cap B = B \cap A$；

结合律　$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$，

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$；

分配律　$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$，

$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$；

对偶律　$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$，$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

分配律和对偶律还可以推广至多个事件的情形.

例 1.3　设 A，B 和 C 是三个事件，则：

(1) 事件“A 发生而 B 与 C 都不发生”$= A\bar{B}\bar{C} = A - B - C = A - (B \cup C)$；

(2) 事件“A 与 B 发生而 C 不发生”$= AB\bar{C} = AB - C$；

(3) 事件“三个事件都发生”$= ABC$；

(4) 事件“三个事件恰好有一个发生”$= A\bar{B}\bar{C} \cup \bar{A}B\bar{C} \cup \bar{A}\bar{B}C$；

(5) 事件“三个事件恰好有两个发生”$= AB\bar{C} \cup A\bar{B}C \cup \bar{A}BC$；

(6) 事件“三个事件至少有一个发生”$= ABC \cup A\bar{B}\bar{C} \cup \bar{A}B\bar{C} \cup \bar{A}\bar{B}C \cup AB\bar{C} \cup A\bar{B}C \cup \bar{A}BC$.

习题 1.1

1. 写出下列随机试验的样本空间.

(1) 将一枚均匀的硬币抛 3 次，观察出现正反面的情况.

(2) 将一枚均匀的硬币抛 3 次，观察出现正面的次数.

(3) 生产某种产品直至得到 10 件正品为止，记录生产产品的总

件数.

(4) 从一批灯泡中任意抽取一只, 测试它的寿命, 设寿命不会超过 T 小时.

(5) 掷两粒骰子, 观察出现的点数之和.

2. 设 A, B, C 是某一试验的3个事件, 用 A, B, C 的运算关系表示下列事件.

(1) A, B, C 都发生;

(2) A, B, C 都不发生;

(3) A 与 B 发生, 而 C 不发生;

(4) A 发生, 而 B 与 C 都不发生;

(5) A, B, C 中至少有一个发生;

(6) A, B, C 中不多于一个发生;

(7) A 与 B 都不发生;

(8) A 与 B 中至少有一个发生.

3. 袋中有十个球, 分别编有 1 至 10 的号码. 从中任取一球, 设:A =“取得球的号码是偶数”; B =“取得球的号码是奇数”; C =“取得球的号码小于 5”.

问: 下述运算分别表示什么事件?

(1) $A\cup B$; (2) AB; (3) AC; (4) $\overline{AC}$; (5) $\overline{B\cup C}$.

---

4. 随机点 x 落在区间$[a, b]$上这一事件记作$\{x \mid a\leqslant x\leqslant b\}$. 设 $\Omega=\{x \mid -\infty<x<+\infty\}$, $A=\{x \mid 0\leqslant x<2\}$, $B=\{x \mid 1\leqslant x<3\}$. 问下述运算分别表示什么事件?

(1) $A\cup B$; (2) AB; (3) $\bar{A}$; (4) $A\bar{B}$.

5. 若要击落飞机必须同时击毁两个发动机或击毁驾驶舱, 记: A_1 =“击毁第一个发动机”; A_2 =“击毁第二个发动机”; B =“击毁驾驶舱”, 试用 A_1, A_2 和 B 表示“飞机被击落”的事件.

1.2 随机事件的概率

在对一个随机现象或试验作描述时，应特别注意两点：一是“事件”；二是“事件发生的可能性”，亦即“事件的概率”.

1.2.1 概率的统计定义

定义 设事件 A 在 N 次重复进行的试验中发生了 n 次，则称 $\frac{n}{N}$ 为事件 A 发生的频率，n 为事件 A 发生的频数.

显然，任何事件的频率都介于 0 与 1 之间.

定义(概率的统计定义) 设事件 A 在 N 次重复进行的试验中发生了 n 次，若当 N 充分大时，频率 $\frac{n}{N}$ 总是稳定在数值 p 附近，且随着 N 的增加，频率愈加稳定，则称频率的稳定值 p 为事件 A 发生的概率，记为 $p=P(A)$.

由频率与概率之间的关系易知，对任何事件 A 都有

$$0\leqslant P(A)\leqslant 1,$$

且

$$P(\Omega)=1,\ P(\varnothing)=0.$$

概率很小(如 0.01，0.05)的事件称为小概率事件. 在一次试验中，小概率事件是几乎不会发生的，这已成为应用概率统计中的一条原则，即“小概率事件实际不发生”，也称“小概率原理”或“实际推断原理”.

1.2.2 概率的性质

性质 1 对任一事件 A，有 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$.

性质 2 $P(\Omega)=1,\ P(\varnothing)=0$.

性质 3 若 $A\cap B=\varnothing$，则

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B). \tag{1-1}$$

证　设在 n 次试验中 $A\cup B$ 发生了 $\mu_{A\cup B}$ 次，A 发生了 μ_A 次，B 发生了 μ_B 次，因 A 与 B 互斥，故 $\mu_{A\cup B}=\mu_A+\mu_B$，从而有频率的关系式

$$\frac{\mu_{A\cup B}}{n}=\frac{\mu_A}{n}+\frac{\mu_B}{n},$$

而频率是概率的稳定值，于是有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B).$$

性质 3 可以推广为：若 A_1，A_2，…，A_m 为两两互不相容事件，则

$$\begin{aligned}P\left(\bigcup_{i=1}^{m}A_i\right)&=P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_m)\\&=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_m).\end{aligned}$$

性质 3 的另一个推广是

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)\ (\text{加法公式}). \tag{1-2}$$

性质 4　$P(A)=1-P(\overline{A})$.　(1-3)

性质 5　若 $A\supset B$，则 $P(A)\geqslant P(B)$.　(1-4)

加法公式及性质 4，5 请读者自证.

1.2.3　古典概型

如果试验具有两个特点：

(1) 基本事件只有有限个；

(2) 每个基本事件发生的可能性相同.

则所讨论的问题称为古典概型. 如掷一枚质地均匀的硬币或骰子的试验就属于古典概型问题.

定义(概率的古典定义)　设样本空间的基本事件总数为 N，且这 N 个事件发生的可能性相同；事件 A 包含了其中的 n 个基本事件. 则

$$P(A)=\frac{n}{N}=\frac{A\text{ 中所包含的基本事件数}}{\text{基本事件总数}}. \tag{1-5}$$

例 1.4　在 9 张分别记有号码 1，2，3，…，9 的卡片中任意抽

取一张，求：

(1) 抽得偶数号码的概率；

(2) 抽得的号码数大于 6 的概率.

解　样本空间 $\Omega=\{1, 2, 3, \cdots, 9\}$，设 $A=$“抽得偶数号码”，$B=$“抽得的号码数大于 6”，则 $A=\{2, 4, 6, 8\}$，$B=\{7, 8, 9\}$. 于是

$$P(A)=\frac{4}{9}, \quad P(B)=\frac{3}{9}.$$

例 1.5　盒中装有 100 只集成电路，其中有 95 只正品，5 只次品. 从盒中任取 3 只，求下列事件的概率：

(1) $A=$“3 只全是正品”；

(2) $B=$“3 只中恰有一只次品”.

解　100 只集成电路中的任意 3 只的组合便构成一个基本事件，因而基本事件总数为 C_{100}^{3}.（这里 C_{n}^{k} 表示从 n 个元素中取出 k 个的组合种数.）又因为抽取是任意的，故每一个基本事件的出现具有等可能性，可按古典概型计算.

(1) 事件 $A=$“3 只全是正品”即为“从 95 只正品中任取三只”，所以 A 包含的基本事件数为 C_{95}^{3}，故

$$P(A)=\frac{\mathrm{C}_{95}^{3}}{\mathrm{C}_{100}^{3}}=0.856.$$

(2) 事件 $B=$“3 只中恰有一只次品”即为“从 5 只次品中任取一只，且从 95 只正品中任取 2 只”，因此 B 包含基本事件数为 $\mathrm{C}_{5}^{1}\cdot\mathrm{C}_{95}^{2}$，故

$$P(B)=\frac{\mathrm{C}_{5}^{1}\cdot\mathrm{C}_{95}^{2}}{\mathrm{C}_{100}^{3}}=0.138.$$

例 1.6　一批产品共有 60 件，其中合格品 55 件，从这批产品中任取 3 件，求其中有不合格品的概率.

解　设 $A=$“取出的 3 件产品中有不合格品”，则 $\overline{A}=$“取出的

3 件都是合格品", 因此

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{C_{55}^{3}}{C_{60}^{3}}=0.233.$$

习题 1.2

1. 已知 $A\subset B$, $P(A)=0.2$, $P(B)=0.3$, 求: (1) $P(\overline{A})$, $P(\overline{B})$; (2) $P(A\cup B)$; (3) $P(AB)$; (4) $P(B\overline{A})$; (5) $P(A-B)$.

2. 已知 A, B 两个事件满足条件 $P(AB)=P(\overline{A}\overline{B})$, 且 $P(A)=p$, 求 $P(B)$.

3. 设 A, B, C 是 3 个事件, 且

$$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4},$$

$$P(AB)=P(BC)=0,\ P(AC)=\frac{1}{8},$$

求 A, B, C 至少有一个发生的概率.

4. 袋中有 18 只白球和 2 只红球, 每次抽取一只, 接连抽取 3 次, 如果抽样按(1) 不放回; (2) 放回两种方式进行, 求所得的 3 只球中恰有 2 只白球的概率.

5. 从标号 1 号到 15 号的试验田中任取 3 块, 求:

(1) 取到试验田中最小号码为 5 的概率;

(2) 取到试验田中最大号码为 5 的概率.

6. 设 20 名运动员中有两名国家队员, 现将运动员平分为两组, 求两组中各有一名国家队员的概率.

---

7. 把一个表面涂有红色的立方体分成 1000 个同样大小的小立方体, 并且从中随意取出一个. 试求恰好取到有两个侧面涂有红色的小立方体的概率.

8. 一只书架上有 6 本数学书和 4 本物理书相邻摆放. 求 6 本数