经全国中小学教材审定委员会2006年初审通过

普通高中课程标准实验教科书

数学（选修2-2）

SHUXUE

北京师範大學出版社

8—

经全国中小学教材审定委员会2006年初审通过

普通高中课程标准实验教科书

数学（选修2-2）

SHUXUE

主　　编　严士健　王尚志
副 主 编　张饴慈　李延林　张思明
本册主编　王尚志　顿继安
编写人员（按姓氏笔画排序）
王尚志　刘加霞　范永利
姚　芳　顿继安

北京師範大學出版社
·北京·

市场营销部电话 010－58808015 58804236
教材发展部电话 010－58802783
教材服务部电话 010－58802814
邮 购 科 电 话 010－58808083
传 真 010－58802838
编 辑 部 电 话 010－58802811 58802833
电 子 邮 箱 Shuxue3@bnup. com. cn

北京师范大学出版社出版发行
（北京新街口外大街19号 邮政编码：100875）
http://www. bnup. com. cn
出版人：赖德胜
唐山市润丰印务有限公司印装 全国新华书店经销
开本：210 mm×297 mm 印张：8.25 字数：200千字
2006年10月第1版 2006年12月第1次印刷
定价：6.45元

前言

你们将进入更加丰富多彩的数学世界.

你们将学到更多重要和有趣的数学知识、技能及应用.

你们将更多地感受到深刻的数学思想和方法.

你们将进一步体会数学对发展自己思维能力的作用，体会数学对推动社会进步和科学发展的意义，体会数学的文化价值.

你们正在长大，需要考虑自己未来的发展. 要学习的东西很多，高中数学的内容都是基础的，时间有限，选择能力是很重要的，你们需要抓紧时间选择发展的方向，选择自己感兴趣的专题，这是一种锻炼.

在高中阶段，学习内容是很有限的. 中国古代有这样的说法："授之以鱼，不如授之以渔"，学会打鱼的方法比得到鱼更重要. 希望同学们不仅关注别人给予你们的知识，更应该关注如何获得知识. 数学是提高"自学能力"最好的载体之一.

在数学中，什么是重要的（What is the key in Mathematics）？20世纪六七十年代，在很多国家都讨论了这个问题. 大部分人的意见是：问题是关键（The problem is the key in Mathematics）. 问题是思考的结果，是深入思考的开始，"有问题"也是创造的开始. 在高中数学的学习中，同学们不仅应提高解决别人给出问题的能力，提高思考问题的能力，还应保持永不满足的好奇心，大胆地发现问题、提出问题，养成"问题意识"和交流的习惯，这对你们将来的发展是非常重要的.

在学习数学中，有时会遇到一些困难，树立信心是最重要的. 不要着急，要有耐心，把基本的东西想清楚，逐步培养自己对数学的兴趣，你会慢慢地喜欢数学，她会给你带来乐趣.

本套教材由26册书组成：必修教材有5册；选修系列1有2册，选修系列2有3册，它们体现了发展的基本方向；选修系列3有6册，选修系列4有10册，同学们可以根据自己的兴趣选修其中部分专题. 习题分为三类：一类是可供课堂教学使用的"练习"；一类是课后的"习题"，分为A，B两组；还有一类是复习题，分为A，B，C三组.

研究性学习是我们特别提倡的. 在教材中强调了问题提出，抽象概括，分析理

解，思考交流等研究性学习过程. 另外，还专门安排了“课题学习”和“探究活动”.

“课题学习”引导同学们递进地思考问题，充分动手实践，是需要完成的部分.

在高中阶段，根据课程标准的要求，学生需要至少完成一次数学探究活动，在必修课程的每一册书中，我们为同学们提供的“探究活动”案例，同学们在教师的引导下选做一个，有兴趣也可以多做几个，我们更希望同学们自己提出问题、解决问题，这是一件很有趣的工作.

同学们一定会感受到，信息技术发展得非常快，日新月异，计算机、数学软件、计算器、图形计算器、网络都是很好的工具和学习资源，在条件允许的情况下，希望同学们多用，“技不压身”. 它们能帮助我们更好地理解一些数学的内容和思想. 教材中有“信息技术建议”，为同学们使用信息技术帮助学习提出了一些具体的建议；还有“信息技术应用”栏目，我们选取了一些能较好体现信息技术应用的例子，帮助同学们加深对数学的理解. 在使用信息技术条件暂时不够成熟的地方，我们建议同学们认真阅读这些材料，对相应的内容能有所了解. 教材中信息技术的内容不是必学的，仅供参考.

另外，我们还为同学们编写了一些阅读材料，供同学们在课外学习，希望同学们不仅有坚实的知识基础，而且有开阔的视野，能从数学历史的发展足迹中获取营养和动力，全面地感受数学的科学价值、应用价值和文化价值.

我们祝愿同学们在高中数学的学习中获得成功.

严士健 王尚志

目 录

第一章 推理与证明

在日常生活和学习中，我们常常需要进行推理. 例如：

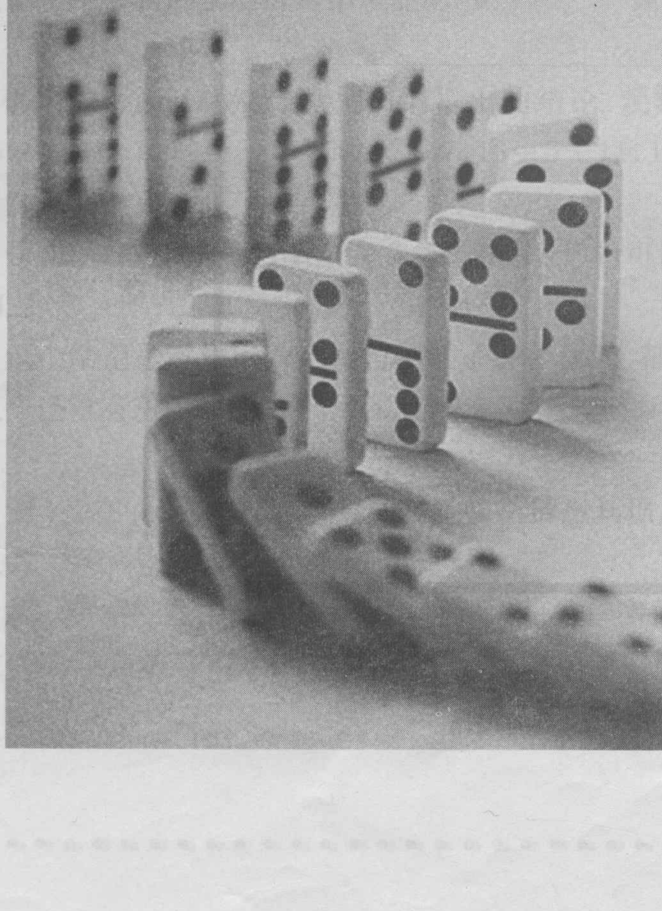
一个人看见一群乌鸦都是黑的，于是断言“天下乌鸦都是黑的”.

“每一个司机都应该遵守交通规则，小李是司机，所以，小李应该遵守交通规则.”

“如果 a,b,c 都是实数，且 $a>b,b>c$，那么 $a>c$.”

这些都是推理. 推理一般包括合情推理和演绎推理，它们都是日常生活、学习、工作和科学研究中常见的思维过程.

合情推理和演绎推理有什么特征？有什么区别？在学习中，特别是在数学学习中，合情推理和演绎推理有什么作用？同学们可以通过本章的学习，认识和体会这些问题.



§1 归纳与类比

1.1 归纳推理

在历史上，人们曾经有过制造永动机的美好愿望，希望制造出一种不消耗能量的机器，永无休止地为人类服务. 人们提出过许多永动机的设计方案. 最早永动机的设计方案是 13 世纪的法国人亨内考提出的，后来，人们又提出了各种永动机的设计方案，有人采用“螺旋汲水器”的原理，有人利用轮子的惯性原理，有人利用水的浮力或毛细作用的原理. 但是，这些设计方案都以失败而告终.

从大量的失败案例中，科学界归纳出了一个结论：不可能制造出永动机. 1775 年，法国科学院郑重宣布不再审查任何有关永动机的设计方案.

后来，根椐俄国著名科学家罗蒙诺索夫提出的能量守恒定律，从理论上说明了制造永动机是不可能的.

著名的哥德巴赫猜想也是归纳得出的结论. 观察 $6=3+3$，$8=3+5$，$10=3+7$，$12=5+7$，$14=7+7$，$16=5+11$，$18=7+11$，$20=3+17$，…，$30=13+17$，…

哥德巴赫归纳出以下结论：一个偶数（大于 4）可以写成两个素数的和.

这个结论是不是正确？人们验证了许多偶数，都满足这个规律，但至今还没有得到证明，这个结论仍然是猜想.

例 1 在一个凸多面体中，试通过归纳猜想其顶点数、棱数、面数满足的关系.

解 考察一些多面体，如图 1-1 所示. 将这些多面体的面数（F）、棱数（E）、顶点数（V）列出，得到表 1-1：

表 1-1

多面体	面数(F)	棱数(E)	顶点数(V)
三棱锥	4	6	4
四棱锥	5	8	5
五棱锥	6	10	6
三棱柱	5	9	6
五棱柱	7	15	10
立方体	6	12	8
八面体	8	12	6
十二面体	12	30	20

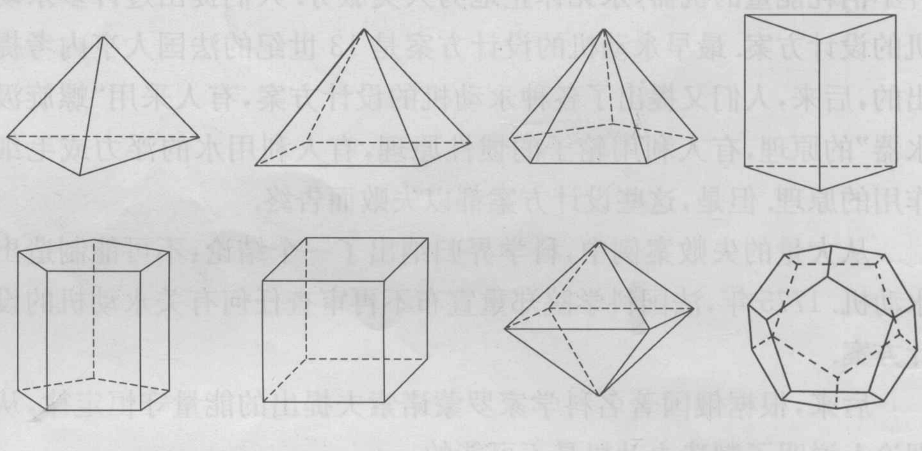


图 1-1

从这些事实中，可以归纳出：

$$V-E+F=2.$$

这就是著名的欧拉公式. 它的证明方法很多，有兴趣的同学可以参考选修 3 系列课程，例如“球面上的几何”等，在这些课程中，给出了一些不同的证明.

例 2 如果面积是一定的，什么样的平面图形周长最小，试猜测结论.

解 考虑单位面积的正三角形、正四边形、正六边形、正八边形，它们的周长分别记作 p_3, p_4, p_6, p_8，可得表 1-2.

表 1-2

p_3	p_4	p_6	p_8
4.56	4	3.72	3.64

归纳上述结果，可以发现：面积一定的正多边形中，边数越多，周

长越小. 于是得到猜测:图形面积一定,圆的周长最小.

在以上各例的推理过程中,都有共同之处:根据一类事物中部分事物具有某种属性,推断该类事物中每一个都有这种属性. 我们将这种推理方式称为**归纳推理**.

归纳推理是由部分到整体,由个别到一般的推理.

有时,归纳推理得出的结论不一定正确.

例如,人们在数论研究中,希望得到生成素数的公式. 1640 年,著名的数学家费马对形如 $2^{2^n}+1$ 的数进行计算时,发现当 $n=1,2,3$ 时对应的 $2^{2^n}+1$ 都是素数,$2^{2^4}+1=65\ 537$ 也是素数. 于是,他归纳出一个猜想:"所有形如 $2^{2^n}+1(n=1,2,3,\cdots)$ 的数都是素数."

对于大一点的 n,验证这个猜想是很难的事情. 直至百年后的 1732 年,瑞士数学家欧拉发现 $2^{2^5}+1=641\times 6\ 700\ 417$ 不是素数,从而否定了这个猜想.

1.2　类比推理

在立体几何的学习中,我们可以通过与平面几何的相关内容进行类比,得到一些立体几何的概念和性质. 例如,在平面几何中,三角形是边数最少的封闭多边形,在空间中,四面体是面数最少的封闭多面体,在学习四面体时,就可以通过类比三角形的性质得到四面体的一些性质;还可以用平面中的圆类比空间中的球,在平面中,学习了直线与圆的位置关系,通过类比,可以得到空间中平面与球的位置关系.

例 3　已知"正三角形内一点到三边距离之和是一个定值",将空间与平面进行类比,空间中什么样的图形可以对应正三角形? 在对应图形中有与上述定理相应的结论吗?

解　将空间与平面类比,正三角形对应正四面体,三角形中的边对应四面体的面. 得到猜测:正四面体内一点到四面距离之和是一个定值.

为了证明这个猜测,可以分析原结果的证明方法,例如面积法,那么猜想的证明可以考虑用体积法.

例 4 根据平面几何的勾股定理，试类比地猜测出空间中相应的结论.

解 平面中的直角三角形类比到空间就是直四面体，如图 1-2，在四面体 $PABC$ 中，平面 PAB、平面 PBC、平面 PCA 两两垂直.

勾股定理：斜边长的平方等于两个直角边长的平方和.

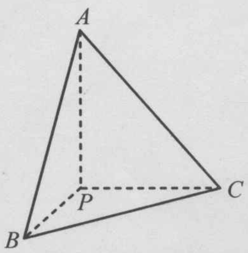


图 1-2

类比到空间就是：$\triangle ABC$ 面积的平方等于三个直角三角形面积的平方和. 即

$$S_{\triangle ABC}^2 = S_{\triangle PAB}^2 + S_{\triangle PBC}^2 + S_{\triangle PCA}^2.$$

在以上各例的推理过程中，都有共同之处：由于两类不同对象具有某些类似的特征，在此基础上，根据一类对象的其他特征，推断另一类对象也具有类似的其他特征，我们把这种推理过程称为**类比推理**.

类比推理是两类事物特征之间的推理.

利用类比推理得出的结论可能对，也可能错.

例如，在平面几何中，对于任意的 $n(n\geqslant 3)$，都存在正 n 边形. 若把这个结论类比到空间：对于任意的 $n(n\geqslant 4)$，都有正 n 面体. 这个结论是错误的. 事实上，在空间只有正四面体、正六面体、正八面体、正十二面体和正二十面体. 除此之外，其他的正 n 面体是不存在的.

根据解决问题的需要，我们有时对概念、结论进行类比（如例 4），有时对方法进行类比（如对例 3 的证明）.

归纳推理和类比推理是最常见的合情推理. 合情推理是根据实验和实践的结果、个人的经验和直觉、已有的事实和正确的结论（定义、公理、定理等），推测出某些结果的推理方式.

尽管合情推理的结果不一定正确，但是，在数学、科学、经济和社会的历史发展中，合情推理有非常重要的价值. 它是科学发现和创造的基础.

在科学研究和日常生活中，常常通过合情推理探索方法、寻求思路、发现规律、得到猜想．但是，合情推理的结论有时是不正确的．对于数学命题，需要通过演绎推理严格证明．演绎推理是根据已知的事实和正确的结论，按照严格的逻辑法则得到新结论的推理过程．

在数学学习中，不仅要学会运用合情推理提出猜想，还要善于运用演绎推理证明命题.

练 习

1. 杨辉三角形的前5行是

$$\begin{array}{ccccccccc} &&&&1&&&& \\ &&&1&&1&&& \\ &&1&&2&&1&& \\ &1&&3&&3&&1& \\ 1&&4&&6&&4&&1 \end{array}$$

请试写出第8行，并归纳、猜想出一般规律. 从上面的等式中，你能猜想出什么结论？

2. 用面积法证明例3中已知的结论，并类比地用体积法证明猜想.

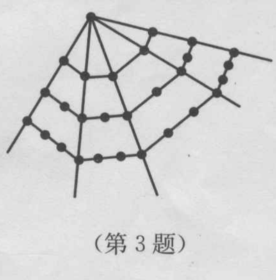
习题 1—1

1. 从下面的等式中，你能猜想出什么结论？

$37\times3=111$，$37\times6=222$，$37\times9=333$，$37\times12=444$.

2. 已知 $1^3+2^3=3^2=(1+2)^2$，$1^3+2^3+3^3=6^2=(1+2+3)^2$，$1^3+2^3+3^3+4^3=10^2=(1+2+3+4)^2$，试写出 $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3$ 的表达式.

3. 在右图中，给出了3层的六边形，图中所有点的个数 S_3 为28. 按其规律再画下去，可以得到 n 层六边形，试写出 S_n 的表达式.



（第3题）

4. 已知以下过程可以求 $1+2+3+\cdots+n$ 的和，

因为 $(n+1)^2-n^2=2n+1$，

$n^2-(n-1)^2=2(n-1)+1$，

…

$2^2-1^2=2\times1+1$，

有 $(n+1)^2-1=2(1+2+\cdots+n)+n$，

所以 $1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n^2+2n-n}{2}=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

类比以上过程，求 $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$ 的和.

5. 利用类比推理，根据学过的平面向量的坐标表示，建立空间向量的坐标表示.

§2 综合法和分析法

2.1 综 合 法

在证明数学命题时，我们可以从已知条件入手，依据学过的定义、公理、定理等，通过严格的推理，证明命题的结论.

例 1 求证：π 是函数 $f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$ 的一个周期.

证明 我们从条件入手，因为

$$f(x+\pi)=\sin\left[2(x+\pi)+\frac{\pi}{4}\right]=\sin\left(2x+2\pi+\frac{\pi}{4}\right)$$
$$=\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=f(x).$$

所以，根据周期的定义可知：π 是函数 $f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$ 的一个周期.

例 2 （韦达定理）已知 x_1 和 x_2 是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0, b^2-4ac\geqslant 0)$ 的两个根. 求证：$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$，$x_1x_2=\frac{c}{a}$.

证明 由于 x_1 和 x_2 是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 的两个根，根据求根公式，有

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a};$$

所以

$$x_1+x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=-\frac{b}{a},$$

$$x_1x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\cdot\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$
$$=\frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}=\frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}.$$

这样，我们从命题的条件出发，通过计算，证明了命题的结论.

例3　已知：x,y,z 为互不相等的实数，且 $x+\frac{1}{y}=y+\frac{1}{z}=z+\frac{1}{x}$.

求证：$x^2y^2z^2=1$.

证明　根据命题的条件 $x+\frac{1}{y}=y+\frac{1}{z}$，可得

$$x-y=\frac{1}{z}-\frac{1}{y},$$

即
$$x-y=\frac{y-z}{yz}.$$

又由命题的条件 x,y,z 为互不相等的实数，

所以上式可变形为　$yz=\frac{y-z}{x-y}$.

同理可得　$xy=\frac{x-y}{z-x}$，$zx=\frac{z-x}{y-z}$，

所以　$x^2y^2z^2=\frac{y-z}{x-y}\cdot\frac{x-y}{z-x}\cdot\frac{z-x}{y-z}=1$.

这样，我们就根据命题的条件，通过计算，证明了命题的结论.

抽象概括

从上面的几个例子，我们可以看出它们证明的特点是：从命题的条件出发，利用定义、公理、定理及运算法则，通过演绎推理，一步一步地接近要证明的结论，直到完成命题的证明. 我们把这样一种思维方法称为**综合法**.

练　习

设 a,b 是实数，求证：$\sqrt{a^2+b^2}\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}(a+b)$.

2.2　分　析　法

在证明数学命题时，我们也可以从命题的结论入手，不断地寻求保证结论成立的条件，直到归结为命题给定的条件，或归结为定义、