

全国华罗庚金杯少年数学邀请赛
组织委员会
主试委员会 编

华杯赛 培训教程



蓝天出版社

华杯赛培训教程

执笔：常庚哲 周春荔
邵二湘

一九九九·十

图书在版编目(CIP)数据

华杯赛培训教程/常庚哲等编.-北京:蓝天出版社,
1999.10

ISBN 7-80081-987-6

I. 华… II. 常… III. 数学课-中小学-教学参考资料
IV. G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (1999) 第 67061 号

蓝天出版社出版发行

(北京复兴路 14 号)

(邮政编码:100843)

电话:66983715

新华书店经销

北京图文印刷厂印刷

787×1092 毫米 开本 32 印张 9.25 200 千字

1999 年 11 月第 1 版 1999 年 11 月第 1 次印刷

印数:1—10000

定价:11.00 元

前 言

全国“华罗庚金杯”少年数学邀请赛,自从1986年创始以来,至今已成功地举办了七届。数以千万计的少年儿童积极投身于这一赛事,从中学到了知识,增长了才干,既学习了华老的爱国主义思想又使青少年中爱数学、爱科学的热情更加高涨,从中涌现出大批的科技新苗。

如果把近年来“华杯赛”的试题同第一、第二届的试题相比较,便不难发现:无论从试题本身的难易程度、覆盖面的宽窄、解题方法和技巧,都有了非常大的提高。因此,要想在竞赛中取得好的成绩,对选手进行适当的培训就是十分必要的。培训工作是否能取得成绩,取决于有一支合格的教练员队伍和一套难易适中、有针对性的教材。很明显,一套优秀的教程,首先必然会对教练员队伍成长和壮大起主要的作用。

在市场上,关于小学和初中一年级的数学竞赛辅导书籍,已是不可胜数。在这种条件下,我们再来编写一本类似的教程,就必须具备自己的特色。最重要的特色是,紧密针对“华杯赛”,时刻记住我们的读者对象是未来的“华杯赛”的参赛选手。十多年来的实践,已使“华杯赛”的命题形成了独特的风格,这种风格必然还会保持下去,并发扬光大。作为“华杯赛”的主办单位早就设想请主试委员会的专家学者针对培训未来的“华杯赛”选手编写这样一本教程,这既是众望所归,也是责无旁贷。

参加本书编写的几位老师,都是“华杯赛”主试委员会的成员,有过“华杯赛”命题和阅卷工作的经验。本书尽量避免介绍超出竞赛要求范围之外的知识,主要是试图通过举例向学生讲解思想方法、解题技巧和运算技巧。书中采用的例题,绝大部分选自历届“华杯赛”的题目,使之更具有针对性。从这个意义上说,本教程体现了“华杯赛”历届主试委员会同志们共同智慧的结晶。考虑到小学和初一的学生一般还不具备读长文章的能力和习惯,所以每一讲大致设定在三千字左右。为了更好地同读者沟通,我们采用“分析与解答”来代替通常的“解”,做到边分析,边解答,使得行文活泼、增加可读性。每讲之后,都附有适量的习题,留给学生思考和练习,这些习题也是本书有机的组成部分。

大体上说,本书内容可以分为:(1)算术和代数,(2)几何两部分。几何部分比较单纯,而算术和代数比较庞杂。其中既有与小学和初一教材密切相关的内容,例如:整数、小数和分数的计算,各种求和方法,又有不完全属于教材内容之内的材料。例如:最简单的初等数论、组合的思考和计算等等。我们不敢说这些例题已是包罗万象,但是,可以说一旦掌握了本教程的全部内容,并能加以灵活运用,对青少年的智力开发和思维培养是会收到良好效果的。

从编写本书开始,到1999年10月正式出版,这中间时间相当仓促,缺点和错误是在所难免的,希望广大读者指正,共同把它充实完善。

“华杯赛”培训教程编委会

目 录

（“华杯赛”中的算术和代数问题）

第一讲：整数计算	(1)
第二讲：小数计算	(7)
第三讲：分数计算	(13)
第四讲：估算	(22)
第五讲：裂项求和	(27)
第六讲：比较大小	(34)
第七讲：算式谜	(41)
第八讲：幻方与数阵	(49)
第九讲：计数	(59)
第十讲：平均数	(70)
第十一讲：分数应用题	(77)
第十二讲：比和比例	(86)
第十三讲：工程问题	(95)
第十四讲：一般行程问题	(101)
第十五讲：相遇问题	(109)
第十六讲：追及问题	(117)
第十七讲：奇数与偶数	(125)
第十八讲：质数	(132)
第十九讲：互质	(139)

第二十讲:同余	(144)
第二十一讲:最小和最大	(151)
第二十二讲:数列求和	(159)
第二十三讲:周期性	(169)
第二十四讲:加法原理和乘法原理	(174)
第二十五讲:抽屉原理	(178)
第二十六讲:容斥原理	(185)

(“华杯赛”中的几何问题)

第一讲:平面图形面积的割补计算	(190)
第二讲:三角形中线平分面积	(197)
第三讲:平行四边形的导出三角形	(204)
第四讲:平行四边形的对角线平分面积	(210)
第五讲:等底等高的三角形等积	(217)
第六讲:共边三角形面积与边比	(224)
第七讲:图形的平行移动	(231)
第八讲:图形绕定点的旋转	(236)
第九讲:轴对称与图形的折叠	(243)
第十讲:弦图的妙用	(250)
第十一讲:某些与圆相关的面积计算	(257)
第十二讲:立体图形的表面积和体积	(265)
第十三讲:动手动脑的操作问题	(273)
参考答案	(283)

“华杯赛”中的算术和代数问题

第一讲 整数计算

整数计算是一切求值计算的基础,是小学数学学习的主要内容。

整数计算要求准确、迅速、灵活,这就需要正确、熟练地掌握计算法则,灵活、综合运用运算定律、性质和巧算、速算的规律。

又准确又快捷地进行整数计算,还需要对智力的开发和培养。从观察数据的特征到计算方法的选择,无不需要认真思考。

又准确又快捷地进行整数计算,更需要有良好的意志、品质和学习习惯。一个庞大的数据的采集或计算,不论是哪一步出现细微的差错,整个计算也就报废;任何工作都有出错的可能,如若没有检查、验算,也就谈不上纠正了。

总而言之,计算问题并非是只侧重于技能而轻视思维的智力问题。从某种意义上讲,计算问题恰是智力和非智力的综合性问题,而整数计算更是这一问题的基础了。

例1 1966、1976、1986、1996、2006 这五个数的总和是多少?

分析与解答:

(1) 观察相加的五个数,可以发现:从第二个数开始,每

个数都比前面的数大 10。即第二个数比第一个数大 1 个 10；第三个数比第二个数大 1 个 10，也就是比第一个数大 2 个 10；第四个数比第三个数大 1 个 10，也就是比第一个数大 3 个 10；第五个数比第一个数大 4 个 10。因此：

$$\begin{aligned} & 1966 \times 5 + 10 \times (1 + 2 + 3 + 4) \\ &= 9830 + 100 \end{aligned}$$

这种解法是以第一个数为标准，找出其它各数与第一个数的关系，然后再计算；也可以最后一个数为标准，找出其它各数比这个数少若干个 10 的关系，然后再计算；当然也可以其它各数中一个数为标准，找出其余的数与这个数的关系，然后再计算。一般说，以较小的数为标准，用加法计算比较方便。

(2) 观察这五个相加的数中，正中间的数是 1986。第一个数比 1986 小 20，最后一个数恰好比 1986 大 20；第二个数比 1986 小 10，倒数第二个数比 1986 大 10。这就是说，这五个数正好以 1986 为平均数。因此：

$$\begin{aligned} & 1986 \times 5 \\ &= 9930 \end{aligned}$$

例 2 计算： $1 - 3 + 5 - 7 + 9 - 11 + \cdots - 1999 + 2001$

分析与解答：

(1) 将题中各数的顺序改变，即：从第二个数开始，相邻两数交换位置，可以得到若干个 2。

$$\begin{aligned} & \underbrace{1 + (5 - 3) + (9 - 7) + (13 - 11) + \cdots + (2001 - 1999)}_{(2001 - 1) \div 2 = 500 \text{ (个)}} \\ &= 1 + 2 \times 500 \\ &= 1 + 1000 \\ &= 1001 \end{aligned}$$

(2) 将加上去的数,减去的数分别集中:

$$\begin{aligned}& \underbrace{(1+5+9+13+\cdots+2001)}_{(2001-1)\div 4+1=501(\text{个})} - \underbrace{(3+7+11+\cdots+1999)}_{(1999-3)\div 4+1=500(\text{个})} \\&= \frac{1+2001}{2} \times 501 - \frac{3+1999}{2} \times 500 \\&= 1001 \times (501 - 500) \\&= 1001 \times 1 \\&= 1001\end{aligned}$$

(3) 从有理数的运算法则的角度分析思考,则

$$\begin{aligned}& 1-3+5-7+9-11+\cdots-1999+2001 \\&= \underbrace{(1-3)+(5-7)+(9-11)+\cdots+(1997-1999)}_{500\text{组}} + 2001 \\&= -2 \times 500 + 2001 \\&= -1000 + 2001 \\&= 1001\end{aligned}$$

例3 计算 $11+192+1993+19994+199995$ 所得和数的数字之和是多少?

分析与解答:

相加的五个数分别接近于20、200、2000、20000、200000,所以

$$\begin{aligned}& 11+192+1993+19994+199995 \\&= (20-9)+(200-8)+(2000-7)+(20000-6)+(200000-5) \\&= (20+200+2000+20000+200000)-(9+8+7+6+5) \\&= 222220-35 \\&= 222185\end{aligned}$$

其和数的数字之和是 $2+2+2+1+8+5=20$

例4 $975 \times 935 \times 972 \times ()$

要使这个连乘积的最后四个数字都是0,在括号内最小应填什么数?

分析与解答:

因为 $2 \times 5 = 10$,说明乘数中只要含有质因数2和5,乘积的最后就会出现0。如果因数中有一个2和一个5,乘积的最后就会出现一个0,如果因数中有四个2和四个5,乘积的最后就会出现四个0。

$975 = 39 \times 5 \times 5 \cdots \cdots$ 含有二个5

$935 = 187 \times 5 \cdots \cdots$ 含有一个5

$972 = 243 \times 2 \times 2 \cdots \cdots$ 含有二个2

可以看出,还缺少一个5和二一个2。如果再乘以20,即 $5 \times 2 \times 2 = 20$

就可以满足题目要求了。

$975 \times 935 \times 972 \times (20)$

例5 下面是两个1989位整数相乘!

$$\underbrace{111 \cdots 11}_{1989 \text{ 个 } 1} \times \underbrace{111 \cdots 11}_{1989 \text{ 个 } 1}$$

问:乘积的各位数字之和是多少?

分析与解答:

根据9的倍数的判定法则,1989是9的倍数。 $\underbrace{111 \cdots 11}_{1989 \text{ 个 } 1}$ 也是9的倍数。

事实上, $1989 = 221 \times 9$,

$$111111111 = 12345679 \times 9。$$

所以 $\underbrace{111 \cdots 11}_{1989 \text{ 个 } 1} = \underbrace{1234567901234 \cdots 012345679}_{221 \text{ 个 } 12345679 \text{ 被 } 220 \text{ 个 } 0 \text{ 隔开}} \times 9$

另一方面, $\underbrace{111\cdots 11}_{1989\text{个}1} \times 9 = \underbrace{999\cdots 9}_{1989\text{个}9} = 10^{1989} - 1$

因此

$$\begin{aligned} & \underbrace{111\cdots 11}_{1989\text{个}1} \times \underbrace{111\cdots 11}_{1989\text{个}1} \\ &= 1234567901234\cdots 012345679 \times (10^{1989} - 1) \\ &= 1234567901234\cdots 012345679 \underbrace{000\cdots 00}_{1989\text{个}0} - \\ & \quad \underbrace{123456790\cdots 012345679}_{1988\text{位}} \\ &= 123456790\cdots 01234567 \underset{\uparrow}{8} 987654320987654320 \\ & \quad \cdots 0987654321 \end{aligned}$$

如果把最末一个 1 并到箭头所指的 8 上去, 就可以得到 221 个 12345679 和 221 个 98765432。所以各位数字的和是 $211 \times 81 = 17901$ 。

答: 乘积的各位数字的和是 17901。

练 习

- $2 + 5 + 8 + \cdots + 1999 = (\quad)$ 。
- $1999 - 1998 + 1997 - 1996 + 1995 - 1994 + \cdots + 7 - 6 + 5 - 4 + 3 - 2 + 1 = (\quad)$ 。
- $1111111111 \times 9999999999 = (\quad)$ 。
- $19941994 \times 19941993 - 19941995 \times 19941992 = (\quad)$ 。
- $(873 \times 477 - 198) \div (476 \times 874 + 199) = (\quad)$ 。
- $(11 \times 10 \times 9 \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1) \div (22 \times 24 \times 25 \times 27) = (\quad)$ 。
- 如果 $12345679 \times a = 888888888$, $12345679 \times b = 555555555$, 那么 $a + b = (\quad)$ 。

8. 用简便方法计算： $55 \times 66 + 66 \times 77 + 77 \times 88 + 88 \times 99$ 。

9. $6 \square\square 4 \div 56 = \square 0 \square$, 四个 $\square$ 内的数字之和是()。

10. $2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17$

这个算式中有七个数连乘

请回答:最后得到的乘积中,所有数位上的数字和是多少?

第二讲 小数计算

小数计算的关键是确定小数点的位置,也就是解决数位问题。

小数加、减,只要对齐小数点的位置,相同数位上的数相加、减即可;小数乘法,先按整数去乘,最后再点积的小数点;小数除法,先将除数转化为整数,运用商不变的性质,按小数除以整数的方法去除。

小数计算时,必须注意小数点的位置,要知道小数点的位置左移或右移一位,小数就将缩小或扩大 10 倍了。

小数计算时,也要注意审题,抓住数据或运算符号的特征,能用简便方法的就要用简便方法计算。因为整数运算的定律、性质,对于小数运算同样适用。

例 1 设 $a = 0.\underbrace{00\cdots0}_{9\text{个}0}125$, $b = 0.\underbrace{00\cdots0}_{10\text{个}0}8$

求 $a + b$, $a - b$, $a \times b$, $a \div b$ 。

分析与解答:

对齐小数点做加、减。

$$a + b = 0.\underbrace{00\cdots0}_{9\text{个}0}125 + 0.\underbrace{00\cdots0}_{10\text{个}0}8$$

$$= 0.\underbrace{00\cdots0}_{9\text{个}0}205$$

$$a - b = 0.\underbrace{00\cdots0}_{9\text{个}0}125 - 0.\underbrace{00\cdots0}_{10\text{个}0}8$$

$$= 0.\underbrace{00\cdots0}_{10\text{个}0}045$$

$$\begin{array}{r} 0.00\cdots0125 \\ + 0.00\cdots008 \\ \hline 0.\underbrace{00\cdots0}_{9\text{个}0}205 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0.00\cdots0125 \\ - 0.00\cdots008 \\ \hline 0.\underbrace{00\cdots0}_{10\text{个}0}045 \end{array}$$

$$a \times b = 0. \underbrace{00 \cdots 0125}_{9 \text{ 个 } 0} \times 0. \underbrace{00 \cdots 08}_{10 \text{ 个 } 0}$$

$$= 0. \underbrace{00 \cdots 01}_{19 \text{ 个 } 0}$$

$$\begin{array}{r} \overbrace{0.00 \cdots 0125}^{9 \text{ 个 } 0} \\ \times \underbrace{0.00 \cdots 008}_{10 \text{ 个 } 0} \\ \hline 0. \underbrace{00 \cdots 01000}_{19 \text{ 个 } 0} \end{array}$$

$$a \div b = 1.5625$$

$$\begin{array}{r} \underbrace{0.00 \cdots 08}_{10 \text{ 个 } 0} \overline{) \underbrace{0.00 \cdots 0125}_{9 \text{ 个 } 0}} \\ \hline 1.5625 \end{array}$$

右移 11 位

$$\begin{array}{r} 8 \\ \hline 45 \\ 40 \\ \hline 50 \\ 48 \\ \hline 20 \\ 16 \\ \hline 40 \\ 40 \\ \hline 0 \end{array}$$

例 2 求下列各式的值：

(1) $0.1 \div 0.1 \div \underbrace{0.1 \div \cdots \div 0.1}_{98 \text{ 个 } 0.1}$

(2) $199.4 \times 19.93 - 199.3 \times 19.92$

(3) $1 \div 32 \div 0.05 \div 0.25 \div 0.5$

分析与解答:

$$(1) \quad 0.1 \div 0.1 \div \underbrace{0.1}_{1\uparrow 0.1} = 10$$

$$0.1 \div 0.1 \div \underbrace{0.1 \div 0.1}_{2\uparrow 0.1} = 100 = 10^2$$

$$0.1 \div 0.1 \div \underbrace{0.1 \div 0.1 \div 0.1}_{3\uparrow 0.1} = 10^3$$

...

$$0.1 \div 0.1 \div \underbrace{0.1 \div \cdots \div 0.1}_{98\uparrow 0.1} = 10^{98}$$

$$\begin{aligned}(2) \quad & 199.4 \times 19.93 - 199.3 \times 19.92 \\ &= 1994 \times 1993 \times 0.001 - 1992 \times 1993 \times 0.001 \\ &= (1994 - 1992) \times 1993 \times 0.001 \\ &= 2 \times 1993 \times 0.001 \\ &= 3.986\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(3) \quad & 1 \div 32 \div 0.05 \div 0.25 \div 0.5 \\ &= (1 \times 5) \div (32 \times 0.05 \times 0.25 \times 0.5 \times 5) \\ &= (1 \times 5) \div [4 \times (5 \times 0.05) \times 8 \times (0.25 \times 0.5)] \\ &= 5 \div [(4 \times 0.25) \times (8 \times 0.125)] \\ &= 5 \div 1 \\ &= 5\end{aligned}$$

例3 甲、乙两数的差及商都等于1.4,求甲乙两数的和。

分析与解答:

根据题意,甲数是乙数的1.4倍,甲数比乙数多 $(1.4 - 1)$ 倍,甲、乙两数的和是乙数的 $(1.4 + 1)$ 倍。

$$\begin{aligned}1.4 \div (1.4 - 1) \times (1.4 + 1) &= 1.4 \div 0.4 \times 2.4 \\ &= 8.4\end{aligned}$$

例4 两个带小数相乘,乘积四舍五入后是39.1,这两个

数都只有一位小数,两个数的个位数都是6。问:这两个数的乘积四舍五入前是多少?

分析与解答:

根据题意,两个数都在6.1至6.9之间,如果两个数中较小的一个数为6.1那么

$$39.1 \div 6.1 < 6.41,$$

由此可知,两个数中较大的一个不大于6.41。

因为

$$6.4 \times 6.3 = 40.32 \quad \begin{array}{l} \text{(乘积保留一位小数,} \\ \text{四舍五入后是40.3,不符合题意)} \end{array}$$

$$6.4 \times 6.2 = 39.68 \quad \begin{array}{l} \text{(乘积保留一位小数,} \\ \text{四舍五入后是40.0,不符合题意)} \end{array}$$

$$6.4 \times 6.1 = 39.04 \quad \begin{array}{l} \text{(乘积保留一位小数,} \\ \text{四舍五入后是39.0,不符合题意)} \end{array}$$

$$6.3 \times 6.2 = 39.06 \quad \begin{array}{l} \text{(乘积保留一位小数,} \\ \text{四舍五入后是39.1,符合题意)} \end{array}$$

$$6.3 \times 6.1 = 38.43 \quad \begin{array}{l} \text{(乘积保留一位小数,} \\ \text{四舍五入后是38.4,不符合题意)} \end{array}$$

所以,这两个数的乘积四舍五入前是39.06。

例5 有一个四位数,在它的某位数字后加上一个小数点,再和这个四位数相加,得数是4003.64。求这个四位数。

分析与解答:

根据题意,得数是两位小数,故小数点必加在原四位数百位和十位之间。这样,如果把原四位数看作1倍,那么,在原四位数百位和十位之间加上一个小数点,则所得到的数是原四位数的百分之一,即0.01倍。因此,4003.64是原四位数