“十二五”江苏省高等学校重点教材

高等数学

（第三版）
下册

◎ 主　编　高岩波　吴建成
◎ 副主编　李　洵　郭跃华　马　强

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

"十二五"江苏省高等学校重点教材

高等数学

Gaodeng Shuxue

（第三版）

下册

主　编　高岩波　吴建成

副主编　李　洵　郭跃华　马　强

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容提要

本书入选“十二五”江苏省高等学校重点教材（编号：2013－1－015）。

全书依据最新的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”，并参考《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》，在第二版的基础上为高等学校理工科非数学类专业学生修订而成，分为上、下两册。

下册内容包括空间解析几何、多元微积分、无穷级数等，书后附习题解答与提示。本次修订增加了主要概念的背景与应用和许多新颖、生动的应用实例，以培养学生应用数学知识解决实际问题的意识与能力。超出基本要求以外的内容与习题，应用性较强或为考研学生准备的内容，用＊号标注。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学．下册/高岩波，吴建成主编．--3版．--北京：高等教育出版社，2014.1
ISBN 978－7－04－039124－4

Ⅰ．①高… Ⅱ．①高… ②吴… Ⅲ．①高等数学－高等学校－教材 Ⅳ．①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第298088号

策划编辑 张彦云 责任编辑 张彦云 封面设计 张申申 版式设计 余 杨
插图绘制 杜晓丹 责任校对 李大鹏 责任印制 尤 静

出版发行	高等教育出版社	网 址	http://www.hep.edu.cn
社 址	北京市西城区德外大街4号		http://www.hep.com.cn
邮政编码	100120	网上订购	http://www.landraco.com
印 刷	北京市昌平百善印刷厂		http://www.landraco.com.cn
开 本	787mm × 960mm 1/16		
印 张	17.5	版 次	2005年6月第1版
字 数	310千字		2014年1月第3版
购书热线	010-58581118	印 次	2014年1月第1次印刷
咨询电话	400-810-0598	定 价	25.80元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换

物 料 号 39124-00

主　　编

吴建成　高岩波

副主编

孙玉强　石澄贤　曹　毅

编委会

（按姓氏笔画排序）

马　强　石澄贤　刘　佳　刘维龙　孙玉强　李志林
李　洵　吴建成　宋晓秋　陆国平　周友明　赵志新
施庆生　高岩波　郭跃华　郭淑娟　黄清龙　曹菊生
曹　毅　蒋家尚

郑重声明

目 录

第八章　空间解析几何与向量代数

在平面解析几何中我们通过引进坐标系把平面上的点和一对有序数对对应起来，把平面上的曲线图形和方程对应起来，从而可以用代数方法来研究几何问题．空间解析几何也是按照同样的方法建立起来的．

本章首先建立空间直角坐标系，然后引进向量的概念及向量的运算，并以向量为工具来讨论空间的平面和直线，最后介绍几种常见的曲面．

第一节　空间直角坐标系

一、空间直角坐标系及点的坐标

为了找到空间图形与方程的关系，需要建立空间点与有序数组之间的联系．为此，我们引进空间直角坐标系．

过空间一个定点 O，作三条互相垂直的数轴，它们都以 O 为原点，一般具有相同的长度单位．这三条轴分别称为 x 轴（横轴），y 轴（纵轴）和 z 轴（竖轴），统称为坐标轴．通常把 x 轴和 y 轴置于水平面上，而 z 轴则是铅直的．它们的正方向符合右手规则，即以右手握住 z 轴，当右手的四个手指从 x 轴的正向以 $\frac{\pi}{2}$ 角度转向 y 轴正向时，大拇指的方向就是 z 轴的正方向．这样的三条坐标轴就组成了一个空间直角坐标系，记作 $Oxyz$，点 O 叫做坐标原点（如图 8－1）．x 轴和 y 轴所确定的平面叫做 xOy 面，y 轴和 z 轴所确定的平面叫做 yOz 面，x 轴和 z 轴所确定的平面叫做 zOx 面，它们统称为坐标面．三个坐标面将空间分成八个部分，每一部分叫做卦限．其边界含有 x 轴、y 轴和 z 轴正半轴的那个卦限叫做第一卦限，第二、三、四卦限均在 xOy 面的上方，按逆时针方向确定．第五、六、七、八卦限在 xOy 面的下方，依次位于第一、二、三、四卦限之下（如图 8－2），这八个卦限分别用罗马数字 Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ、Ⅴ、Ⅵ、Ⅶ、Ⅷ表示．

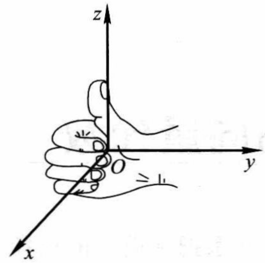

图 8－1

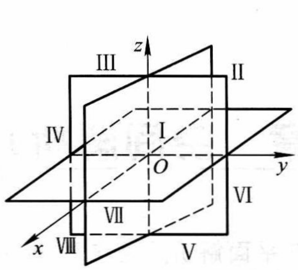

图 8－2

取定了空间直角坐标系之后，就可以建立空间中点与有序数组之间的一一对应关系. 设 M 是空间中的一个点，过点 M 作三个平面分别垂直于 x 轴、y 轴、z 轴，它们与坐标轴的交点依次为 P,Q,R（如图 8－3），这三个点在三个坐标轴上的坐标依次为 x,y,z. 于是空间中一点 M 就唯一地确定了一个有序数组 (x,y,z)；反之，已知一个有序数组 (x,y,z)，我们在 x 轴，y 轴，z 轴上找到坐标分别为 x,y,z 的三个点 P,Q,R，过这三个点各作一平面分别垂直于所属的坐标轴，这三个平面就唯一地确定了一个交点 M. 这样，空间中的点 M 就与有序数组 (x,y,z) 之间建立了一一对应关系. 这个有序数组 (x,y,z) 叫做点 M 的坐标，其中 x,y,z 依次称为点 M 的横坐标、纵坐标及竖坐标，此时点 M 记作 $M(x,y,z)$.

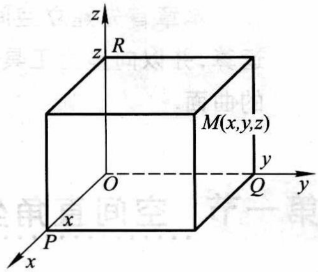

图 8－3

原点、坐标面上和坐标轴上的点，其坐标各有一定特点，如坐标原点的坐标为 $(0,0,0)$，x 轴上点的坐标为 $(x,0,0)$，y 轴上点的坐标为 $(0,y,0)$，z 轴上点的坐标为 $(0,0,z)$，xOy 面上点的坐标为 $(x,y,0)$，yOz 面上点的坐标为 $(0,y,z)$，zOx 面上点的坐标为 $(x,0,z)$.

二、两点间距离公式

设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$，$M_2(x_2,y_2,z_2)$ 为空间两点，过 M_1，M_2 两点作六个和坐标轴垂直的平面，这六个面围成一个以 M_1M_2 为对角线的长方体（如图 8－4）. 由于 $\triangle M_1NM_2$ 为直角三角形，$\angle M_1NM_2$ 为直角，所以

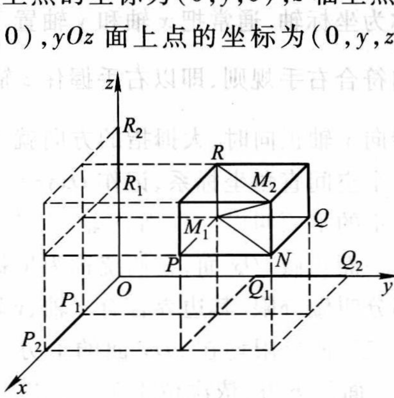

图 8－4

$$d^2=|M_1M_2|^2=|M_1N|^2+|NM_2|^2.$$

又$\triangle M_1PN$也是直角三角形，且$|M_1N|^2=|M_1P|^2+|PN|^2$，所以

$$d^2=|M_1M_2|^2=|M_1P|^2+|PN|^2+|NM_2|^2.$$

由于

$$|M_1P|=|P_1P_2|=|x_2-x_1|,$$
$$|PN|=|Q_1Q_2|=|y_2-y_1|,$$
$$|NM_2|=|R_1R_2|=|z_2-z_1|,$$

所以

$$d=|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}. \tag{1}$$

这就是空间两点间的距离公式.

特殊地，点$M(x,y,z)$与坐标原点$O(0,0,0)$的距离为

$$d=|OM|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}. \tag{2}$$

例 1　在z轴上求与两点$A(-4,1,7)$和$B(3,5,-2)$等距离的点.

解　因为所求的点M在z轴上，所以设该点为$M(0,0,z)$，依题意有

$$\sqrt{(0+4)^2+(0-1)^2+(z-7)^2}=\sqrt{(3-0)^2+(5-0)^2+(-2-z)^2},$$

两边平方解得

$$z=\frac{14}{9},$$

所以，所求的点为$M\left(0,0,\frac{14}{9}\right)$.

三、曲面与方程

在平面解析几何中，曲线被看作动点的轨迹并将曲线上点的坐标和二元方程相联系. 在空间解析几何中，所有曲面都看成是点的几何轨迹. 在选定坐标系以后，曲面S上点的共同性质可以利用该曲面上的点的坐标(x,y,z)满足的一个方程$F(x,y,z)=0$来表达，凡是在曲面S上的点的坐标都满足这个方程，不在曲面S上的点的坐标都不满足这个方程，那么，这个方程

$$F(x,y,z)=0 \tag{3}$$

就称为曲面S的方程，而S称为方程(3)的图形(见图8－5). 这样，对于一个曲面上的点的几何性质的研究，就归结为对曲面上点的坐标所满足的方程的研究，从而可以用代数方法研究几何问题.

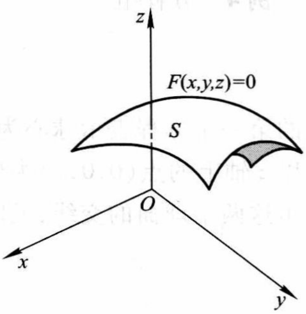

图 8－5

例 2 求三个坐标平面的方程.

解 容易看到 xOy 平面上任一点的坐标必有 $z=0$，满足 $z=0$ 的点也必然在 xOy 平面上，所以 xOy 平面的方程为 $z=0$.

同理，yOz 平面的方程为 $x=0$，xOz 平面的方程为 $y=0$.

例 3 试求球心在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$，半径为 $R(R>0)$ 的球面方程.

解 设 $M(x,y,z)$ 是球面上的任意一点，则有

$$|M_0M|=R,$$

即

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}=R,$$

或者

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2, \tag{4}$$

这就是所求的球面方程. 反之，若一个三元二次方程经配方后化为方程(4)，则该方程必定表示一个球面.

四、空间曲线的一般方程

空间曲线可以看作是两个曲面的交线. 设这两个曲面 S_1 及 S_2 的方程分别为

$$F(x,y,z)=0 \text{ 及 } G(x,y,z)=0,$$

这两个曲面的交线为 C（如图 8－6）. 由于曲线上的任何点同时在这两个曲面上，因此它的坐标应同时满足这两个曲面的方程，即满足方程组

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0. \end{cases} \tag{5}$$

反之，如果点 M 不在曲线 C 上，那么它不可能同时在两个曲面上，所以它的坐标不能满足方程组(5). 因此曲线 C 可以用方程组(5)来表示. 方程组(5)叫做空间曲线 C 的一般方程.

例 4 方程组

$$\begin{cases} x^2+y^2+(z-2)^2=1, \\ x^2+y^2+(z-1)^2=1 \end{cases}$$

中的第一个方程表示球心为 z 轴上点(0,0,2)，半径为 1 的球面，第二个方程表示以 z 轴上的点(0,0,1)为球心，以 1 为半径的球面，这两个方程组成的方程组表示这两个球面的交线，见图 8－7.

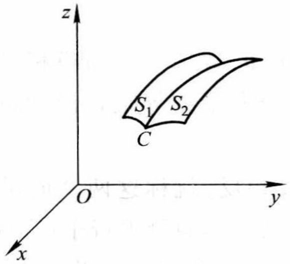

图 8－6

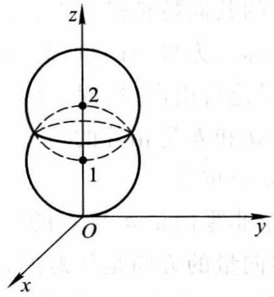

图 8－7

习　题　8－1

1. 求点$(4,-3,5)$到各坐标轴的距离.
2. 在 yOz 平面上,求与三个已知点$(3,1,2)$,$(4,-2,-2)$,$(0,5,1)$等距离的点.
3. 一动点与两定点$(2,3,1)$和$(4,5,6)$等距离,求这动点的轨迹方程.
4. 方程 $x^2+y^2+z^2-2x+4y+2z=0$ 表示什么曲面?

第二节　向量及其运算

一、向量的概念

在物理学、力学等学科中,经常会遇到既有大小又有方向的这样一类量,如力、速度、力矩等,这类量称为向量或矢量.

在数学上,通常用有向线段来形象地表示向量.有向线段的长度表示向量的大小,有向线段的方向表示向量的方向.这时向量所表示的实际物理意义就不再考虑了.以点 M_1 为起点,点 M_2 为终点的有向线段所表示的向量记作$\overrightarrow{M_1M_2}$(如图 8－8),也可以用一个粗体字母或用上方加箭头的字母表示,如 $\boldsymbol{e}$,$\boldsymbol{r}$,$\vec{a}$,$\vec{b}$,$\overrightarrow{OM}$等等.

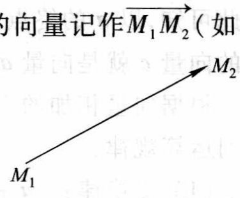

图 8－8

向量的大小又叫向量的模.向量$\overrightarrow{AB}$,$\boldsymbol{a}$ 的模分别记作$|\overrightarrow{AB}|$,$|\boldsymbol{a}|$.模为 1 的向量称为单位向量,模为 0 的向量叫做零向量,记作 $\mathbf{0}$,零向量的方向可以任意取定.与 $\boldsymbol{a}$ 的模相等、方向相反的向量叫做 $\boldsymbol{a}$ 的负向量,记作 $-\boldsymbol{a}$.

在实际问题中,有的向量与它的起点位置有关,有的向量与它的起点位置无

关. 由于向量的共同特性是它们都有大小和方向. 所以在数学上只考虑与起点无关的向量,并称其为自由向量,简称向量.

由于只讨论自由向量,对于两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$,如果它们的模相等,且方向相同,就说向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 是相等的,记为 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$. 两个向量相等就是说,经过平行移动后它们能够完全重合.

如果两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的方向相同或相反,就称这两个向量平行. 记作 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$. 由于零向量的方向是任意的,因此可以认为零向量平行于任何向量.

当两个平行向量的起点放在同一点时,它们的终点和公共起点应在同一条直线上. 因此,两向量平行,又称为两向量共线.

类似地,还可引入向量共面的概念. 设有若干个向量,如果把它们的起点放在同一点时,这些向量的终点和起点在同一个平面上,就称这些向量共面.

二、向量的线性运算

1. 向量的加减法

根据物理学中关于力和速度的合成法则,我们用平行四边形法则来确定向量的加法运算.

对任意两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$,将它们的起点放在一起,并以 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 为邻边,作一平行四边形,则与 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 有共同起点的对角线向量 $\boldsymbol{c}$ (如图 8-9)就叫做向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和,记作

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}.$$

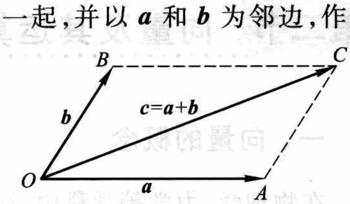

图 8-9

上述作出两向量之和的方法叫做向量相加的平行四边形法则.

在图 8-9 中有$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AC}$,所以

$$\boldsymbol{c}=\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}.$$

由此可知,以 $\boldsymbol{a}$ 的终点为起点作向量 $\boldsymbol{b}$,则以 $\boldsymbol{a}$ 的起点为起点,以 $\boldsymbol{b}$ 的终点为终点的向量 $\boldsymbol{c}$ 就是向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和,这一法则叫做向量相加的三角形法则.

根据向量相加的平行四边形法则和三角形法则,容易证明向量的加法具有下列运算规律:

(1) 交换律: $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$;

(2) 结合律: $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$;

(3) 零向量$\boldsymbol{0}$: $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}$;

(4) 负向量 $-\boldsymbol{a}$: $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$.

根据向量加法运算的结合律，三个向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}$ 相加，记为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$，$n$ 个向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n(n\geqslant 3)$ 相加可写成 $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n$，并可按三角形法则相加如下：使前一个向量的终点作为后一个向量的起点，相继作向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$，再以第一向量的起点为起点，最后一向量的终点为终点作一向量，这个向量即为所求的和. 如图 8－10 所示，有

$$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a}_4+\boldsymbol{a}_5.$$

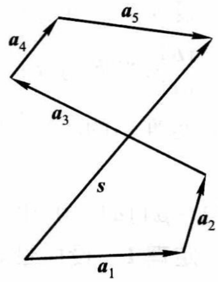

图 8－10

有了负向量可以用向量的加法定义向量的减法运算：设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 为任意两个向量，则称 $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差，记作 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$. 即

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b}).$$

$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差向量 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 实际上是以 $\boldsymbol{b}$ 的终点为起点，$\boldsymbol{a}$ 的终点为终点的向量（见图 8－11）.

2. 数与向量的乘法

设 λ 为任意实数，定义 λ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积 $\lambda\boldsymbol{a}(=\boldsymbol{a}\lambda)$ 是这样的一个向量：它的模 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$，当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向；当 $\lambda<0$，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向；当 $\lambda=0$ 时 $\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$（如图 8－12）.

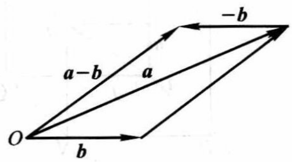

图 8－11

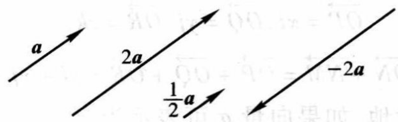

图 8－12

特别地，当 $\lambda=\pm 1$ 时有 $1\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$，$(-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}$.

向量相加及数与向量相乘统称为向量的线性运算.

数与向量的乘法具有下列运算规律：

(1) 结合律：　$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$；

(2) 向量与数的分配律：　$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$；

(3) 数与向量的分配律：　$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

证明略.

设 $\boldsymbol{a}$ 为非零向量，$\boldsymbol{a}^0$ 为与 $\boldsymbol{a}$ 同向的单位向量，则有

$$\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^0 \text{或} \boldsymbol{a}^0=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}.$$