高等代数辅导与习题解答

北大·第四版

数学类专业学习辅导丛书

Guidance Series for Mathematics Majors

王萼芳 石生明 编

18 世纪，高斯在他的博士论文中公布了代数基本定理的第一个实质性证明。这个定理断言，n 次代数方程恰有 n 个根，它最早由荷兰数学家吉拉德提出，欧拉、拉格朗日等都先后试过，均未给出证明。高斯的证明另辟新径，他将多项式方程的根与复平面上的点对应起来……

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

Guidance Series for Mathematics Majors

数学类专业学习辅导丛书

高等代数辅导与习题解答

Gaodeng Daishu Fudao yu Xiti Jieda

北大·第四版

王萼芳　石生明　编

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容提要

本书是与北京大学数学系前代数小组编写的《高等代数》(第四版)配套的学习辅导书，是由原书作者亲自编写的。本书与教材的编排顺序一致，分为十章。每章中有内容提要、学习指导、习题与补充题的提示与解答，全书最后是总习题及其解答。本书的目的是帮助读者更好地学好教材的内容，要求读者切实按前言中提出的学习步骤和要求来学习，从而提高学习效果和解题能力，而不要把本书仅作为习题解答来使用。此外，学习指导部分加入了一些抽象概念，如线性相关、线性无关、极大线性无关组、向量组的秩的数学背景和来源等精彩内容，这在一般书中是少见的。

本书适合高等学校数学类专业作为高等代数课程的参考书，也可供广大读者学习时参考。

图书在版编目(CIP)数据

高等代数辅导与习题解答:北大·第4版/王萼芳，石生明编. --北京:高等教育出版社,2013.12

ISBN 978-7-04-038631-8

Ⅰ.①高… Ⅱ.①王…②石… Ⅲ.①高等代数-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.①O15

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第244256号

策划编辑 胡 颖　责任编辑 田 玲　封面设计 张申申　版式设计 马敬茹
插图绘制 尹 莉　责任校对 刘春萍　责任印制 刘思涵

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社　址	北京市西城区德外大街4号	网　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　刷	肥城新华印刷有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
开　本	850mm×1168mm 1/32		http://www.landraco.com.cn
印　张	13.5	版　次	2013年12月第1版
字　数	340千字	印　次	2013年12月第1次印刷
购书热线	010-58581118	定　价	23.80元

物 料 号 38631-00

前言

本书是我们编写的《高等代数》(第四版)的配套辅导书。其宗旨是帮助读者学习和复习原书内容,帮助读者训练解题思路和技巧,逐步提高解题能力,并不是代替读者学习,更不希望读者只是从本书抄袭答案。

我们如何来体现这个宗旨呢?首先是体现在本书内容上。本书对原书的每一章都写了内容提要、学习指导以及习题和补充题的提示与解答,最后还选编了一份总习题。这就是本书的各部分内容。

其次希望读者按如下建议来学习各部分内容:

1. 内容提要是一个复习纲要。读者在学完每一章后按提要逐条复述其内容,若能整理成笔记更好。

2. 读者通过学习指导要尽力理解各部分内容的数学涵义、重点、各部分的联系等。

学习指导中还对原书内容作了一些补充,让读者从中了解原书中某些概念(如线性相关、线性变换等)、理论提出的背景。

3. 习题和补充题后不仅有答案和证明,部分题还列有提示。我们不希望读者遇到不会的题目立即去抄解答,建议读者自己按下列步骤一步步地获得答案。

(1) 先看题,仔细了解题意,弄清已知条件和要得到的结论,然后尽可能地从书中查找(当然先是回忆,然后是查书)与题目有关的概念、结论、方法。若能从中找到从已知条件到所要结论的联系,就能解答出题目。

(2) 如凭找到的内容还不能找出所要的联系,可以看提示,按

它指出的路线寻找所要的联系，解答出题目。

(3) 看了提示还做不出，这时才看解答，但不要抄袭解答。应完全弄懂后，自已独立地写出解答。

我们提醒读者，一定不要把会做若干习题作为学习的终极目标。做题的作用是帮助读者熟悉书上的内容，并加深、加宽学过的知识，培养运用知识的能力。

我们编写这本辅导书，安排各部分内容，建议各项学习方法和步骤，都是为了体现上述作用。这就是我们的宗旨。

然后说一下总习题。它是深入的、较难的内容，要在熟悉全书内容后才能完成。这是为了加宽、加深有关知识和技巧，主要是以提高为目的，不作为必学的内容。

最后说明一点。本书中常常引用一些结论，来自原书或本书。比如引用本书第三章的学习指导中的补充内容，在本书第三章中引用时可简写为学习指导中的补充内容而省略“第三章中”几个字，在其他章中引用时才全部写出。又如引用原书第七章§9引理时，可以省去“原书”二字，简写为第七章§9引理。若在本书第七章中引用则更可简写为§9引理。

编者

2013.4

反盗版举报电话 (010)58581897　58582371　58581879

反盗版举报传真 (010)82086060

反盗版举报邮箱 dd@ hep. com. cn

通信地址 北京市西城区德外大街 4 号

高等教育出版社法务部

邮政编码 100120

目　录

第一章　多项式

一、内容提要

1. 数域

数域概念的引入

三个重要数域:复数域 $\mathbf{C}$,实数域 $\mathbf{R}$,有理数域 $\mathbf{Q}$

2. 一元多项式环

数域 P 上一元多项式的定义及一些相关概念

多项式的运算:加法、乘法及其满足的一些规律

一元多项式环 $P[x]$

3. 整除性理论

带余除法、整除

最大公因式,辗转相除法

互素

4. 因式分解定理

不可约多项式

因式分解及唯一性定理

标准分解式

三个重要数域:$\mathbf{C}$,$\mathbf{R}$,$\mathbf{Q}$ 上多项式的因式分解情况

5. 重因式

重因式及其判别法,去掉重因式的方法

6. 多项式函数

多项式函数

余数定理,根与一次因式的关系

重根的定义及判别法

7. 多元多项式

多元多项式的定义,字典排列法

对称多项式、初等对称多项式,对称多项式基本定理

二、学习指导

1. 数域

这一章的中心问题是讨论一元多项式的整除性理论及因式分解定理. 由于多项式的因式分解问题与系数的取值范围有关,例如,把多项式 x^4-4 看成有理系数、实系数还是复系数多项式,它的因式分解情况将各不相同. 还有另一些问题,也由于取值范围不同,得出不同的结论. 为了一般地讨论问题,得到一般的结论,也就是说,对于不同的取值范围,进行统一的讨论,这一章一开始就引入了数域的概念.

据上所述,我们在研究问题的时候,需要明确规定所考虑的数的范围,即取定一个数集. 又由于一般问题的讨论都离不开数的四则运算,为了在指定的数集内能进行讨论,至少要求这个数集中任意两个数经过四则运算(作除法时,除数不得为 0)的结果仍在这个数集中,所以我们引入了数域的概念(定义 1). 有了数域的概念以后,我们就可以在取定的数域内进行讨论. 所得的结论对一切数域都成立. 本课程都是在任一个取定的数域中来讨论问题的,所得到的结论对任一个数域都适用.

数域是一个重要的概念. 在本书中自始至终都要用到. 而且在其他数学问题及应用问题中,也总会要求明确所涉及的数的范围. 因此,熟练地掌握数域的定义对学习是非常重要的. 这也许是读者最初接触的"抽象的"概念,因此必须了解其含意. 通过"是""否"两方面的例子来加深对数域的了解. 学会判断一个数集是否是数

域并且知道如何选取或构造所需要的数域.

2. 一元多项式环 $P[x]$

一元多项式是这一章讨论的主要对象. 本书中所介绍的多项式的定义(定义2)与初等代数中所讨论的一元多项式基本上是一样的,但是概念有所推广. 首先,所讨论的多项式的系数都是指定数域 P 中的数,而且一切讨论中所谈到的数都是在 P 中的. 其次,多项式 $f(x)$ 表达式中的"x"是一个符号(或称文字). 把 x 看成未知数,就是初等代数中的多项式. 把 x 看成一个变量,$f(x)$ 就是数学分析中的多项式函数. 多项式还可代表其他一些数学对象,例如符号 x 可以代表求微商的运算 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$,这时多项式 $f(x)$ 就是一个微分算子. 又如果 x 代表一个矩阵,$f(x)$ 就是一个矩阵多项式,在本书中也常用到. 这种多项式与多项式函数有类似的运算性质. 正因为 x 可以代表许多数学对象,故又称 x 为不定元. 本书中关于多项式的定义和运算及其他概念,都是实际中的各种具体多项式的抽象. 这种抽象后得到的多项式的性质适用于各种实际中的多项式. 这也是我们课程中首次采用了抽象方法来研究一些可运算的对象. 这种抽象的研究方法有事半功倍的效果,是数学研究中常用的手段.

多项式的运算:加法、减法与乘法也是和初等代数中一样的,不过为了讨论运算规律及处理一般性问题,书中给出了两个多项式的和与积的公式,并用公式证明了多项式运算满足的一些规律,这些规律都是以后经常用到的. 为了能自然而熟练地应用运算公式及其所满足的规律(1—6),希望读者自己证明一下这些规律. 最好能应用和号来证明,以便能练习关于和号的运用,并通过习题学会应用这些规律.

我们用 $P[x]$ 表示系数在数域 P 中的一元多项式全体,并讨论 $P[x]$ 在加法、乘法下的一些性质. $P[x]$ 称为数域 P 上的**一元多项式环**. P 称为 $P[x]$ 的系数域. 要明确 $P[x]$ 中两个多项式经过加

法、减法和乘法,其和、差与积仍在 $P[x]$ 中,即 $P[x]$ 对加法、减法和乘法是封闭的.

3. 整除性理论

在 $P[x]$ 中,可以进行加法、减法及乘法三种运算. 但是乘法的逆运算——除法不是能普遍进行的. 因此本书介绍了**带余除法**. 同时引入了商式及余式的概念,并证明了它们的唯一性,存在性的证明用到了第二数学归纳法. 希望读者能通过这里的证明及其他练习复习一下数学归纳法.

整除的概念是两个多项式之间的一种特殊关系. 相应的有**因式**和**倍式**的概念. 希望读者能很好地理解这些概念,并会证明书中所提出的几个关于整除的结论.

对于 $P[x]$ 中两个多项式 $f(x)$, $g(x)$,一般不一定有整除关系. 为了能普遍讨论 $f(x)$, $g(x)$ 在"整除性"方面的关系,我们引入了最大公因式的概念(定义 6),最大公因式的存在(定理 2)是通过具体算法——辗转相除法来证明的,因此也给出了一个计算方法,读者在看懂证明以后,希望通过具体习题学会计算最大公因式及计算满足

$$(f(x), g(x)) = u(x)f(x) + v(x)g(x)$$

的 $u(x)$ 及 $v(x)$ 的方法.

书中的引理(第 13 页)是证明最大公因式的存在及计算最大公因式的基础,它的证明方法也是经常要用到的方法,值得注意的是:在引理中,并没有(像带余除法中那样)要求当 $r(x) \neq 0$ 时, $\partial(r(x)) < \partial(g(x))$,这一点给应用带来了方便(参考习题 20).

"互素"是最大公因式为非零常数的特殊情况,很多结论可由此证明,书中提到的一些有关结论都是非常重要、非常有用的,希望读者能证明并会应用.

多个多项式的最大公因式及互素的情况也是经常要用到的,希望读者自己证明一下.

由于整除关系不因为系数域的扩大而改变,所以最大公因式、

互素等关系也不会因系数域的扩大而改变.

4. 因式分解定理

我们知道,一个多项式的因式分解,是根据它系数的范围来确定的,因此为了确定地叙述因式分解定理,书中引入了**不可约多项式**的概念(定义8). 对任一个数域 P,$P[x]$ 中的多项式是否是不可约的,其判别方法都是一样的(根据定义),因此可以对不同数域作统一的讨论. 但是,作为 $P[x]$ 中的多项式,$f(x)$ 是否不可约是与 P 有关的. 这一点在讨论问题时需要十分注意.

定理5给出了不可约多项式的一个重要性质,这是证明因式分解定理的主要依据.

诚如书中指出,因式分解定理在理论上有其重要性,但是它没有给出具体的分解因式的方法. 实际上,对于一般情形,普遍可行的分解多项式的方法是不存在的.

多项式的**标准分解式**可把因式分解后的表示式规范化,而且还可以通过两个多项式的标准分解式写出这两个多项式的最大公因式.

因式分解定理对任一数域 P 上的多项式都成立,但是具体的分解情况依赖于 P 的性质. 书中对三个主要数域:复数域、实数域及有理数域进行了讨论,为此要用到**多项式函数**的概念.

设 $f(x)$ 是 $P[x]$ 中一个多项式,把 x 看成一个变量,就得到一个多项式函数. 当 P 是实数域时就是通常(例如数学分析中)所讨论的多项式函数. 因此这里所讨论的一些结果在数学分析中是很有用的.

余数定理给出了根与一次因式的关系(定理7的推论),这在多项式的因式分解与求根问题中都是很有用的.

定理8说明了多项式的根的个数问题,并且用来证明了定理9. 这个结论是说 n 次多项式由 $n+1$ 个点上的值唯一确定. 这在实验数据处理中是很有用的.

应用根与一次因式的关系,我们得到复系数与实系数多项式

的因式分解情况：

(1) 复数域

根据**代数基本定理**，可推出复系数不可约多项式都是1次的. 由此还可得出复系数多项式的标准分解式.

(2) 实数域

证明时用到把实系数多项式看成复系数多项式的方法. 这是处理实系数多项式的一种常用的方法.

实系数不可约多项式都是1次或2次的.

(3) 有理系数多项式

与复系数和实系数多项式不同，对于任意大于0的整数n，都存在n次不可约有理系数多项式，因此如何判断一个有理系数多项式是否不可约是一个非常困难的问题.

书中讨论了关于有理系数多项式的因式分解问题. 主要方法是把有理系数多项式的一些问题的讨论，归纳为整系数多项式的讨论，这也是一种处理有理系数多项式的方法.

需要指出的是：书中给出的计算有理系数多项式的有理根的方法，不仅在$\mathbf{Q}[x]$中可以应用，对于$\mathbf{C}[x]$，$\mathbf{R}[x]$中的多项式，如果它的系数是有理数，也可应用，从而简化这些多项式的求根及因式分解问题.

5. 重因式和重根

书中给出了重因式、重根、单因式、单根的概念及其判断和计算方法.

需要注意的是：$f(x)$有没有重因式由$f(x)$与$f'(x)$是否互素而定，因此一个多项式有没有重因式不因为系数域的扩大而改变，但重因式的计算是与系数域有关的. 当然，有没有重根也与系数域有关.

6. 多元多项式

多元多项式的定义及运算是一元多项式的相关概念的推广. 需要注意的是在多元多项式中，次数相同的项很多. 因此书中介绍

了**字典排列法**. 并可证明,两个多项式之积的首项等于首项之积. 从而证明了多元多项式乘法满足消去律,而且这个结果在因式分解中也是很有用的.

多元多项式的项的另一种排法是通过齐次成分来表示的. 在对称多项式的分解中可以看出这种表示法的用处.

和一元多项式函数一样,多元多项式也可看作一类多元函数.

对称多项式是多元多项式中常见的非常有用的一种. 它与一元多项式根与系数的关系问题有密切联系. 因此读者在阅读这一部分教材的时候,要注意初等对称多项式与一元多项式的根与系数的关系. 对称多项式基本定理(定理15)的证明给出了通过将对称多项式的首项表成初等对称多项式的单项式的首项,由此逐步降低次数而将原多项式表成初等对称多项式的方法.

最后提出的一元多项式的判别式 D 可用来判断此多项式有没有重根,并求出有重根的条件.

三、习题、提示与解答

1. 用 $g(x)$ 除 $f(x)$,求商 $q(x)$ 与余式 $r(x)$:

1) $f(x)=x^3-3x^2-x-1,g(x)=3x^2-2x+1$.

解 用分离系数的竖式进行计算.

$$
\begin{array}{rrr|rrrr}
 & & & & & \frac{1}{3} & -\frac{7}{9} \\
\cline{4-7}
3 & -2 & 1 & 1 & -3 & -1 & -1 \\
 & & & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \\
\cline{4-7}
 & & & & -\frac{7}{3} & -\frac{4}{3} & -1 \\
 & & & & -\frac{7}{3} & \frac{14}{9} & -\frac{7}{9} \\
\cline{5-7}
 & & & & & -\frac{26}{9} & -\frac{2}{9}
\end{array}
$$

所以

$$q(x)=\frac{1}{3}x-\frac{7}{9},r(x)=-\frac{26}{9}x-\frac{2}{9}.$$

2) $f(x)=x^4-2x+5,g(x)=x^2-x+2.$

答 $q(x)=x^2+x-1,r(x)=-5x+7.$

2. m,p,q 适合什么条件时，有

1) $x^2+mx-1\mid x^3+px+q.$

解 因为 x^3+px+q 被 x^2+mx-1 除所得的余式为$(p+m^2+1)x+(q-m)$，所以 $x^2+mx-1\mid x^3+px+q$ 的充要条件是 $p+m^2+1=q-m=0$，即 $p=-m^2-1,q=m.$

2) $x^2+mx+1\mid x^4+px^2+q.$

解 $x^2+mx+1\mid x^4+px^2+q$ 的充要条件是有 $g(x)$ 使 $x^4+px^2+q=(x^2+mx+1)g(x)$，比较次数、首项系数及常数项，可设 $g(x)=x^2+ax+q$. 代入，展开，得

$$\begin{cases}a+m=0,\\1+am+q=p,\\a+qm=0.\end{cases}$$

由此得 $x^2+mx+1\mid x^4+px^2+q$ 的充要条件是

$$p=2-m^2,q=1 \text{ 或 } p=q+1,m=0.$$

3. 求 $g(x)$ 除 $f(x)$ 的商 $q(x)$ 与余式 $r(x)$.

注 用一个 1 次多项式除一个 n 次多项式所得的商式是一个 $n-1$ 次多项式，因此，计算的过程是简单而冗长的，但是有一种方法可以使计算过程简洁而书写方便，这就是综合除法. 因此在计算本题之前我们先介绍综合除法.

设

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0,$$

并设 $f(x)$ 被 $x-c$ 除所得的商式为

$$q(x)=b_{n-1}x^{n-1}+b_{n-2}x^{n-2}+\cdots+b_1x+b_0,$$

并记余数为 r，则

$$\begin{cases} b_{n-1}=a_n, \\ b_{n-2}=a_{n-1}+cb_{n-1}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_0=a_1+cb_1, \\ r=a_0+cb_0. \end{cases}$$

证明　由假设，$f(x)=(x-c)q(x)+r$. 因此得

$$\begin{cases} b_{n-1}=a_n, \\ b_{n-2}-cb_{n-1}=a_{n-1}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_0-cb_1=a_1, \\ r-cb_0=a_0. \end{cases}$$

由此即得所证.

上面的公式把 $q(x)$，$r(x)$ 用 $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_1, a_0$ 及 c 来表示，这就是综合除法的原理. 应用上述等式可以把 $x-c$ 除 $f(x)$ 所得的商及余数用较少的步骤及篇幅计算出来，并且把除法中的减法变成了加法，计算起来方便多了. 综合除法可用下面的算式来实现：

$$\begin{array}{ccccc|l} a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & a_0 & \underline{c} \\ & cb_{n-1} & \cdots & cb_1 & cb_0 & \\ \hline a_n & a_{n-1}+cb_{n-1} & \cdots & a_1+cb_1 & a_0+cb_0 & \\ \| & \| & & \| & \| & \\ b_{n-1} & b_{n-2} & \cdots & b_0 & r & \end{array}$$

因为 c 是 $f(x)$ 的根的充要条件是 $f(c)=0$，所以应用综合除法还可以很快地判断 c 是否是 $f(x)$ 的根.

具体计算参考下面的习题.

1) $f(x)=2x^5-5x^3-8x$，$g(x)=x+3$.

解　用综合除法进行计算：

$$\begin{array}{cccccc|l} 2 & 0 & -5 & 0 & -8 & 0 & -3 \\ & -6 & 18 & -39 & 117 & -327 & \\ \hline 2 & -6 & 13 & -39 & 109 & -327 & \end{array}$$