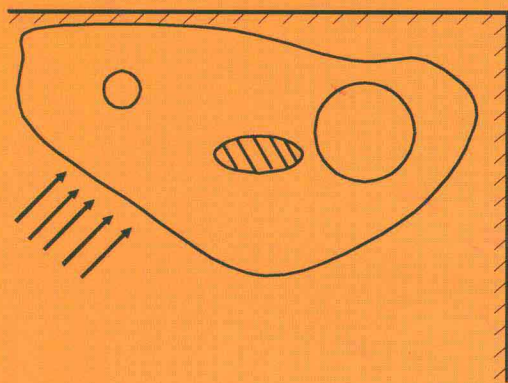


史文谱◎著

线弹性SH波散射 理论及几个问题研究

XIANTANXING SH BO SANSHE
LILUN JI JIGE WENTI YANJIU



国防工业出版社

National Defense Industry Press

线弹性 SH 波散射理论 及几个问题研究

史文谱 著

国防工业出版社

· 北京 ·

图书在版编目(CIP)数据

线弹性 SH 波散射理论及几个问题研究/史文谱著.

—北京:国防工业出版社,2013. 10

ISBN 978 - 7 - 118 - 09099 - 4

I. ①线... II. ①史... III. ①弹性波 - 散射 - 研究
IV. ① 0347. 4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 214463 号

※

国防工业出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路 23 号 邮政编码 100048)

国防工业出版社印刷厂印刷

新华书店经售

*

开本 880 × 1230 1/32 印张 6 $\frac{1}{2}$ 字数 204 千字

2013 年 10 月第 1 版第 1 次印刷 印数 1—2000 册 定价 26.00 元

(本书如有印装错误,我社负责调换)

国防书店:(010)88540777

发行邮购:(010)88540776

发行传真:(010)88540755

发行业务:(010)88540717

前 言

弹性波散射现象是弹性波在弹性介质中传播时由于受到介质性质突变、几何间断和夹杂物阻碍等原因出现次生波,从而导致弹性波场在介质内个别地方能量集中的一种力学现象,是导致材料发生局部破坏和损伤积累的主要原因之一。其相关理论在地震工程、地质勘探、无损探伤和海洋工程等领域都有广泛应用。

目前,弹性波散射研究主要分为面内波(P波和SV波)散射和反平面波(SH波)散射两个方向。其中:由于SH波散射不存在波型转换现象,在构造满足边界条件的散射波函数时稍显容易,因此常用的是虚源法;而面内波散射因为存在波型转换问题,在理论上通过虚源法构造满足直边界应力自由等条件的散射波函数是很困难的,目前,理论上主要采用大圆逼近直边界的方法来近似研究,但由于该方法在选择较大圆半径时容易导致定解线性代数方程组系数矩阵的条件数大幅增加使得解的误差变大,故只能有一定的近似意义。

弹性波散射属于弹性动力学的一个分支,与实际工程应用联系密切。由于理论上仍有许多问题需要进一步研究,同时又有大量的新问题不间断地提出,使得这门古老的弹性动力学分支始终充满着活力和生机,到目前为止,有关这方面的论文研究成果已浩如烟海,难以胜数。相关专著也已出版很多,比如,Y. H. Pao(鲍亦兴)和C. C. Mov(毛昭宙)合著的“Diffraction of Elastic Waves and Dynamic Stress Concentrations”,John G. Harris编写的“Linear Elastic Waves”,黎在良和刘殿魁合著的《固体中的波》,钟伟芳和聂国华合著的《弹性波的散射理论》,[美]阿肯巴赫著,徐植信、洪锦如译的《弹性固体中波的传播》,牛滨华和孙春岩合著的《半空间介质与地震波传播》,吴世明著的《土介质中的波》等。这些著作都很经典,且都有其编写的侧重点,非常值得研

读。从文献来看,弹性波散射最主要的理论研究方法是波函数展开法、复变函数法和积分方程法等。其他方法如射线法、传递矩阵法、Born近似法等都是有针对性的方法,所有这些方法的具体应用都可以在文献中找到。

本书是关于二维均质、线弹性固体中弹性波散射问题的专著。除介绍弹性波基本理论外,主要总结了作者近些年来在该领域所做的一些研究工作,其中也包含了对国内外的研究现状的一些分析。

全书共分5章:第1章简要介绍弹性波散射问题研究中用到的一些数学符号和基础内容;第2章主要介绍弹性波散射的基本概念、理论和方法;第3章介绍二维线弹性半空间介质中圆形散射体对SH波散射的几个问题研究;第4章主要介绍二维直角区域内圆形散射体对SH波散射问题的研究,同时也给出了椭圆孔对SH波散射问题的分析过程和结论;第5章介绍在弹性波散射计算中经常遇到的几个波函数的积分,并给出了它们的理论分析解。本书最后的附录对于弹性波散射研究非常有用。

本书可供工程力学、固体力学、地震工程、无损探伤等专业的高年级学生和研究生学习参考,对相关领域的工程技术人员也有一定的参考价值。

本书中的一些主要研究工作成果得到如下几个基金的资助:烟台大学博士启动基金(JX03B5)、山东省科技攻关项目(2006GG3210001)、山东省自然科学基金(ZR2010AM002)和山东省科技攻关项目(2012G0030011)。在这里,特此致谢。

本书的撰写由史文谱独立完成。由于时间较为匆忙,且限于作者的学术水平,书中一定存在不足之处,还望读者提出宝贵意见和建议。

对写作过程中参考过的文献资料的原创作者也请见谅不能一一列出,在此深表歉意和谢意。

烟台大学史文谱
2013年8月

目 录

绪论	1
1.1 弹性波散射问题简介	1
1.2 弹性波散射问题的主要研究方法	8
参考文献	10
第1章 弹性波散射数学基础	14
1.1 几种正交坐标系	14
1.2 场论的一些概念、性质及定理	15
1.2.1 标量梯度、矢量场的散度和旋度	15
1.2.2 格林定理、高斯定理和斯托克斯公式	17
1.3 点位置和点位移的表达方法及其相互转换	18
1.4 张量标记简介	18
1.5 数学物理问题分类及常用求解方法简介	27
1.5.1 数学物理问题分类	27
1.5.2 常用求解方法简介	28
参考文献	37
第2章 弹性动力学基本理论	38
2.1 弹性动力学问题的定解方程	38
2.2 弹性动力学问题的适定性	40
2.3 运动方程的位移表示	43
2.4 矢量的亥姆霍兹分解	44
2.5 位移场的势分解(拉梅势分解)	45
2.6 波动方程的驻波解及常见的简单波	46
2.6.1 波动方程的驻波解(分离变量解)	46
2.6.2 常见的简单波	47

2.7	二维问题	52
2.7.1	反平面剪切问题	53
2.7.2	面内问题	53
2.8	弹性波的传播	54
2.9	三维稳态波的亥姆霍兹公式及对应的 Sommerfeld 辐射条件	56
2.10	二维稳态波的韦伯的公式及其 Sommerfeld 辐射 条件	59
2.11	弹性波散射横截面或散射横截线的问题	61
2.12	稳态波的极限吸收原理	66
	参考文献	68
第3章	半空间内 SH 波散射的几个问题	69
3.1	SH 波散射的基本理论和方程	69
3.2	半空间内浅埋圆孔对稳态入射平面 SH 波的散射 问题	71
3.3	半空间内浅埋圆形弹性夹杂对稳态入射平面 SH 波 的散射问题	78
3.4	半空间内固定圆形夹杂对稳态入射平面 SH 波的 散射	81
3.5	半空间内圆形动夹杂对稳态入射平面 SH 波的散射	83
3.6	弹性约束半空间内浅埋圆孔对 SH 波的散射	88
	参考文献	98
第4章	二维直角平面内 SH 波散射的几个问题	99
4.1	二维直角平面内固定圆形夹杂对稳态入射平面 SH 波 的散射	99
4.2	二维直角平面内圆形弹性夹杂对稳态入射平面 SH 波 的散射	103
4.3	直角平面角点圆弧形弹性夹杂对稳态入射平面 SH 波的散射	109
4.4	二维直角平面内刚性可动圆夹杂对稳态平面 SH 波 的散射	113

4.5	直角平面内圆孔对稳态 SH 波的散射	120
4.6	二维直角平面内偏心圆形衬砌对稳态入射平面 SH 波的散射	123
4.7	四分之一空间内椭圆孔对 SH 波的散射	131
	参考文献	138
第 5 章	与波函数有关的几个积分解	139
5.1	Q_1 型和 Q_2 型积分及其解析解	139
5.2	Q_3 型和 Q_4 型积分及其解析解	143
5.3	Q_5 型和 Q_6 型积分及其解析解	147
5.4	Q_7 型和 Q_8 型积分及其解析解	149
	参考文献	152
附录 A	正交多项式和函数的逼近与计算	154
附录 B	拉普拉斯变换及反演	176
附录 C	Graf 加法公式及其变型	202
	参考文献	209

绪 论

1.1 弹性波散射问题简介

弹性波衍射理论是在早期探索光的本质现象时逐步形成的。19世纪上半叶,人们把光理解为一个扰动在弹性以太中的传播,当时用来描述该种传播的理论就是后来发展起来的弹性动力学理论,并且用弹性动力学理论也确实解析了不少的光波现象,这不足为奇,因为各种波动现象是有其共性的。因此,弹性波理论的建立是由来已久的。

弹性波和弹性振动是相互联系但又有所区别的弹性动力学现象,弹性波是弹性振动在弹性介质中的传播,是弹性介质内受扰动部分之间相互作用、相互牵动的运动形式,而弹性振动强调的是弹性介质中某一指定部分的连续动力学运动。

弹性动力分析的目的是获得弹性介质内的位移场、应力和应变场,尤其是应力集中现象的分布情况。众所周知,在各种各样的天然介质和工程材料中,总是或多或少地存在着形式各异的物理特性或/和几何特性不连续的界面和缺陷。这些界面和缺陷有些是天然存在的,有些是人为在生产、加工、运输和使用等过程中造成的,甚至有些还是为了满足功能或工艺要求而人为设计加工上的。总之,它们会以各种方式不可避免地存在着。当这些天然介质和工程材料承受动态载荷作用时,必然会在它们内部产生弹性振动,从而导致弹性波的传播,当弹性波在传播过程中遇到障碍物(夹杂、孔洞、裂纹和界面)时,就会与障碍物发生作用。作用的结果会使得障碍物表面上受到扰动的点成为新的波源,这些次生的新波源同样会向各个方向发出弹性波,这些子波的包络面就是波阵面,这种现象就是弹性波的散射,障碍物也就称为散射体。实践表明,应力集中常发生在障碍物表面上。实际上,研究弹性介

质内异质体对弹性波的散射问题在许多工程领域里都具有十分重要的意义,比如,地下矿产勘探、石油勘探、定量无损检测和探伤、雷达探测、水下声纳和爆破、医学 CT 技术等的应用和发展都离不开弹性波散射理论。究其实际,就是要弄清弹性波的散射效应与介质内的潜藏物的几何、方位及其物理特性之间的相互关系。并且许多问题表现为弹性动力学反问题,即通过实际检测在已得到弹性波散射效应的前提下,反推散射体的方位、大小、形状、散射体物理特性及其周围介质的物理特性等。大量事实表明,要进一步研究弹性波散射反问题,相应正问题的充分研究是十分必要的。

综合文献来看,弹性动力学发展的早期主要是针对音乐的音调或水波之类的问题,且仅限于定性观察而不能进行定量分析。19 世纪初,当人们认识到光现象的波动性后,作为一种工具,弹性波分析方法被尝试应用于光现象研究,这个时期弹性波传播理论得到了初步发展。由于地球物理学和地震学研究的需要,19 世纪到 20 世纪初,固体中弹性波的研究才得到了人们的普遍重视和深入研究。弹性动力学基本理论的建立,严格地说是从 19 世纪 20 年代开始的。比如,按照时间顺序排列,弹性动力学发展史的几个关键环节如下:

Euler(1744)和 Bernoulli(1751)采用材料力学等初等理论研究并推出了梁弯曲振动方程,得到了各种边界条件下的正则振动模态和频率方程。

1821 年,Navier 首先推导出了弹性体平衡和振动的一般方程;同年,Germain 也采用材料力学等初等理论建立了薄板振动的偏微分方程。

1822 年,Cauchy 对弹性动力学经典理论做了许多奠基性工作,为弹性动力学理论的进一步发展做了基础性铺垫。

1824 年,Navier 推导出了杆的纵向振动方程。

1829 年,Poisson 推首先指出了位移波动方程解的二分量结构,即位移波动方程的解由一个标量势函数的梯度和一个矢量场的旋度组成,它揭示了弹性介质内扰动的响应是由两类基本位移波组成,即膨胀波和剪切波。

1830 年,Cauchy 研究了晶体介质中平面波的传播,得到了波前传播

的速度方程,并指出一般情况下存在三个速度值,在各向同性情况下,有两个波速是一样大小的,它们是平面横波(面内 SV 波和反平面 SH 波)。

1831 年, Poisson 等处理了弹性动力学的初值问题。

Wolf(1845)、Nagase(1957)和 Knopoff(1959)先后完成了对球体的散射问题研究。

1849 年, Stokes 研究了由体积力产生的波动问题,并推出了突加荷载荷引起的基本奇异解,后由 Love 对解做了某些推广。

1852 年, Lamb 提出了标量势和矢量势的概念,并明确指出一般弹性动力位移场可表示为一个标量势函数的梯度和一个矢量势函数的旋度之和,且这两个势函数满足两个非耦合的波动方程,分别具有体积波(膨胀波)和剪切波(等容积波)的传播速度。

1863 年, A. Clebsch 为了弄清楚光波的散射,首先分析了球状夹杂物对矢量波的散射效应。

1872 年, Rayleigh 采用波函数展开法详细研究了刚性或充气的球形物体对声波的散射问题。

1876 年, Pochhammer 给出了无限长圆柱一般振动的精确理论分析,该结果是研究弹性圆杆波导问题的基础。

1877 年, Christoffel 研究了间断面传播的问题。

1882 年, Kirchhoff 推出了非齐次波动方程势解的积分表示式。

1887 年, Rayleigh 发现了由其名字命名的面波——Rayleigh 面波。该波对于研究具有自由表面的弹性半空间波动问题有极为重要的理论和实际意义,对于地震学研究也是非常重要的。该波以略小于剪切波波速沿着界面传播。

Rayleigh(1894)和 Timoshenko(1921)分别研究了杆单元的转动效应和剪切变形的影响,并对 Bernoulli - Euler 梁的弯曲波理论进行了修正。

1899 年, Knot 首先研究了两个弹性半空间内波在交界面处的反射和折射问题,后有许多人对此问题进行了研究。人们发现,在均匀介质内部,扰动引起的体积波和剪切波能够以不同的速度各自独立传播。但在介质性质不连续处,反射波和折射波都可能产生波型转换,即在交界面处两种位移势通过边界条件互有耦合,并且在两个弹性半空间的

交界面处还可能存在着与 Rayleigh 面波相似的界面波,即称为 Stoney 波。在一个弹性半空间表面具有覆盖层时,则在层内除了有 Rayleigh 型面波外,还可能存在着称为“Love 波”的波,该波的特点是质点运动方向平行于界面,Love 波具有几何弥散效应。

1904 年, Lamb 研究了表面源和埋入源产生的扰动传播问题,并指出随着距离扰动源距离的增加, Rayleigh 面波将逐步成为主导因素。Lamb 的研究对地震学有重要价值。

1927 年, Sezawa 完成了球、圆柱和椭圆柱对 P 波的散射问题,并以特殊函数构造了问题的波函数解。

1956 年, Ying 和 Truell 研究了各向同性介质中一个球体对平面纵波的散射问题。

1960 年 Einspruch 等人完成了球体对平面横波的散射问题研究。

Pao (1962) 和 Mow (1963) 等人分别完成了对圆柱体内含物的动应力集中问题研究。

1961—1962 年, Baron 等人首次利用积分变换和波函数展开法研究了圆柱形空腔对压缩波脉冲散射问题的解析解问题。

1964—1967 年, Miklowitz、Norwood 和 Mow 研究了球形内含物和空腔的瞬态响应问题。

1973 年, J. D. Achenbach 在“Wave Propagation in Elastic Solids”中对弹性固体中波的传播问题做了详细的研究综述。

1979 年—1980 年, Jain 和 Kanwal 采用波函数展开法全面研究了圆柱形缺陷、内含物及球体对弹性波的散射问题,得到了大波长情况下的位移场、应力场、远场位移、动应力强度因子及散射横截面的近似公式。Datta 等人 (1978、1982、1984) 提出并采用匹配渐进展开法分析研究了半空间中柱形孔洞对 P 波、SV 波和 SH 波的散射问题,给出了远场的渐进表达式及相应的数值解。

1982 年, 刘殿魁等人在文献 [1, 2] 中将弹性静力学中的复变函数方法应用于弹性波散射 (动力学) 问题研究中, 并首次提出了“域函数”概念, 扩充了传统特殊函数的种类且具有更高层次上的统一性。该方法不仅拓展了波函数展开法的使用范围, 而且充分利用了保角映射技术和多极坐标移动技术 (也称多极坐标变换) 的优势处理弹性动力学

复杂边界问题。

1984—1986 年,盖秉政在文献[3—6]中完成了孔为 SH 波绕射问题的渐近解法、弹性波对填充介质腔的绕射、弹性波对多个圆孔的绕射问题和弹性波在平面多连通区域中的绕射和动应力集中问题研究。

1986 年,洪善桃在文献[7]中对弹性波的近代发展情况做了概述。

1987 年,盖秉政在文献[8]中对弹性波绕射与动应力集中问题研究的情况做了综述。

1989 年,徐植信在文献[9]中对弹性波传播理论的一些问题的研究现状和展望做了综述。

1993 年,由鲍亦兴和毛昭宙完成的专著《弹性波的衍射与动应力集中》中,对弹性波衍射与动应力集中问题的各种常用分析方法做了详细的介绍,对于诸如圆形柱体、椭圆形柱体及抛物形和球形等几何形状的加塞物对弹性波的散射问题做了全面推导和说明,是一本非常经典而深刻介绍弹性波散射方面的专著。

20 世纪 90 年代后,人们对弹性波散射研究的重点已从分析单个简单形状的球、圆柱等散射体到单个或多个具有任意形状的散射体;从考虑均匀、各向同性介质到非均匀、各向异性、层状和复合材料等复杂介质;从研究单个标量波函数控制的声波和仅有单个波速的矢量波函数控制的电磁波的散射到这两种波函数耦合在一起的一般弹性波的散射。从某种意义上表现为采用已经成熟的旧方法研究理论上或工程中提出的新问题,以及努力发现新的方法研究已被解决的旧问题或提出的新问题。总之,随着地震科学、地球物理学、弹性动力学相关学科和计算机科学、数值计算技术等的发展,对各种理论、方法的使用还需要进行不断的探索和研究,尤其对于复杂工程问题的处理,既要充分运用和改进现有的方法,又要努力发展更精确、实用和有效的新方法。

SH 波散射问题是波动理论中相对比较简单的一类弹性波散射问题,由于容易构造出预先满足边界条件的波函数解。许多问题都得到了精确的(级数)封闭解。即使对于那些不能直接得到解析解的问题,理论上也发展了许多非常成功的半解析数值方法。例如,刘殿魁、王宁

伟、田家勇、韩峰、许贻燕、胡超、刘国利等利用复变函数和 Green 函数法研究了一系列与 SH 波散射有关的稳态问题^[11-20]。鉴于带直边界的 P 波和 SV 波散射问题难以预先构造出满足边界条件的波函数解,且 Green 函数法在这也难以应用,使得与 P 波和 SV 波散射有关的半空间问题和复合材料问题很难获得理论封闭解。但是近似研究的方法是有的,比如:刘宏伟和刘殿魁^[21]利用复变函数法,借助曲线坐标和 Hermite 多项式正交展开的方法求解了 P 波对具有不等深度凹陷地形的散射问题;H. Cao 和 V. W. Lee^[22, 23]采用波函数展开法,利用以曲代直的办法研究了半空间界面不等深度凹陷对 P 波和 SH 波的散射问题,得到了较好的近似解;王铎、汪越胜在文献[24]中对界面动力学研究近况做了全面的综述,并在文献[25]中研究了 SH 波对有部分脱胶衬砌的圆形孔洞的散射问题;袁晓铭、廖振鹏和房营光在文献[26-33]中采用波函数展开法和 Graf 加法公式对二维地表局部地形关于 SH 波散射的系列问题进行了研究;梁建文等在文献[34-38]中采用波函数展开法和大圆近似半空间边界的方法分别研究了圆弧层状沉积谷地、地下洞室群和地下圆形衬砌对入射平面 SV 波、P 波和 SH 波的系列散射问题;黎在良和刘殿魁在文献[39]中对固体波的一般传播理论及研究方法做了全面介绍,尤其是其中提到的“域函数法”,对于波函数展开法推广应用到任意形状边界散射体对波的散射问题研究是非常重要的;钟伟芳和聂国华在文献[40]中概括了国内外对弹性波散射的研究现状,除介绍弹性波理论的一般概念和基本方程外,还重点介绍诸如波函数展开法、积分方程法、传递矩阵法、射线理论、复变函数法和等效内含物方法 6 种方法,尤其是对于远场分析用到的远场位移和散射横截面等理论做了详细介绍,同时对于介质阻抗重建、形状识别等反演内容也都给予了分析和说明。

A. M. Abd - Alla 和 S. R. Mahmoud^[41]利用波函数展开法研究了不同边界条件下非均匀材质中空心柱体和空心球体旋转时径向振动的固有频率问题;采用边界元(BEM)方法、特殊函数变换和 Radon 变换,George D. Manolis、Petia S. Dineva、Tsviatko V. Rangelov^[42]研究了入射 SH 波作用下光滑非均质、各向异性弹性平面内不同类型缺陷(如裂纹、孔洞等)的动态相互作用问题,且通过数值算例验证了裂纹应力强

度因子和孔洞边界应力集中系数结论的正确性;Tsaur Deng - How、Chang Kao - Hao 和 Hsu Ming - Sheng^[43]研究了半空间界面深陷对称 V 形凹陷对 SH 波的散射问题。利用波函数展开法和 Graf 加法公式,巴振宁和梁建文^[44]研究了分层半空间中凹陷地形对平面入射 SH 波的 2.5 维散射问题。利用复变函数法、Green 函数法、虚源法和裂纹切割技术,齐辉等人^[45,46]分别研究了双相介质半空间界面裂纹及其附近圆形衬砌对 SH 波的散射与动应力集中问题和含任意直线形裂纹的直角域中圆柱夹杂对 SH 波的散射问题;韩峰、王光政和康朝阳^[47]采用复变函数法、多极坐标变换和分区求解的方法,借助于问题的位移/应力连续边界条件研究了 SH 波作用下三角形凸起与半圆形凹陷组合而成的复杂地形的散射问题;采用 Hankel 变换、对偶积分方程理论、Nobel 变换和 Fredholm 积分方程,蔡袁强、王鹏、曹志刚^[48]针对饱和地基表面刚性圆形基础在倾斜入射 SH 波作用下的扭转振动问题,在假设饱和地基满足 Biot 波动方程的前提下,提出了一种半解析分析方法;在文献[49]中,刘中宪、梁建文利用大圆弧面近似模拟地表面,采用 Fourier-Bessel 波函数展开法分析求解了楔形空间中圆弧形沉积对平面 SH 波的散射问题,通过数值算例验证了方法的计算精度;在文献[50]中,蔡晓刚假设震源区域为 ATI 介质,而传波介质为全空间各向同性介质的前提下给出了剪切位错源 P 波远场辐射的解析表达式,讨论了震源区各向异性对远场 P 波振幅和震源球的影响;利用位移连续边界条件和 Graf 加法公式,夏唐代等人^[51]研究了 SH 波入射下多重散射的改进算法及任意桩布置形式的隔振问题,得到了任意分布的多个圆柱体对弹性波入射时散射系数的理论解析解,并在此基础上讨论了双排非连续屏障对于弹性波的隔离问题;在文献[52]中,Yang Caihong 采用 Fourier - Bessel 波函数展开法和大圆弧面逼近地平面的方法研究了地面弧形凹陷地形对 P 波的散射问题(高频解),给出了凹陷地形不同深宽比情况下,入射平面 P 波的二维散射问题,不同于现存的其他解析解,为了保证波场解也适用于高频入射波,作者还利用了柱函数的渐近性直接给出波函数中的未知系数,从而避免了求解无穷线性方程组及其数值求解的病态性问题;于兰芳、马树华和宋泽成等人^[53]研究了模糊数值函数复合函数的求导法则,求出了二元模糊数

值函数的偏导数,利用模糊方程组和水平截集方法提出了一维模糊波动方程的一种解法。

1.2 弹性波散射问题的主要研究方法

由于弹性波散射问题在理论和工程中的重要性,几十年来,人们发展了许多切实可行的方法,其中比较典型的方法主要有波函数展开法、Green 函数法、积分变换法、复变函数法、摄动法和几何射线法。

1. 波函数展开法

该方法在数学物理方法中又称为分离变量法。其特点是通过变量分离将某个场量函数表达为几个单变量函数的乘积形式,根据该场量函数所满足的齐次偏微分方程及相应的边界条件和自然边界条件,可以将原来的定解问题转化为几个常微分方程定解问题。其中,部分问题就是原定解问题对应的特征值(固有值)问题。求解这些特征值问题得到问题的特征值和特征函数后,再由问题的线性性并利用叠加原理构造出问题的无穷级数解(其中含有未知系数)。必要时还应利用问题的初始条件和傅里叶级数展开的办法确定未知系数,这种方法就是波函数展开法。其详细内容在数学物理方法中有介绍,不过需要注意的是,根据问题的特点,问题的特征函数系可能是正弦或余弦函数系,还可能是 Bessel 函数系、Hankel 函数系、Legendre 函数系、Weber 函数系、Mathieu 函数系等特殊函数系。对于稳态问题,可直接利用边界条件求解边值问题;对于瞬态问题,应首先对方程和定解条件进行积分变换,将原来的含时间变量的定解问题转化为频域内的边值问题,再利用上述办法得到问题的频域解,然后通过积分反变换得到问题的时域解。到目前为止,曲线坐标系的种类有 11 种,而对于矢量波动方程仅有 6 种坐标(笛卡儿坐标、球坐标、锥面坐标、圆柱坐标、椭圆柱坐标、抛物坐标)可以分离变量,因而分离变量法在应用上受到一定限制。不过,刘殿魁等利用复变函数法提出的“域函数”概念,使得波函数展开法的适用范围得到拓广。

2. Green 函数法

该方法的特点是根据具体问题构造出一个新的定解问题,该定

解问题当只有一个定解方程时(非齐次的,且非齐次项是一个广义点源函数),得到的是基本解,只有再考虑上问题的边界条件后得到才是问题对应的 Green 函数解。利用问题的线性性质,通过叠加原理得到原来问题的积分解。其基本理论在一般数学、物理教程中都有详细介绍。

3. 积分变换法

该方法主要是利用傅里叶变换或拉普拉斯变换将原来的问题转化到变换域内进行求解,而后进行反变换得到原问题的解。其主要优点是降维性,即将偏微分方程转化为常微分方程,或降低偏微分方程的阶数,或将常微分方程转化为代数方程等。缺点是反变换不总是容易处理。

4. 复变函数法

将复变函数法引入到弹性静力学是由 L. N. G. Filon 首先提出,后由 Kolosoff 和 N. I. Muskhelishvili。N. I. Muskhelishvili 发展,形成了一套完整的复变函数理论。最早将复变函数理论引入到二维弹性波的散射问题研究中的是由刘魁魁等人,他们于 20 世纪 80 年代完成。该方法的特点是将问题中所有的场物理量表达为平面复变量及其共轭复变量的函数。其优点是可以利用保角映射技术将问题中的不规则边界变换为容易处理的简单边界(如单位圆边界),引入的“域函数”概念使得变换后的方程解可以表示成以“域函数”为通项核心的级数形式,利用问题的边界条件和复数傅里叶变换得到一个仅包含波函数中未知系数的无穷代数方程组,在满足一定计算精度的前提下,通过有限项截断进行求解。该方法不仅适用于单个或多个任意形状的缺陷对弹性波散射问题的研究,而且其提出的“域函数”概念大大拓宽了经典波函数展开法的使用范围。

5. 摄动法

摄动法主要是针对波动方程和边界条件进行一定的摄动,然后再进行求解的一种近似方法,其中以摄动边界法居多。该方法常与其他方法结合在一起对问题进行研究。近几十年来,这一方法又逐渐发展成渐近匹配法,将原来问题变成内问题和外问题,而内、外问题用不同的级数进行求解,最后按照一定的条件匹配起来。