GAOZHONG SHUXUE YINGYONG WENTI LIXI

高中数学应用问题例析

谢毅 张家和 闵毅 主编

四川教育出版社

高中数学应用问题例析

主　编　谢　毅　张家和　闵　毅

编　者　陈泽康　李国民　毛西德　伍文化
　　　　蹇纳生　吴跃荣　袁基成　王　青
　　　　唐文君　刘永昌　高中平　胡培林
　　　　张德洪　谢　毅　张家和　闵　毅
　　　　谢银华　徐松林

四川教育出版社

1999 年·成都

图书在版编目（CIP）数据

高中数学应用问题例析/谢毅等编．—成都：四川教育出版社，1999
ISBN 7-5408-3394-7

Ⅰ．高…　Ⅱ．谢…　Ⅲ．数学课-高中-教学参考资料　Ⅳ．G634．603

中国版本图书馆 CIP 数据核字（1999）第 48314 号

高中数学应用问题例析

谢毅　张家和　闵毅　主编
四川教育出版社出版发行
（成都市盐道街 3 号　　邮政编码：610012）
营山县新华印务有限公司印刷
（营山县北门桥街 7 号　邮政编码：638150）
成都科技大学树德电子工程公司照排
开本 787×1092　1/32　印张 8.875　插页 2　字数 180 千
1999 年 10 月第一版　　1999 年 10 月第一次印刷
印数：1—6000 册
ISBN7-5408-3394-7/G·3210　定价：10.50 元

*　　*　　*

内容提要

为了贯彻新的数学教学大纲关于形成学生“用数学的意识”的精神，适应高考“加强应用”的需要，本书选编了联系生产、生活、经济等方面的实际应用问题，涉及的知识内容与考试说明和新的大纲基本一致。

全书按知识内容分为十章，内容包括：函数、三角函数、不等式、数列和极限、立体几何、解析几何、排列组合二项式定理、复数、方程、综合问题。各章节根据问题分类，涉及的题目具有典型性、代表性，重在分析如何建立数学模型。因此本书对加强运用数学知识，培养学生能力和创造意识有很大的帮助。

本书可作为高中学生与数学课程的同步参考书和高考学生复习数学的参考资料，也可作为高中数学教师的教学参考用书。

目　　录

第一章　函　数

对隐含着量与量关系的应用题，我们用研究相关变量的方法思考分析，抽象其中的函数关系，利用函数的性质解决问题．本章将函数的应用问题分为下列几类进行探讨．

1．市场营销类

营销类应用性问题，是在营销活动中计算产品成本、利润（率），确定销售价格，考虑销售活动的盈利、亏本等情况的一类问题．

例 1　某商店如果将进货价为 8 元的商品按每件 10 元售出，每天可销售 200 件，现将采用提高售价，减少进货量的方法增加利润，已知这种商品每涨价 0.5 元，其销售量就减少 10 件．问应将售价定为多少时，才能使所赚利润最大，并求出最大利润．

分析：设每件销售价提高 x 元，则每件售价应为 $10+x$ 元，每件所得利润为：$x+(10-8)=2+x$ 元，每天销售将减少 t 件，于是 $0.5:10=x:t\Rightarrow t=\dfrac{10x}{0.5}=20x$，故每天销售件数为：$(200-20x)$ 件（$0\leqslant x\leqslant 10$），从而利润为 $y=$

$(2+x)(200-20x)$.

略解：设每件销售价提高 x 元，则所获利润

$y=(2+x)(200-20\cdot x)=-20(x-4)^2+720(0\leqslant x\leqslant 10)$.

故当 $x=4$，即售价定为 14 元时，每天可获最大利润 720 元.

【注】（1）解答营销类的经济学问题须理解有关名词“利润”、“利润率”、“盈利”、“亏本”的含义，熟悉计算公式：利润＝销售件数×每件利润，并巧妙地建立函数关系式.

（2）问题转化为求二次函数的最值问题，要注意 x 的实际意义即 $x\in[0,10]$.

例 2 有甲、乙两种商品，经营销售这两种商品所能获得的利润依次是 P 和 Q（万元），它们与投入资金 x（万元）的关系有经验公式：$P=\frac{1}{5}x$，$Q=\frac{3}{5}\sqrt{x}$，今有 3 万元资金投入经营甲、乙两种商品，为获得最大利润，对甲、乙两种商品的资金投入分别应为多少？能获得多大的利润？

分析：根据题意，建立利润与投入资金之间的函数关系，转化为求函数的最大值问题. 总利润＝经营甲的利润＋经营乙的利润.

略解：设经营甲商品投入资金 x 万元，则经营乙商品投入资金 $3-x$ 万元.

获得利润 $y=\frac{1}{5}x+\frac{3}{5}\sqrt{3-x}$（万元）$(0\leqslant x\leqslant 3)$.

设 $\sqrt{3-x}=t(0\leqslant t\leqslant\sqrt{3})$，则 $x=3-t^2$，

于是 $y=\frac{1}{5}x+\frac{3}{5}\sqrt{3-x}=\frac{1}{5}(3-t^2)+\frac{3}{5}t$

$$=-\frac{1}{5}(t-\frac{3}{2})^2+\frac{21}{20}(0\leqslant t\leqslant\sqrt{3}).$$

$\because 0\leqslant t\leqslant\sqrt{3}$，$\therefore t=\frac{3}{2}$ 时，$y_{\max}=\frac{21}{20}$，由 $\sqrt{3-x}=\frac{3}{2}$ 得 $x=\frac{3}{4}$.

$\therefore$ 甲商品投入资金 $\frac{3}{4}$ 万元，乙商品投入资金 $\frac{9}{4}$ 万元时，能获最大利润 720 万元.

【注】本题建立数学模型简单，关键是求解这个模型. 模型属无理函数，求此类函数的最值，常使用换元法转化为二次函数，但要注意前后变量的取值范围.

例 3　设生产某种商品 x 件时的总成本为 $C(x)=20+2x+0.5x^2$（万元），若每售出一件该商品的收入是 20 万元，求生产 20 件时的总利润和平均利润.

分析：总利润 $y=$ 总收入 $R(x)-$ 总成本 $C(x)$，平均利润 $\bar{y}=\frac{\text{总利润}}{\text{产品数量}}$，而总收入 = 售出件数 × 售一件的收入.

略解：销售 x 件商品的总收入 $R(x)=20\cdot x$，

$\therefore$ 总利润 $y=R(x)-C(x)=20x-(20+2x+0.5x^2)$

$$=-20+18x-0.5x^2.$$

$\therefore$ 当 $x=20$ 时，总利润 $y=-20+18\times20-0.5\times20^2=140$（万元）.

平均利润 $\bar{y}=\frac{140}{20}=7$（万元）.

【注】生产产品的利润 y 可能出现三种情形：

(1) $y=R(x)-C(x)>0$ 时，有盈余生产，生产处于

有利润状态；

(2) $y=R(x)-C(x)<0$ 时，亏损生产，生产处于亏损状态，得负利润；

(3) $y=R(x)-C(x)=0$ 时，无盈亏生产.

由此本题还可思考下列几个问题：①生产多少件商品时，总利润最大？②生产多少件商品时，厂家不亏本？

例 4 某塑料厂销售科，计划出售一种塑料鞋，经营人员并不是仅仅根据估计的生产成本确定塑料鞋的销售价格，而是通过对经营塑料鞋的零售商进行调查，看在不同的价格下他们会进多少货. 通过一番调查，确定的需求关系式是 $P=-750x+15000$（P 为每个零售商进货的数量，x 为零售商愿意支付的每双鞋的价格），并求得工厂生产塑料鞋的固定成本是 7000 元，估计生产每双塑料鞋的材料和劳动费用为 4 元，为了获得最大利润，工厂应对零售商索取每双鞋的价格是多少？

分析： 设工厂对零售索取每双鞋的价格为 x 元，则收入 S=需求量 $P\times$单价 x，利润 y=收入 $S-$成本 C（固定+可变）.

可变成本=每双材料费和劳动费 4 元×鞋的数量 $P=4P$.

略解： 销售每双鞋的成本 $C=7000+4P=-3000x+67000$.

$$\text{收入 } S=P\cdot x=(-750x+15000)\cdot x=-750x^2+15000x.$$

$$\text{利润 } y=S-C=-750x^2+15000x-(-3000x+67000)=-750x^2+18000x-67000.$$

$\therefore x=-\dfrac{18000}{2\times(-750)}=12$ 时，y 有最大值.

即工厂应对零售商索取价格每双 12 元时，获利最大.

【注】本题的关键是建立利润 y 与价格 x 的函数关系，而利润是收入与成本之差，从而问题转化为求收入与成本.收入是指商品销售的收入，成本就是从事生产所需要的投入，分固定成本（如厂房、设备等）和可变成本（如原材料、能源、劳动费等），分清这些关系问题就不难解决.

例 5　利民商店经销某种洗衣粉，年销售总量为 6000 包，每包进价 2.8 元，销售价 3.4 元，全年分若干次进货，每次进货均为 x 包. 已知每次进货运输劳务费 62.5 元，全年保管费为 $1.5x$ 元.

(1) 把该商店经销洗衣粉一年的利润 y（元）表示为每次进货量 x（包）的函数，并指出函数的定义域；

(2) 为了使利润最大，每次应该进货多少包?

分析： 利润 = 销售费 − 进货费 − 运输劳务费 − 全年保管费，因此只须分别求出这四项费，问题就解决了.

略解： (1) 若每次进货 x 包，则全年进货 $\dfrac{6000}{x}$ 次，运输劳务费：$\dfrac{6000}{x}\times 62.5=\dfrac{375000}{x}$（元），全年保管费为 $1.5x$ 元，进货费：2.8×6000（元），销售费为 3.4×6000（元）.

$$\text{故利润 } y=(3.4-2.8)\times 6000-\frac{375000}{x}-1.5x$$

$$=3600-\left(\frac{375000}{x}+\frac{3}{2}x\right),$$

定义域为 $x\in(0,6000]$ 且 $x\in N$；

(2) $y=3600-(\frac{375000}{x}+\frac{3}{2}x)$

$$\leqslant 3600-2\sqrt{\frac{375000}{x}\cdot\frac{3x}{2}}=2100.$$

当且仅当$\frac{375000}{x}=\frac{3x}{2}$，即 $x=500$ 时取“=”.

即每次进货 500 包时，利润最大.

【注】（1）理解利润的概念是建立函数关系式的关键，求定义域要注意变量的实际意义；（2）利用基本不等式求最值，要注意取“=”号的条件是“正数、定值、相等”；（3）本题也可转化为二次方程用 $\Delta\geqslant 0$ 求解.

例 6 某厂生产一种机器的固定成本（即固定投入）为 0.5 万元，但每生产 100 台，需要增加可变成本（即另增加投入）0.25 元. 市场对此产品的年需求量为 500 台，销售的收入函数为$R(x)=5x-\frac{x^2}{2}$（万元）（$0\leqslant x\leqslant 5$），其中 x 是产品售出的数量（单位：百台）.（1）把利润表示为年产量的函数；（2）年产量是多少时，工厂所得利润最大？（3）年产量是多少时，工厂才不亏本？

分析： 利润 $y=$收入$R(x)-$成本 $C(x)$(固定+可变)，且 x 是以百台为单位.

当 $x\leqslant 5$ 时，产品全部售出；当 $x>5$ 时只能售出 5 百台；工厂不亏本利润 $y\geqslant 0$.

略解：（1）利润 $y=R(x)-C(x)$

$$=\begin{cases}(5x-\frac{x^2}{2})-(0.5+0.25x)(0\leqslant x\leqslant 5),\\(5\times 5-\frac{5^2}{2})-(0.5+0.25x)(x>5).\end{cases}$$

$$=\begin{cases}-0.5+4.75x-\dfrac{x^2}{2}(0\leqslant x\leqslant 5),\\ 12-0.25x(x>5).\end{cases}$$

(2) 当 $0\leqslant x\leqslant 5$ 时，$y=-0.5+4.75x-\dfrac{x^2}{2}$.

当 $x=4.75$ 时，$y_{\max}=10.78125$（万元）.

当 $x>5$ 时，$y=12-1.25=10.75$（万元）.

$\therefore$475 台时，利润最大.

(3) 由 $\begin{cases}0\leqslant x\leqslant 5,\\ -0.5+4.75x-\dfrac{x^2}{2}\geqslant 0.\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x>5,\\ 12-0.25x\geqslant 0.\end{cases}$

得 $x\geqslant 4.75-\sqrt{21.5625}=0.1$（百台）或 $5<x<48$（百台）.

$\therefore$年产量在 10 至 4800 台，工厂不亏本.

【注】本题的第一个关键是理解题中的收入函数 $R(x)=5x-\dfrac{x^2}{2}$ $(0\leqslant x\leqslant 5)$，隐含着 $x>5$ 时，也只能销售 5 百台，这时的收入变为产值 $5\times 5-\dfrac{5^2}{2}$. 而成本 $C(x)=0.5+0.25x$ 是随产品的数量增加而增加，因而在两种情况下利润的表达形式不同.

第二个关键是不亏本，应考虑在两种销售情况下都不亏.

例 7　某种商品凡购买 100 件以下（包括 100 件）的按零售价结算，购买 101 件以上（包括 101 件）的按批发价结算. 已知批发价每件比零售价低 2 元，某人原欲购该商品若干件，需按零售价结算付 a 元，但若多买 21 件，则可按批

发价结算恰好也是 a 元（a 为整数），则 a 的值为__________.

分析： 某人预先欲购的商品少于 101 件，但多购 21 件时可享受批发价，这时至少有 101 件.

解： 设批发价时的商品件数为 m 件，则预先件数为（$m-21$）件，又设零售价 x 元/件，则批发价（$x-2$）元/件.

当零售价购买时，$a=(m-21)x$，$(101\leqslant m<122)$；

当批发价购买时，$a=m(x-2)$，$(101\leqslant m<122)$.

于是$(m-21)\cdot x=m\cdot(x-2)$.

化简，得 $x=\dfrac{2\cdot m}{21}$，

$\because a\in Z^{+}$，$m\in Z^{+}$，$\therefore$又有 $x\in Z^{+}$.

$\therefore$取 $m=105$，从而 $a=840$（元）.

【注】 本题是市场销售中常见问题，建立方程时有两个未知数，需通过附加条件 a 为整数，从而推出 m、x 也为整数，先求出 m、x 的值，再求出 a 的值.

例 8 某商品进货价每件 50 元，销售价每件 x 元，据市场调查，当 $50\leqslant x\leqslant 80$ 时，每天销售的件数 $P=\dfrac{10^5}{(x-40)^2}$，若设想每天获得利润最多，销售价每件应定为多少元?

分析： 因商品的进货价每件 50 元，销售价每件 x 元，每件商品获利 $x-50$（元），设每天获利 y 元，则 $y=(x-50)\cdot P=\dfrac{10^5(x-50)}{(x-40)^2}(50\leqslant x\leqslant 80)$，问题就转化为求 y 的最大值.

略解： 依题意，每天获利 y 元与每件销售价格 x 元的函数关系为：

$$y=(x-50)P=\frac{10^5(x-50)}{(x-40)^2}(50\leqslant x\leqslant 80)$$

将函数解析式变形为：

$\frac{1}{y}=\frac{(x-40)^2}{10^5(x-50)}$，令 $t=x-50(0<t\leqslant 30)$，

则 $\frac{1}{y}=f(t)=\frac{1}{10^5}[(t+\frac{100}{t})+20]$.

$\because$ $t+\frac{100}{t}$ $(t>0)$ 于 $(0,\ 10]$ 上单调递减，$[10,\ 30]$ 上单调递增.

$\therefore$ $t=10$ 时，即 $x=60$ 时，$f(t)$有最小值$\frac{20}{10^5}$.

从而 y 有最大值$\frac{10^5}{20}=2500$.

【注】 数学服务于生产实际，是通过建立数学模型来实现的. 本题建立目标函数容易，但难于构建函数模型$f(x)=ax+\frac{b}{x}$来求最值. 事实上，$f(x)=ax+\frac{b}{x}=a[x+\frac{b}{ax}]$ 在 $(0,\sqrt{\frac{b}{a}}]$ 上单调递减，在 $[\frac{b}{a},\ +\infty)$ 上单调递增，由函数的单调性即可求最值. 也可转化为二次型函数求最值：$y=10^5[\frac{1}{x-40}-\frac{10}{(x-40)^2}]$. 令 $u=\frac{1}{x-40}$，$\because 10\leqslant x-40\leqslant 30$，$\therefore u\in[\frac{1}{30},\ \frac{1}{10}]$，于是 $y=10^5(u-10u^2)$. 当 $u=\frac{1}{20}\in[\frac{1}{30},\ \frac{1}{10}]$ 时，即 $x=60$，$y_{\max}=10^5(\frac{1}{20}-10\cdot\frac{1}{400})=2500$.

例 9 生产某种商品 x 吨，所需费用是 $(1000+5x+\frac{1}{10}x^2)$ 元，当出售这种商品 x 吨时，每吨的价格是 P 元，这里 $P=a+\frac{x}{b}$ （a、b 是常数），如果生产出来的这种商品能够全部卖完，那么当产品是 150 吨时，利润最大，并且这时每吨的价格是 40 元，求 a、b 的值.

分析： 利润 = 销售额 - 成本，由此可求出利润最大时的 x，此时的 x 正好等于 150，可得出 a、b 的一个关系，又由 $P=a+\frac{x}{b}$，$P=40$，$x=150$ 又得 a、b 的另一关系，再求出 a、b.

略解： 当 $x=150$ 时，$P=40$，于是 $40=a+\frac{150}{b}$. ……①

设出售这种商品 x 吨得到的利润是 y 元，则

$y=Px-(1000+5x+\frac{x^2}{10})=(\frac{1}{b}-\frac{1}{10})x^2+(a-5)x-1000$. ……②

由①得 $\frac{1}{b}=\frac{40-a}{150}$ 代入②得：

$$y=(\frac{40-a}{150}-\frac{1}{10})x^2+(a-5)x-1000$$

$$=-\frac{a-25}{150}[x-\frac{75(a-5)}{a-25}]^2+\frac{75(a-5)^2}{2(a-25)}-1000,$$

当 $a-25>0$ 且 $x=\frac{75(a-5)}{a-25}$ 时，y 取最大值.

此时 $150=\frac{75(a-5)}{a-25}$，$a>25$，$\therefore a=45$ 代入①得 $b=-30$.

当 $a\leqslant 25$ 时，y 不可能取最大值，应舍去.

【注】本题利润函数的最大值问题是含参数的二次函数的最值问题，要注意参数的范围．本题只需求出最大值时的 x 值，不需求出最大值，但利用已知条件即可得到 a、b 的方程．本题求 a、b 的值是设置在求函数最值的过程中的，而不是求出最值后，再求 a、b．

例 10　某公司今年一月份推出新产品 A，其成本价为 492 元/件，经试销调查，销售量与销售价的关系如下表：

销售价（x 元/件）	650	662	720	800
销售量（y 件）	350	333	281	200

由此可知，销售量 y 与销售价 x 可近似看做一次函数 $y=kx+b$ 的关系（通常取表中相距较远的两组数据所得一次函数较为精确），试问：销售价定为多少时，一月份利润最大？并求最大利润和此时的销售量．

分析：要求利润最大，应求利润函数，而利润函数＝(利润/件)·销售量，因此关键是求出销售量的函数关系．由题知销售量 y 与销售价 x 可近似地看成一次函数 $y=kx+b$，由关系表，可求出 k、b．题中有 4 组数据可供选择，选择第（1)、(4）组更为理想．

略解：由题意知 $\begin{cases}350=650k+b,\\200=800k+b\end{cases}$

解得 $k=-1$，$b=1000$，$\therefore y=-x+1000$．y 为非负的整数，$0\leqslant x\leqslant 1000$，设一月份的利润为 S 元，

则　$S=(x-492)(1000-x)=-(x-746)^2+64516$．

$\therefore$　当 $x=746$（元/件）时，一月份利润最大为 64516，此时销售量为 $y=1000-746=254$（件）．

【注】本题销售量函数 $y=-x+1000$ 要从实际数据中

求出，选择数据组要注意使拟合效果更好，且运算简单；其次需求出利润函数，而利润函数的求法无法运用销售额减成本的办法来解决.

例 11 某商品在最近 100 天内，商品的单价 $f(t)$（元）与时间 t（天）的函数关系是：

$$f(t)=\begin{cases}\dfrac{t}{4}+22,(0\leqslant t\leqslant 40,t\in N);\\ -\dfrac{t}{2}+52,(40< t\leqslant 100,t\in N).\end{cases}$$

销售量 $g(t)$ 与时间 t（天）的函数关系是：

$$g(t)=-\frac{t}{3}+\frac{112}{3},\ 0\leqslant t\leqslant 100,\ t\in N.$$

求这种商品在这 100 天内日销售额的最大值.

分析： 日销售额 $\varphi(t)$ = 日价格 × 日售量 $=f(t)\cdot g(t)$. 求商品在这 100 天内日销售额的最大值，就是求 $\varphi(t)$ 的最大值. 而 $\varphi(t)$ 是分段函数，其最大值应分段求出极大值后，再比较求出最大值.

略解： 分段考虑：

(1) 当 $0\leqslant t\leqslant 40$ 时，因为：

$$\varphi(t)=f(t)\cdot g(t)=(\frac{t}{4}+22)(-\frac{t}{3}+\frac{112}{3})$$
$$=-\frac{1}{12}(t-12)^2+\frac{2500}{3}(0\leqslant t\leqslant 40,t\in N).$$

$\therefore t=12$ 时，$\varphi(t)$ 取极大值 $\dfrac{2500}{3}$.

(2) 当 $41\leqslant t\leqslant 100$ 时，因为：

$$\varphi(t)=f(t)\cdot g(t)=(-\frac{t}{2}+52)(-\frac{t}{3}+\frac{112}{3})$$