Weijifen

微积分

下册

主编　林举翰

编者　詹涌强　吴丽镐　陈妙玲

杨春侠　黄业文　卢　珍　杨荣领

華南理工大學出版社

SOUTH CHINA UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

微　积　分

（下 册）

主　编　林举翰
编　者　詹涌强　吴丽镐　陈妙玲
杨春侠　黄业文　卢　珍
杨荣领

华南理工大学出版社
SOUTH CHINA UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS
· 广州 ·

图书在版编目(CIP)数据

微积分．下册/林举翰主编．—广州：华南理工大学出版社，2014.2
ISBN 978-7-5623-4162-8

Ⅰ．①微…　Ⅱ．①林…　Ⅲ．①微积分-高等学校-教材　Ⅳ．①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 027411 号

微积分(下册)
林举翰　主编

出 版 人：韩中伟
出版发行：华南理工大学出版社
(广州五山华南理工大学 17 号楼，邮编 510640)
http://www.scutpress.com.cn　E-mail:scutc13@scut.edu.cn
营销部电话：020-87113487　87111048（传真）
责任编辑：欧建岸
印 刷 者：广东省农垦总局印刷厂
开　　本：787mm×960mm　1/16　印张：12　字数：222 千
版　　次：2014 年 2 月第 1 版　2014 年 2 月第 1 次印刷
印　　数：1～5 000 册
定　　价：23.50 元

前言

本《微积分》教材内容包括一元函数微积分及其应用、多元函数微积分及其应用、常微分方程和无穷级数等。本教材适用于独立学院经济类与管理类专业文、理科本科生，为学生今后学习各类专业后继课程和进一步扩大数学知识而奠定必要的数学基础。

本教材参照2003年教育部数学基础课教学指导委员会重新修订的全国“工科类本科数学基础课程教学基本要求”，结合我们最近七八年间教学实践的状况，根据经管类培养“应用型”、“创新型”人才的需要，对原有的《微积分》教材进行了一些具体的改革，其特点如下：

1. 本教材在讨论微积分的研究对象——函数的过程中，概括给出学习微积分常用的初等数学知识，加强中学数学与大学数学的衔接，增强入学新生学习微积分的信心。

2. 本教材以微积分从诞生到严密化的发展进程为主线，系统介绍微积分的基本概念、基本理论和基本运算方法及微积分在经管类专业的应用。体现了数学研究的对象决定了它的两个基本特点，即高度抽象性和应用的广泛性。这也是对培养“应用型”、“创新型”人才的必然要求。

3. 一般而论，研究型人才应具有较扎实的数学理论基础，而应用型人才应把重点放在数学内容的数学思想和数学方法层面上。学生应通过多思考、多讨论、多练习和多总结的学习方法使应用数学思想方法分析和解决实际问题的能力获得提升。例如，通过学习极限的思想方法、学习定积分的元素法、学习无穷级数概念的思想由来，等等，就能起到提升分析和解决实际问题的能

力的作用。

4. 本教材每节配有习题，每章有总复习题。习题中不仅有常规的用来验查“学、思、练”是否到位的问题，也有一些包括要求有某种程度的独立见解、有能动性或创造精神的问题。

全书分为上、下两册共8章，讲课时数约96学时，讲课与复习及作业时数比为1∶2左右。

本书由林举翰主编，负责全书统稿、定稿。参加编写的人员有：第一章黄业文、杨荣领；第二章卢珍；第三章吴丽镐；第四章杨春侠；第五章詹涌强；第六章黄业文、陈妙玲；第七章陈妙玲、杨春侠、卢珍；第八章詹涌强、杨荣领、吴丽镐。

华南理工大学广州学院领导关心和支持学校教材建设，多次派出数学教师参加本省的数学教学经验交流会和全国的大学数学课程报告论坛学习。华南理工大学出版社为本书出版付出了辛勤的劳动。在此，我们一并表示诚挚的谢意。

由于编者水平有限，书中如存在不妥或错误之处，恳请读者批评指正。

编　者

2014年2月

目　录

第五章　定积分及其应用

积分学包括不定积分和定积分及其应用．上册第四章介绍了不定积分．不定积分是求导数(或微分)运算的逆运算．这里介绍定积分，它是一种特殊的和式极限．

本章先从实际问题入手建立定积分的概念，再揭示定积分与不定积分的联系，最后讨论定积分的计算与应用问题．

第一节　定积分的概念与性质

一、引例

1. 求曲边梯形的面积

先看一个特例：

例 1　求曲线 $y=x^2$、直线 $x=1$ 和 x 轴所围成的曲边三角形 OAB 的面积 A(图 5－1).

我们知道，对于某些规则的平面图形，如矩形、梯形等，求其面积有公式可用．但对于一些曲边或不规则的平面图形，在初等数学中就没有理想的面积公式可用．于是只好将曲的或不规则的平面图形分割成规则的图形，实际上是把整体分成了许多局部．就整体来说，其周边是曲的或不规则的，但就其局部来说，小段曲线或不规则的部分上可以近似地“以直代曲”，再把这些局部的图形加起来就近似地得到整体．分割得越细，所得的近似值就越精确．

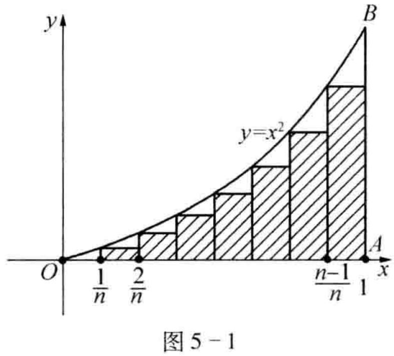

图 5－1

现在按上述思路用矩形面积＝高×底的公式来解决求曲边三角形的面

积问题．先把曲边三角形 OAB 分成 n 个窄曲边梯形，而每一个窄曲边梯形的面积可以用一个窄矩形的面积来近似代替．注意到每个窄矩形与窄曲边梯形有相同的底，但每个窄矩形的高是不同的，这时可以取每个窄曲边梯形底边的左端点处的高作为窄矩形的高，如图 5－1 所示，整个曲边三角形的面积就可以用窄矩形面积之和，即阶梯形的面积来近似代替．

具体地说，就是将区间[0，1]分为 n 个相等的小段，其横坐标分别为

$$0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},\cdots,\frac{n-1}{n},1$$

每一小段的长为$\frac{1}{n}$，而高分别为

$$0,\left(\frac{1}{n}\right)^2,\left(\frac{2}{n}\right)^2,\cdots,\left(\frac{n-1}{n}\right)^2$$

得到 n 个窄矩形，其面积的总和(图 5－1 的阴影部分)A_n 为

$$\begin{aligned}A_n &= 0\cdot\frac{1}{n}+\left(\frac{1}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}+\left(\frac{2}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}+\cdots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}\\ &= \frac{1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2}{n^3}=\frac{1}{n^3}\cdot\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}\text{①}\\ &= \frac{1}{3}-\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}\end{aligned}$$

---

①注：

利用恒等式

$$(n+1)^3=n^3+3n^2+3n+1$$

得

$$\begin{cases}(n+1)^3-n^3=3n^2+3n+1\\ n^3-(n-1)^3=3(n-1)^2+3(n-1)+1\\ \qquad\vdots\\ 3^3-2^3=3\cdot2^2+3\cdot2+1\\ 2^3-1^3=3\cdot1^2+3\cdot1+1\end{cases}$$

把这 n 个等式两端分别相加，得

$$(n+1)^3-1=3(1^2+2^2+\cdots+n^2)+3(1+2+\cdots+n)+n$$

由于 $1+2+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$，代入上式，得

$$n^3+3n^2+3n=3(1^2+2^2+\cdots+n^2)+\frac{3}{2}n(n+1)+n$$

整理后，得

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

是曲边三角形 OAB 面积的近似值．当 n 越大，相应地近似值越接近精确值．若要求出精确值，应让 $n\to\infty$ 取极限，得所求面积 A 为

$$A=\lim_{n\to\infty}A_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}\right)=\frac{1}{3}$$

现在来求由连续曲线 $y=f(x)$，$f(x)\geqslant 0$，x 轴及直线 $x=a$，$x=b$ 所围成的曲边梯形的面积 A.

按上例的思路，把解决这个问题用数学语言表述为以下四个步骤：

①**分割**．将区间 $[a,b]$ 任意分成 n 个小区间，设分点为

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$$

每个小区间的长度为

$$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

它们不一定相等．过每个分点作平行于 y 轴的直线，把原来的曲边梯形分成 n 个窄曲边梯形（如图 5－2），它们的面积分别记为

$$\Delta A_1,\Delta A_2,\cdots,\Delta A_n$$

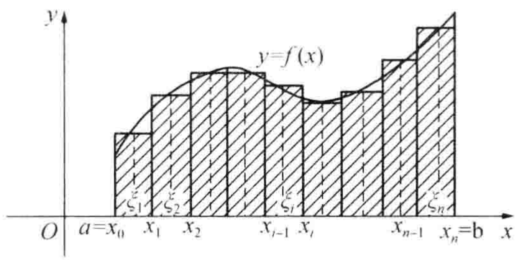

图 5－2

②**近似代替**．在每个小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上任取一点 $\xi_i(i=1,2,\cdots,n)$，用矩形面积 $f(\xi_i)\Delta x_i$ 近似代替第 i 个窄曲边梯形面积 ΔA_i，即

$$\Delta A_i\approx f(\xi_i)\Delta x_i\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

③**求和**．将 n 个窄矩形的面积加起来，得到该曲边梯形面积 A 的一个近似值

$$A=\sum_{i=1}^{n}\Delta A_i\approx\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$$

④**取极限**．　显然，上面的和式 $\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$ 与区间 $[a,b]$ 的分割方法及 ξ_i 的取法有关，但是，只要分得越细，所得的近似值就越接近于精确的面积 A. 如果用 λ 表示分割的小区间中长度最大者，即令 $\lambda=\max\{\Delta x_1,$

Δx_2，…，$\Delta x_n\}$，则当 $\lambda\to 0$ 时(这时分段数 n 无限增多，即 $n\to\infty$)，近似值就转化为精确值 A，即

$$A=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$$

2. 求变速直线运动的路程

例 2 设某物体做变速直线运动，已知速度 $v(t)$ 是时间 t 的连续函数，且 $v(t)\geqslant 0$，求它在时间间隔 $[T_0, T_1]$ 上所经过的路程 s.

如果是匀速直线运动，有公式

$$路程=速度\times时间$$

现在速度是变量，不能直接套用公式．但因速度 $v(t)$ 是连续变化的，在一段很小的时间内，可以近似地看作不变．因此如果把时间间隔分成很小的时段，在每个小时段内；速度以“不变代变”，求得物体所走过路程的近似值．最后，通过对时间间隔无限细分的极限过程求得变速直线运动的路程的精确值．具体步骤如下：

①**分割**．将区间 $[T_0, T_1]$ 任意分成 n 个小区间，设分点为

$$T_0=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_{n-1}<t_n=T_1$$

$$\Delta t_i=t_i-t_{i-1}\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

②**近似代替**．在每个小区间 $[t_{i-1}, t_i]$ 上任取一点 τ_i $(i=1, 2, \cdots, n)$，用乘积 $v(\xi_i)\Delta t_i$ 近似代替第 i 个小区间的路程 Δs_i，即

$$\Delta s_i\approx v(\tau_i)\Delta t_i$$

③**求和**．所有小区间上的近似路程之和近似等于路程 s，即

$$s\approx\sum_{i=1}^{n}v(\tau_i)\Delta t_i$$

④**取极限**．将 $[T_0, T_1]$ 无限细分，即令 $\lambda=\max\{\Delta t_1, \Delta t_2, \cdots, \Delta t_n\}$．当 $\lambda\to 0$ 时，则得路程的精确值

$$s=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}v(\tau_i)\Delta t_i$$

二、定积分的定义

上面两个引例，一个是几何问题，一个是物理问题，实际背景完全不同，但它们都取决于一个函数及其自变量的变化区间，即曲边梯形的高 $y=f(x)$ 及其底边上的点的变化区间 $[a, b]$，直线运动的速度 $v=v(t)$ 及时间 t 的变化区间 $[T_0, T_1]$，并且解决问题的方法都是按照“分割、近似代

替、求和、取极限”的步骤求一个特殊的和式极限.

在自然科学和工程技术中，许多实际问题都可归结为这种极限. 为此我们有必要抛开这些问题的具体意义，抓住它们在数量关系上的共同本质与特性加以概括，抽象出定积分的定义：

定义　设函数$f(x)$在闭区间$[a, b]$上有界，用分点

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

将区间$[a, b]$任意分成n个小区间$[x_{i-1}, x_i]$($i=1, 2, \cdots, n$)，每个小区间的长度为

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \quad (i = 1,2,\cdots,n)$$

在每个小区间$[x_{i-1}, x_i]$上任取一点ξ_i($x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i$)，作和式

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \tag{1}$$

记$\lambda = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_n\}$，如果当$\lambda \to 0$时，和式(1)的极限存在，且此极限值不依赖于对$[a, b]$的分法和点$\xi_i$的取法，则称函数$f(x)$在$[a, b]$上可积. 并称此极限值为$f(x)$在$[a, b]$上的定积分，记作

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

即

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \tag{2}$$

其中$f(x)$称为被积函数，$f(x)\,\mathrm{d}x$称为被积表达式，x称为积分变量，$[a, b]$称为积分区间，a称为积分下限，b称为积分上限.

根据定积分的定义，前面引例中，曲边梯形的面积A就是曲边函数$y=f(x)$ ($f(x) \geqslant 0$)在区间$[a, b]$上的定积分，即

$$A = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

变速直线运动的路程s是速度函数$v(t)$ ($v(t) \geqslant 0$)在时间间隔$[T_0, T_1]$上的定积分

$$s = \int_{T_0}^{T_1} v(t)\,\mathrm{d}t$$

定积分定义的几点说明：

(1)定积分$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$表示一个数值，这个数值完全由被积函数$f(x)$和积分区间$[a, b]$所确定，它与积分变量用什么字母表示无关，即

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u$$

(2)在定积分的定义中，我们假设 $a<b$. 下面对于 $a>b$ 与 $a=b$ 的情形作如下规定：

当 $a>b$ 时，

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$$

当 $a=b$ 时，

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

这样规定以后，不论 $a<b$，$a>b$ 或 $a=b$，定积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 都有定义.

(3)关于函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上满足什么条件才可积，这里我们不作深入讨论，而只给出以下两个充分条件：

①设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积.

②设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界，且只有有限个间断点，则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积.

三、定积分的几何意义

(1)当 $f(x)\geqslant 0$ 且 $a<b$ 时，定积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 在几何上表示由曲线 $y=f(x)$，直线 $x=a$，$x=b$ 与 x 轴所围成的曲边梯形的面积；

(2)当 $f(x)<0$ 时，那么曲边梯形位于 x 轴的下方．由于 $\Delta x_i>0$，$f(\xi_i)<0$，和式中每项 $f(\xi_i)\Delta x_i<0$ ($i=1, 2, \cdots, n$)，该定积分的值就是负的，且等于 $-A$，即 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -A$. 这里 A 仍表示曲边梯形的面积(图 5-3)，或者说，定积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 等于曲边梯形面积的负值(注：我们通常认为面积是正数).

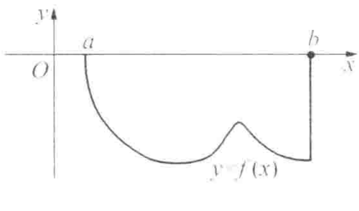

图 5-3

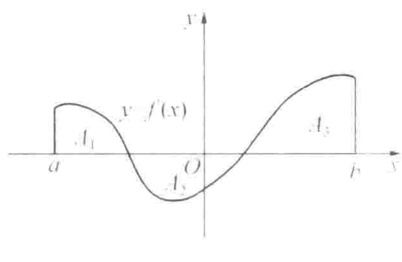

图 5-4

(3)当$f(x)$在$[a, b]$上有正有负时，那么定积分所表示的应该是由曲线$y=f(x)$及直线$x=a$，$x=b$，与x轴所围成的各个曲边梯形面积的代数和(图5-4)，即

$$\int_a^b f(x)\,dx = A_1 - A_2 + A_3$$

其中A_1，A_2，A_3表示各部分的面积。

例3　利用定积分的几何意义求下列定积分的值.

(1) $\int_{-1}^{2} x\,dx$;　　　　(2) $\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2-x^2}\,dx$.

解　(1)在区间$[-1, 2]$上作函数$y=x$的图形，它与直线$x=-1$，$x=2$及x轴围成两个三角形A_1与A_2(如图5-5)，其面积分别为$A_1=\frac{1}{2}$，$A_2=2$. 由定积分的几何意义知

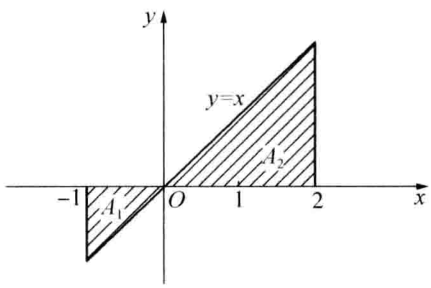

图5-5

$$\int_{-1}^{2} x\,dx = -A_1 + A_2 = -\frac{1}{2} + 2 = \frac{3}{2}$$

(2)由定积分的几何意义知定积分$\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2-x^2}\,dx$表示由上半圆周$y=\sqrt{a^2-x^2}$与直线$x=-a$，$x=a$及$x$轴所围成的图形的面积，故有

$$\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\pi a^2$$

四、定积分的性质

由定积分的定义

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

以及极限的运算法则与性质，可以得到定积分的几个基本性质.

在下面的讨论中，我们假设函数在相关的区间上都是可积的.

性质 1 $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$

证
$$\begin{aligned}\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\mathrm{d}x &= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}[f(\xi_i) \pm g(\xi_i)]\Delta x_i \\ &= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \pm \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i \\ &= \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

性质 1 对任意有限个函数都是成立的. 类似地，可以证明:

性质 2 $\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ (k 是常数).

性质 3 设 $a<c<b$. 则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

按定积分定义的补充规定，对于 a、b、c 三点的任何位置，性质 3 仍然成立. 例如当 $a<b<c$ 时，由于

$$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x,$$

于是得
$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x &= \int_a^c f(x)\mathrm{d}x - \int_b^c f(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

此性质表明，定积分对于积分区间具有可加性.

性质 4 如果在区间 $[a, b]$ 上 $f(x)\equiv 1$，则

$$\int_a^b 1\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{d}x = b-a$$

性质 5 如果在 $[a, b]$ 上 $f(x)\leqslant g(x)$，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

证 因为 $f(\xi_i)\leqslant g(\xi_i)$ 及 $\Delta x_i\geqslant 0$ ($i=1, 2, \cdots, n$)，得

$$f(\xi_i)\Delta x_i \leqslant g(\xi_i)\Delta x_i$$

相加得

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i$$

令 $\lambda\to 0$，上式两边取极限即得到要证的不等式.