义务教育课程标准实验教科书

数学

八年级 上册

自读课本

人民教育出版社

第十一章 一次函数

1 函数发展简史

函数（function）是数学的重要概念，也是中学阶段需要掌握的重要概念之一．函数概念的产生是人类对现实世界认识上的一次重大飞跃，它反映了量与量之间的依赖关系，它对一些数学分支的产生起着奠基性的作用，对整个数学的发展更是具有重大的意义．

函数的概念起源于笛卡儿的变量．在17世纪初，人们为了探索自然界的运动变化规律，用代数的方法研究图形（曲线）的性质，把图形（曲线）看作是点的运动的轨迹，把方程中的 x，y 看作是变量，逐渐形成了函数的概念．

从函数一词的最初提出，到现代数学函数定义的形成，函数概念经过了几次重大的发展，其定义日趋精确化、科学化，它的发展主要表现在两个方面：一是量与量之间关系的描述不断精确化；二是所描述的对象不断抽象和发展．

最初的提出

莱布尼茨

1692年，德国数学家莱布尼茨最初使用函数一词表示代数式的幂，如 x，x^2，x^3 都叫函数．以后，他又用函数表示在直角坐标系中曲线上的有关几何量，如点的横坐标、纵坐标，可见函数概念的产生与几何研究密切相关．

进一步的发展

1718年，瑞士数学家伯努利把函数定义为“由某个变量及任意的一个常数结合而成的量”．意思是凡变量 x 和常量构成的式子都叫做 x 的函数．伯努利所强调的是函数要用公式（即解析式）来表示．例如，形如 $y=kx+b(k\neq 0)$ 的函数称为一次函数，形如 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 的函数称为二次函数，形如 $y=kx(k\neq 0)$ 的函数称为正比例函数，形如 $y=\frac{k}{x}(k\neq 0)$ 的函数称为反比例函数，等等．后来随着数学的发展，有些数学家觉得不应该把函数概念局限在必须用公式来表达上，只要一些变量变化，另一些变量能随之而变化就可以，至于这两个变量的关系是否能用公式表示，可不作为判别函数的惟一标准．

1755年，瑞士数学家欧拉把函数定义为“如果某些变量以某一种方式依赖于另一些变量，即当后面这些变量变化时，前面这些变量也随之变化，我们把前面的变量称

为后面变量的函数.”在欧拉的定义中，已不再强调函数要用公式表示了. 由于函数不一定要用公式来表示，欧拉曾把坐标系中的曲线也叫函数，他认为“函数是随意画出的一条曲线”.

应该说，欧拉对函数概念的这种诠释是函数发展史上一次质的飞跃. 但是，当时有些数学家对于不用公式来表示函数感到很不习惯，有的数学家甚至抱怀疑态度，他们把能用公式表示的函数叫“真函数”，把不能用公式表示的函数叫“假函数”.

1821 年，法国数学家柯西给出了类似现在中学课本的函数定义：“在某些变量间存在着一定的关系，当一经给定其中某一变量的值，其他变量的值可以随之确定时，则将最初的变量称为自变量，其他各变量叫做函数.”在柯西的定义中，首先出现了自变量一词，自变量一般用 x 表示.

1834 年，俄国数学家罗巴契夫斯基进一步提出函数的定义：x 的函数是这样的一个数，它对于每一个 x 都有确定的值，并且随着 x 的变化而变化. 函数值可以由解析式给出，也可以由一个条件给出，这个条件提供了一种寻求全部对应值的方法. 函数的这种依赖关系可以存在，但仍然是未知的. 这个定义指出了对应关系（条件）的必要性，利用这个关系可以求出每一个 x 的对应值.

1837 年，德国数学家狄利克雷则认为，怎样去建立 x 与 y 之间的对应关系是无关紧要的，所以他的定义是：“如果对于 x 的每一个值，y 总有一个完全确定的值与之对应，则 y 是 x 的函数.”这个定义抓住了函数概念的本质属性，变量 y 称为 x 的函数，只须有一个法则存在，使得对 x 的取值范围中的每一个值，有一个确定的 y 值和它对应即可，不管这个法则是公式、图象、表格还是其他形式. 这个定义比前面的定义更具有普遍性，为理论研究和实际应用提供了方便. 因此，这个定义曾被较长时期地使用.

现代的函数定义

自从德国数学家康托尔的集合论被广泛接受后，函数概念就用集合对应关系来定义了. 其一般叙述为“设 A、B 是非空数集，如果按某个确定的对应关系 f，使对于集合 A 中的任意一个数 x，在集合 B 中都有惟一确定的数 y 与之对应，那么就称 $f:A \to B$ 为从集合 A 到集合 B 的一个函数，记作 $y=f(x)$”.

关于函数，有一点应该指出，中文数学书上使用的“函数”一词是转译词，是我国清代数学家李善兰在 1895 年翻译《代数学》一书时，把“*function*”译成“函数”，中国古代“函”字与“含”字通用，都有着“包含”的意思. 李善兰给出的定义是：“凡式中含天，为天之函数.”中国古代用天、地、人、物 4 个字来表示 4 个不同的未知数（即变量）. 这个定义的含义是：“凡是公式中含有变量 x，则该式子叫做 x 的函数.”所以“函数”是指公式里含有变量的意思.

李善兰

纵览宇宙，测算天体，探索热的传导，揭示电磁秘密，这些都和函数概念息息相关.

可以预计到，关于函数的争论、研究、发展、拓广将不会完结，它将继续影响数学及其相关学科的发展.

2 函数的表示方法

表示函数的方法，常用的有关系式法、表格法、图象法三种. 关系式法就是把两个变量的函数关系用一个等式来表示. 例如匀速直线运动的物体，其位移 S 与时间 t 的关系可表示为 $S=vt$，圆的面积 S 与半径 R 的关系可表示为 $S=\pi R^2$，弹簧秤伸长的长度 l 与所受拉力 F 的关系可表示为 $F=kl$（其中 k 为常数），其特点就是两个变量的关系清楚，容易从自变量的值求出其对应的函数值. 表格法是列出表格来表示两个变量的函数关系. 例如数学用表中的平方表、立方表、平方根表、立方根表等都是用表格法来表示函数关系的，其特点就是不必通过计算就知道当自变量取某些值时函数的对应值. 图象法则是用函数图象表示两个变量之间的关系. 例如，气象台使用的自动测温仪记录的图象，描绘的就是温度随时间变化的曲线，又如心电图，它反映的是心脏部位的生物电流随时间的变化情况，其特点是能直观形象地表示出函数的变化情况.

下面我们再通过一个具体的例子来看看函数的这三种表示方法.

有一张边长为 20 厘米的正方形纸，在它的四个角上各剪去一个相同的小正方形，制成一个无盖长方体纸盒，怎样才能使制成的无盖长方体纸盒的容积尽可能大?

(1) 关系式法

设所折无盖长方体的高为 h，则长和宽均为 $20-2h$，所以无盖长方体纸盒的容积 V 与 h 的关系为：$V=h(20-2h)^2$.

(2) 表格法

假设剪去的小正方形的边长依次为 1 厘米、2 厘米、3 厘米、4 厘米、5 厘米、6 厘米、7 厘米、8 厘米、9 厘米、10 厘米，制成的无盖长方体纸盒的容积将如何变化呢?

小正方形的边长（厘米）	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
无盖纸盒的体积（厘米^3）	324	512	588	576	500	384	252	128	30	0

通过表格，我们看到当纸盒的边长为 3 厘米时，无盖纸盒的体积最大.

我们把小正方形纸盒的边长在 2.5 厘米到 3.5 厘米之间进行细化：

小正方形的边长（厘米）	2.5	3	3.5
无盖纸盒的体积（厘米^3）	562.5	588	591.5

这时得到，当小正方形的边长为 3.5 厘米时，无盖纸盒的容积最大. 我们还可以把小正方形的边长在 3 厘米到 4 厘米之间进行细化. 总之，我们可以根据所要求的精度继续上述过程，直到得出要求的结果为止.

（3）图象法

根据表格中的数据画图，把小正方形的边长与无盖长方体的体积的关系用曲线进行表示（如图 11－1）.

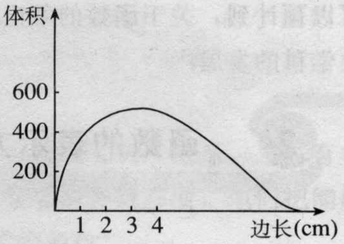


图 11－1

3 数数看

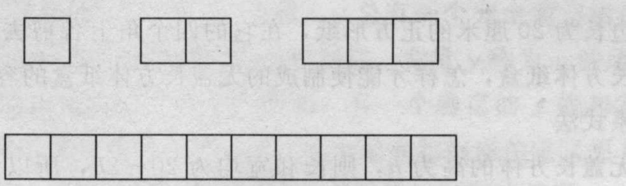
我们知道，按照下图中的方式，用四根火柴棒可以摆 1 个正方形.

（1）摆 2 个正方形需要几根火柴棒？摆 3 个正方形需要几根火柴棒？

（2）摆 10 个这样的正方形需要几根火柴棒？

（3）摆 100 个这样的正方形需要几根火柴棒？

（4）如果用 x 表示所摆正方形的个数，那么摆 x 个这样的正方形需要多少根火柴棒？



按照图中的方式，摆 2 个、3 个、10 个正方形时，因为数据小，我们可以具体地数一数火柴棒的根数，但当摆 100 个时，就很难数了，所以需要探索正方形的个数与火柴棒的根数之间的关系，进而发现所用火柴棒根数的变化规律.

设摆 x 个正方形需要 y 根火柴棒.

数法一：长的方向有$(x+x)$根火柴棒，宽的方向有$(x+1)$根火柴，所以 $y=3x+1$；

数法二：这 x 个正方形中最左边的一个用了四根火柴棒，从第二个正方形开始，每摆一个都能利用前一个的一根火柴棒，即可以认为后面的$(x-1)$个正方形每摆一个用三根火柴棒，所以 $y=4+3(x-1)=3x+1$；

数法三：将这 x 个正方形看成独立的，因为每摆一个需要四根火柴棒，共需要 $4x$ 根，而实际情况是，从第二个正方形开始，每一个和前一个重合一条边，多算了一根，共多算了$(x-1)$根，所以 $y=4x-(x-1)=3x+1$.

当然，有了正方形的个数与火柴棒的根数之间的函数关系 $y=3x+1$，就可以很快算出，摆 100 个这样的正方形需要 301 根火柴棒.

4 看图说话

小丽和她的邻居小亮同时离开家步行上学. 小丽觉得可能要晚了，所以她一开始就跑，累了后便走着去了. 小亮开始走着，后来快到学校时就跑了起来. 他们同时到达学校. 在下列两个图形中，横轴表示时间 t，纵轴表示距他们家的路程 d. 请问用哪一个图表示小丽的行程最好呢？用哪一个图表示小亮的行程最好呢？

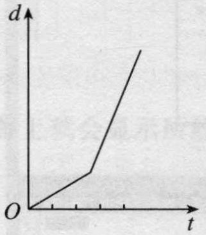


图 11－2

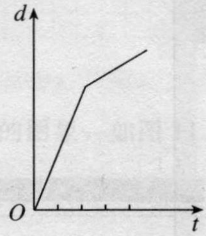


图 11－3

题目所提供的两个图象，反映的是小丽和小亮离家时间与他们距家的路程的关系，未涉及数量问题，因此考虑时不必找等量关系，而应该观图看势，观察其图象特征，进行分析、思考、判断，即定性分析.

先来看看小亮的情况，他是先走后跑，在单位时间内，跑时的路程大于走时的路程，即随时间 t 的变化后半段比前半段 d 增加得快，又因为两段内都可以认为是匀速运动，所以用图 11－2 来刻画小亮的行程较好.

而小丽是先跑后走，则随时间 t 的变化后半段比前半段 d 增加得慢，而且两段时间内也都可以认为是匀速运动，所以用图 11－3 来刻画小丽的行程较好.

5 用《几何画板》绘制函数图象

学完“一次函数”一章后，我们知道，由函数解析式画函数图象时，一般采用描点连线法，其一般步骤是：

第一步：列表. 表中给出一些自变量 x 的值及其对应的函数值 y；

第二步：描点. 在直角坐标系中，以自变量 x 的值为点的横坐标，相应的函数值 y 为该点的纵坐标，描出表格中数值对应的点；

第三步：连线. 按照横坐标由小到大的顺序把所描出的各点用光滑的曲线连接起来.

在采用描点连线法时，描出的点越多，画出的函数图象越精确. 但是，仅靠手工操作很难绘制出准确的图象，为此，我们可以借助计算机又快又准地绘制函数图象. 下面通过具体的例子来介绍用《几何画板》软件绘制函数图象的方法和过程.

例 1　画出函数 $y=3x-2$ 的函数图象.

(1) 在计算机上安装《几何画板》软件；

(2) 进入《几何画板》软件后，新建文件“绘制函数图象”；

(3) 在主界面上单击“图表”，在下拉菜单上再单击“定义新坐标”，如图 11-4；

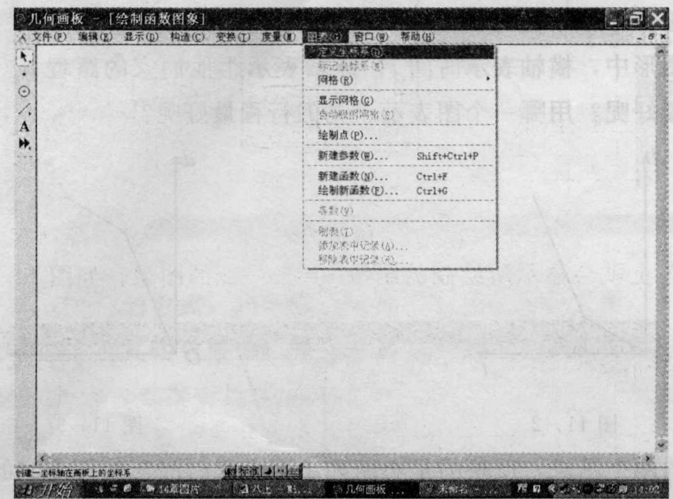


图 11-4

(4) 这时屏幕显示整个坐标系，单击鼠标右键，在弹出的对话框内单击“绘制新函数”，如图 11-5；

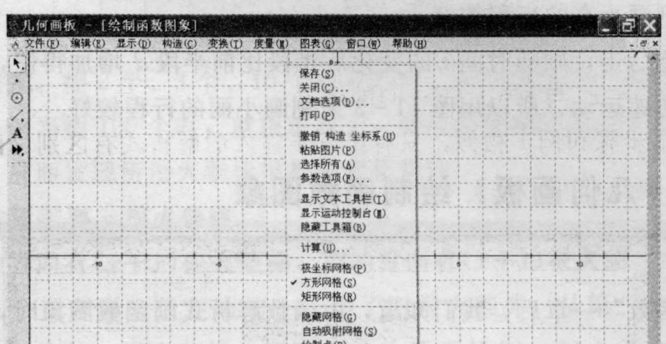


图 11-5

(5) 在接下来出现的对话框内，输入函数解析式 $3x-2$（注意不要输“$y=$”），然后按回车键，如图 11-6；

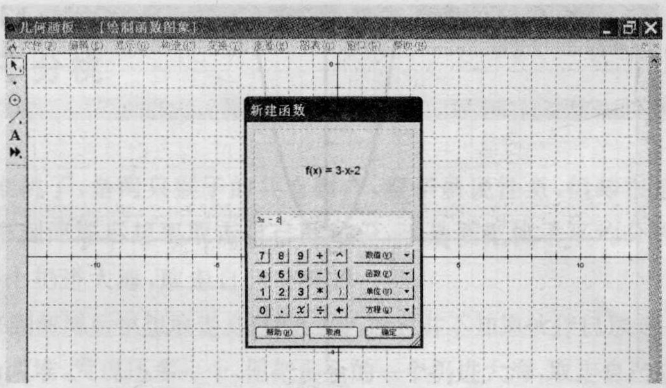


图 11-6

（6）这时屏幕上就会显示所绘制的函数 $y=3x-2$ 的图象，如图 11-7 所示.

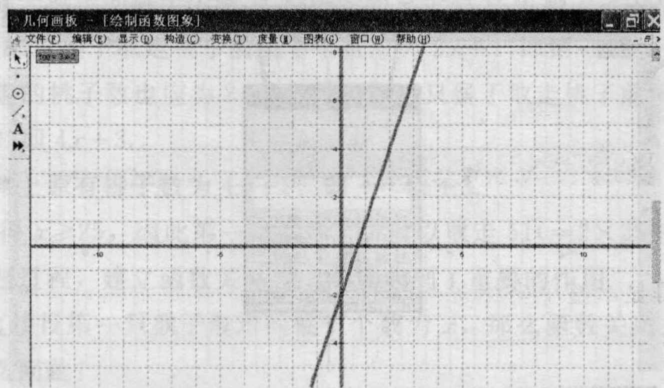


图 11-7

例 2 画函数 $y=x^2$ 与 $y=x^2(x-3)$ 的图象.

画图象的基本步骤和例 1 相似，只有第五步输入的解析式有区别. 函数 $y=x^2$ 的画法见图 11-8，图 11-9.

图 11-8

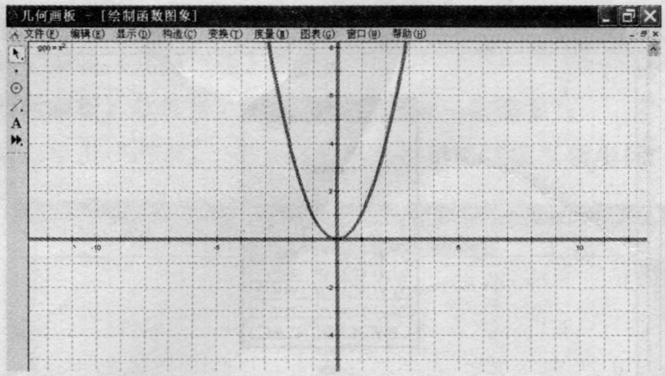


图 11－9

函数 $y=x^2(x-3)$的画法如图 11－10、图 11－11 所示.

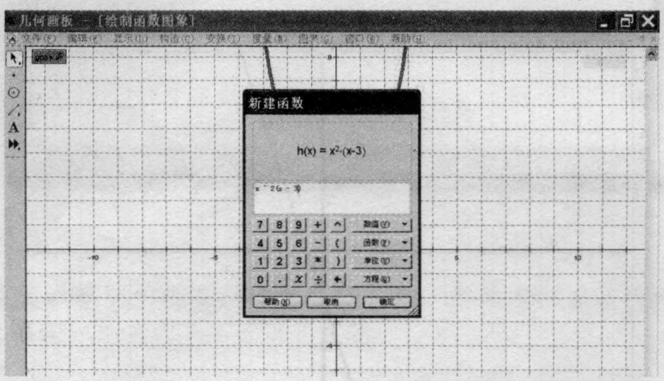


图 11－10

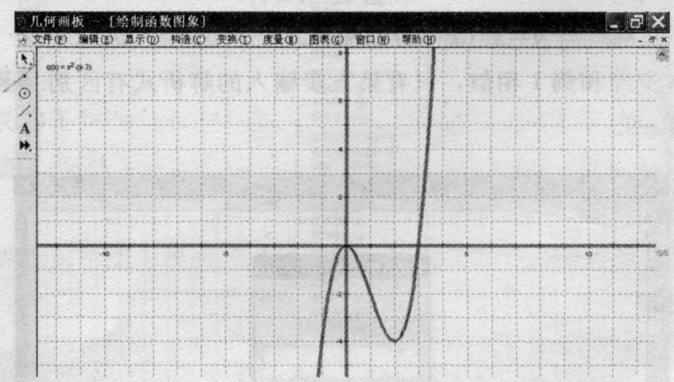


图 11－11

事实上，我们还可以将上述的两个函数画在同一个直角坐标系中，你试一下吧！

在科技迅速发展的今天，计算机已广泛地应用于各行各业中，并取得了巨大的经济效益和社会效益. 作为跨世纪的一代，我们应该跟上时代发展的步伐，广泛涉猎一些计算机知识，为以后步入真正意义的网络社会，打下一个坚实的基础.

6 猴子分桃

海滩上有一堆桃子，是两只猴子的共有财产，猴子虽说性急，但却很正直.

第一只猴子来到海滩后想要取走自己的一份，于是便把桃子平均分为两堆，发现还多一个，便把多余的一个扔进大海，取走自己应得的一份.

第二只猴子来到海滩后也想取走自己的一份，但它并不知道伙伴已取走一份. 于是第二只猴子又把桃子均分为两堆，发现还多一个，便把多余的一个扔进大海，取走自己应得的一份.

如果原有的桃子数不少于 100 个，那么第一只猴子至少可以取走多少个桃子?

这个问题可以用算术法解，但列式不容易，下面我们考虑应用函数的知识求解.

假设第二只猴子取走的桃子个数为 x，桃子的总个数为 y，则 $y\geqslant 100$.

根据题意，第二只猴子取走桃子前桃子个数应为 $2x+1$，即第一只猴子留下的桃子数为 $2x+1$，那么它取走的桃子数也应为 $2x+1$，所以第一只猴子取走桃子前桃子个数应为 $(2x+1)+(2x+1)+1$，即 $4x+3$.

这说明，海滩上原有桃子数为 $4x+3$，即 $y=4x+3$.

由 $y\geqslant 100$，得 $x\geqslant 25$，因此第一只猴子至少可以取走 $51(=2\times 25+1)$ 个桃子.

回顾整个解题过程，建立函数关系式对解题起到了重要的作用.

思考 1：若直接设第一只猴子取走的桃子个数为 x，那么函数关系式应是怎样的? 这样做可能出现什么问题?

答案：函数关系式为 $y=2x+1(y\geqslant 100)$.

由 $y\geqslant 100$，得 $x\geqslant 49.5$，因此第一只猴子至少可以取走 50 个桃子.

从过程上讲，这种解法比较简单，但为什么会出现与前面不同的结论呢? 想想，不难找出原因，如果第一只猴子取走的是 50 个桃子，则意味着总的桃子数为 101 个，放在第二只猴子面前的桃子也是 50 个，所以第 2 只猴子不必扔掉一个桃子，就可以直接取走 25 个桃子，这样与题意不符.

思考 2：如果这堆桃子是 3 只猴子的共有财产，每只猴子取桃前都先扔 1 个桃子，再把所余桃子平均分成 3 份，并取走 1 份，结果又如何呢?

答案：设第三只猴子取走的桃子个数为 x，桃子的总个数为 y.

根据题意，第三只猴子取走桃子前桃子个数应为 $3x+1$，即第二只猴子留下的桃子数为 $3x+1$，那么它取走的桃子数应为 $\frac{1}{2}(3x+1)$，所以第一只猴子留下的桃子数为 $\frac{3}{2}(3x+1)+1$，而它取走的桃子数应为 $\frac{1}{2}\left[\frac{3}{2}(3x+1)+1\right]$，因此第一只猴子取走桃子前桃子个数应为 $\frac{3}{2}\left[\frac{3}{2}(3x+1)+1\right]+1$，即 $\frac{27}{4}x+\frac{19}{4}$.

这说明，海滩上原有桃子数 $y=\frac{27}{4}x+\frac{19}{4}$.

由 $y\geqslant 100$，得 $x\geqslant\frac{127}{9}$，当 $x=15$ 时，第一只猴子至少可以取走 35 个桃子，此时海滩上共有 106 个桃子.

7 魔术与数学

同学们一定看过魔术，它神奇、有趣，常常令人觉得不可思议. 下面我们就来玩几个数学魔术吧！

请将你的年龄乘以 5，再加上 35，最后除以 5. 你只要告诉我得数，我就能猜出你的年龄. 如果你说的答案是 20，那你应该是 13 岁；如果得数是 21，那你就是 14 岁；如果得数是 22，那你一定是 15 岁. 聪明的小读者，你发现其中的规律了吗？

是的！答案正好比你的年龄多 7，那么为什么是多 7 呢？让我们来揭开它神秘的面纱. 为了看起来方便，假设你的年龄是 x，得数为 y，则有

$$y=(x\times 5+35)\div 5=x+7.$$

噢！刚才一会儿乘以 5，一会儿又除以 5，其实都只是为了迷惑我们，增加神秘感罢了，化简后真是太简单了！你明白了吗？

明白的话我们接着玩，这一次我的本领就更大了，请将 2 乘以你的出生月份，并加上 1，再乘以 50，最后加上你的年龄，告诉我得数后，我就可以猜出你的年龄和出生月份. 如果得数是 763，那你一定是 7 月份出生，13 岁. 不信，你照着算算. 所得结果与年龄和出生月份有什么关系呢？聪明的同学一定在找规律了. 好！让我们来到幕后，瞧瞧魔术的本质吧！

假设你的出生月份是 x，你的年龄是 y，得数为 S，则有

$$S=(2x+1)\times 50+y=100x+y+50.$$

从式子中我们可以看出出生年份与月份一定是有这样的结果：结果 S 的千位和百位上的数，除非年龄满 50，需向百位进 1（这时你得注意猜的人是老年人还是小朋友）. 年龄必是 S 的十位、个位上的数减去 50 的结果. 想一想对吗？

下面再看一个魔术师猜牌的游戏.

表演者手里持有六张扑克牌（不含王牌和牌号数相同的牌），让六位配合的观众从他的手里任取一张，并嘱咐取牌时记住自己的牌号数. 牌号数是这样规定的：A 为 1，J 为 11，Q 为 12，K 为 13，其余的以牌上的数字为准. 然后，表演者让他们按如下的方法进行计算：将自己的牌号数乘 2 加 3 后乘 5，再减去 25，把计算结果（要求数值绝对准确）告诉表演者，表演者便能很快准确地猜出观众拿的是什么牌. 如果六位观众所得结果依次是 10，40，50，90，100，120，则六张牌是 2，5，6，10，J，K 各一张.

假设牌号数为 x，结果为 y. 按表演者说的计算方法，得函数 $y=5(2x+3)-25$，即

$y=10x-10$. 当 x 的取值为 1，2，3，…，13 时，易算出对应的 y 值依次是 0，10，20，30，…，120. 所以当观众告诉表演者自己的运算结果时，表演者就可以根据 x 和 y 之间的这种对应关系“猜”出观众手中的牌. 是不是这样?

好了，你已经成为一名出师的“魔术师”了，用你学到的本领去考考你的伙伴们吧，然后再告诉他们真正的原因.

8 杰克·伦敦的数学问题

杰克·伦敦是美国著名的作家，对数学颇有研究，在他的一篇小说里曾叙述了如下的一道趣题：

他乘坐套了 5 只狗的雪橇从斯卡洛维伊赶回营地. 在途中的第一天，雪橇以全速行驶. 如果这样走下去，就能按时到达. 但是一天后，有 2 只狗扯断缰绳逃走了，剩下的路程只好用 3 只狗来拖雪橇，前进的速度是原来速度的 $\frac{3}{5}$. 因为这个缘故，杰克·伦敦到达营地的时间比预定的时间迟到了 2 天. 杰克·伦敦写道：“逃跑的 2 只狗如能再拖雪橇走 50 英里，那么我就能比预定时间只迟到一天.”看完了这段叙述，你能知道从斯卡洛维伊到营地的距离是多少吗?

该题所求的量只有一个，但条件较多，数量关系较为复杂，解答时不好下手，若只设一个未知数通过列方程去解困难较大.

仔细审题后，不难发现题目介绍了三种不同的情况：第一种情况：5 只狗全速行驶，恰能按时到达营地；第二种情况：一天后，剩 3 只狗拖雪橇行驶，迟到两天到达营地；第三种情况：若逃跑的 2 只狗再拖雪橇走 50 英里，只迟到一天到达营地. 在距离一定的前提下，之所以到达营地有先有后，是因为速度的改变造成的.

下面我们利用速度与距离的函数关系 $S=vt$ 来解决这个问题.

设从斯卡洛维伊到营地有 S 英里，5 只狗的全速是 v 英里/天，则预定时间 $t=\frac{S}{v}$ 天.

依题意，以距离作为等量关系，可以列出方程组

$$\begin{cases} S=v\times 1+\frac{3}{5}v\times\left(\frac{S}{v}+1\right), \\ S=v\times 1+50+\frac{3}{5}v\times\frac{S-50}{v}. \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} S=\frac{400}{3}, \\ v=\frac{100}{3}. \end{cases}$

所以，从斯卡洛维伊到营地的距离为 $\frac{400}{3}$ 英里.

9 建立函数模型解应用题

本章我们学习了一次函数和正比例函数的知识，它反映了自然界中变量与变量间的依存关系，与现实生活有着非常紧密的联系，以前我们还学习过列方程或方程组解应用题，下面我们通过具体例子来介绍建立函数模型解应用题的方法.

问题 1 一次，小明去超市购物，一块醒目的牌子吸引了他.

“凡在本超市购买茶壶 3 只以上者，可以享受下列两种优惠方法之一：

(1) 买一送一，即买一只茶壶送一只茶杯；

(2) 打九折，即按购买总价的 90%付款.”

若茶壶 20 元/个，茶杯 5 元/个，试问当小明买四只茶壶和若干只茶杯时，这两种优惠方法有区别吗？哪种更便宜？

当我们购物时，经营者为达到宣传、促销或其他目的，往往会为消费者提供两种或多种付款方案或优惠办法.

设小明在购买四只茶壶的情况下买茶杯 x 只（$x>3$），付款 y 元，则

用第一种方法付款 $y_1=4\times20+(x-4)\times5=5x+60$；

用第二种方法付款 $y_2=(20\times4+5x)\times90\%=4.5x+72$.

解方程组 $\begin{cases}y=5x+60\\ y=4.5x+72\end{cases}$，得 $\begin{cases}x=24\\ y=180\end{cases}$.

所以，当 $3<x<24$ 时，$y_1<y_2$；

当 $x=24$ 时，$y_1=y_2$；

当 $x>24$ 时，$y_1>y_2$.

综上可知，当小明在需购买四只茶壶的情况下，所购茶杯只数在 4～23 之间时，第一种付款方法省钱；当恰好购买 24 只时，两种方法没有区别；当所购茶杯多于 24 只时，第二种付款方法省钱.

问题 2 小亮通过调查获取了一份有关某运输公司汽油耗用量的数据. 该公司拥有 10 辆大型汽车，5 辆小型汽车. 自 1999 年底开始，该公司为每辆车安装了节油装置. 数据统计表格如下（注：节油装置：500 元/只；汽油平均价格：3 元/升），试计算到 2005 年底共节约了多少与耗油有关的费用.

	大型车（每辆）		小型车（每辆）	
	原	今	原	今
耗油量（升/百千米）	20	17	10	8
车月行程（千米）	3 000		3 000	
年节油量（升）	1 080		720	

（注：假设该节油装置寿命很长，故更换率忽略不计）

由上述表格统计值得出：

每辆大型车 x 年节约费用：y_1 ＝每年节约的油费×年数 x－节油装置安装费

$$=3\,240x-500$$

每辆小型车 x 年节约费用：y_2 ＝每年节约的油费×年数 x－节油装置安装费

$$=2\,160x-500$$

自 1999 年底至 2005 年底共 6 年的时间，该企业共节约费用

$y=$（大型车每辆节约的油费×10 辆＋小型车每辆节约油费×5 辆）×6 年

$=251\,700$(元)

251 700 元！这是很可观的一笔资金，只有短短的六年就节省了二十五万余元，看来小小的几个节油装置，确实不容小看．而且随着年数的增长，这个数字将会更加庞大．实际上，经过 x 年后，该公司节约的与耗油有关的总费用 y 与 x 可建立函数关系：

$$y=43\,200x-7\,500\ (\text{元}).$$

问题 3　某工厂在甲、乙两地的两个分厂各生产某种机器 12 台和 6 台，现销售给 A 地 10 台，B 地 8 台，已知从甲地调运 1 台机器至 A 地、B 地的运费分别为 400 元和 800 元，从乙地调运 1 台机器至 A 地、B 地的运费分别为 300 元和 500 元.

(1) 设从乙地调运 x 台至 A 地，求总运费 y 与 x 的函数关系式；

(2) 求总运费最低的调运方案及最低的运费.

分析：(1) 设从乙地调运 x 台机器至 A 地，则乙地调往 B 地的机器为$(6-x)$台，从甲地调往 A 地和 B 地的机器分别为$(10-x)$台和$8-(6-x)$台．所以

$$\begin{aligned} y&=300\cdot x+500\cdot(6-x)+800\cdot[8-(6-x)]+400(10-x)\\ &=200(x+43)\quad(0\leqslant x\leqslant 6). \end{aligned}$$

(2) 要使总运费最低，只要 $200(x+43)$最小即可.

所以当 $x=0$ 时，最低运费为 $y=8\,600$ 元．此时的调运方案是：从甲地调往 A 地、B 地的机器分别为 10 台、2 台．从乙地调往 B 地机器 6 台.

10　利用图象解决函数问题

从函数的发展过程可以看出，函数与其图象密不可分，利用函数图象分析函数的性质、解决与函数有关的问题就变成一种必然．在利用函数知识解决问题的过程中，我们要善于观察、捕捉图象中的有效信息，并能对所获信息进行加工，进而弄清楚变量之间的关系，然后通过适当的方法加以解决．下面我们来看看这样的两个例子.

问题 1　某市的医学专家们经过日夜奋战，终于研制出一种治疗肺炎的抗生素，据临床观察：如果成人按规定的剂量注射这种抗生素，注射药液后每毫升血液中的含药量 y（微克）与时间 t（小时）之间的关系近似地满足图 11－12 所示的折线.

（1）写出注射药液后每毫升血液中的含药量 y 与时间 t 之间的函数关系式及自变量的取值范围.

（2）据临床观察：每毫升血液中的含药量不少于 4 微克时，控制病情是有效的，如果病人按规定的剂量注射药液后，那么第一次注射的药液经过多长时间后控制病情开始有效？这个有效时间是多长.

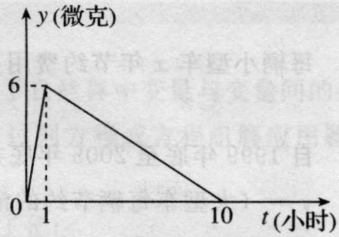


图 11－12

分析：从图象中可以看出，注射一定剂量的抗生素之后，每毫升血液中的含药量并没有马上达到最大值，含药量也不是恒定不变的，而是随着时间的推移，血液中的含药量先增后减，是时间 t 的一个分段函数，而且两段都是一次函数.

（1）含药量 y 与时间 t 之间的函数关系式为：

$$y=\begin{cases}6t & (0\leqslant t\leqslant 1)\\ -\dfrac{2}{3}t+\dfrac{20}{3} & (1<t<10)\end{cases}$$

（2）根据题意，结合图象，注射药液后，当血液中含药量 $y\geqslant 4$ 微克时，控制病情开始有效．由 $6t\geqslant 4$，得 $t\geqslant\dfrac{2}{3}$ 小时，即注射药液 $\dfrac{2}{3}$ 小时后开始控制病情.

要求控制病情的有效时间，只要求出血液中含药量不少于 4 微克的保持时间.

由 $-\dfrac{2}{3}t+\dfrac{20}{3}\geqslant 4$，得 $t\leqslant 4$，所以这个有效时间为 $4-\dfrac{2}{3}=\dfrac{10}{3}$（小时）.

吃药能治病，科学的服药能帮助我们更好地控制病情和治愈疾病．科学服药一方面是指剂量合理，另外服药时间也应该注意，即服药之后下次什么时候吃更有利于控制病情，这是一个患者应该考虑的问题．以上题为例，如果要保证药液持续发挥作用，就应在第一次服药之后 $\dfrac{10}{3}$ 小时左右接着服药效果最佳.

问题 2　某气象研究中心观测一场沙尘暴从发生到结束的全过程，开始时风速平均每小时增加 2 千米，4 小时后，沙尘暴经过开阔荒漠地，风速平均每小时增加 4 千米，一段时间后，风暴保持不变，当沙尘暴进入绿色植被区时，其风速平均每小时减小 1 千米，最终停止．结合示意图 11－13 风速与时间的图象，回答下列问题：

（1）在 y 轴上的括号内填入相应的数值；

（2）沙尘暴从发生到结束，共经过多少小时？

（3）求风速 y(千米/时)与时间 x(小时)之间的函数关系式；

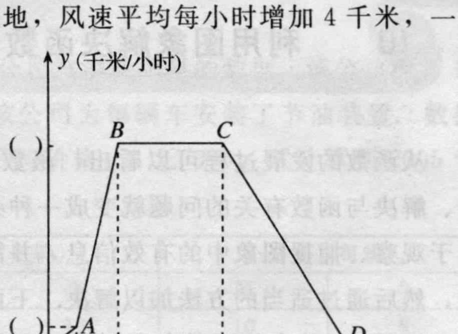


图 11－13

（4）若风速达到或超过 20 千米/时，称为强沙尘暴，求强沙尘暴持续多长时间？

分析：①从图象中可得到如下信息：沙尘暴分四个阶段：0～4 小时，风速平均每小时增加 2 千米；4～10 小时，风速平均每小时增加 4 千米；10～25 小时，风速保持不变；25 小时后风速平均每小时减小 1 千米，最终停止；

②观察图象可以得出风速 y（千米/时）是时间 x（小时）的一个分段函数，OA、AB、CD 三段都是一次函数；

③第（4）问要求我们必须有应用数学知识解决实际问题的能力.

根据题意，结合图象，A，B，C，D 四点的坐标依次为(4,8)，(10,32)，(25,32)，(57,0).

(1)y 轴括号内应填入的数值从下到上依次为 8 和 32.

(2)沙尘暴从发生到结束，共经过 57 小时.

(3)风速 y 与时间 x 之间的函数关系式为：

$$y=\begin{cases} 2x & (0\leqslant x\leqslant 4), \\ 4x-8 & (4<x\leqslant 10), \\ 32 & (10<x\leqslant 25), \\ -x+57 & (25<x\leqslant 57). \end{cases}$$

(4)根据强沙尘暴的定义，要求强沙尘暴持续的时间，只要求风速保持在 20 千米/时以上的时间. 由图象，可以考虑求出 AB 段风速增到 20 千米/时的时间和 CD 段风速降到 20 千米/时的时间，两个时间的差值即为强沙尘暴持续的时间.

由 $4x-8=20$，得 $x_1=7$，由 $-x+57=20$，得 $x_2=37$.

所以强沙尘暴持续的时间为 $37-7=30$(小时).

第十二章 数据的描述

1 谈谈“空气污染指数”和“空气质量日报”

空气污染是指由于人类的生产和生活活动，使某种物质进入大气，使大气的化学、物理、生物等方面的特性改变，影响人们的生活、工作，危害人体健康，影响或危害各种生物的生存，直接或间接地损害设备、建筑物等的现象．

随着社会经济的快速发展，工业化水平的提高，人类活动对环境产生的影响越来越大，尤其是在城市集中了大量的工厂、车辆、人口．空气质量由于以上原因，逐渐开始恶化，哪些地方在恶化，恶化程度如何，发展趋势如何，专家关心它，人民关心它，政府更关心它．在新闻媒体上公开发布空气质量状况，是政府为民办实事的一项举措，是环保工作走向与国际接轨的一项基础性工作，它不仅有利于环保工作的公开透明化，也有助于促进公众环保意识的提高和对环保工作的参与．空气质量根据报告时间的不同可分为3种：每小时报告的称为时报；每天报告的称为日报；每周报告的称为周报．

我国目前规定，空气质量必须考虑的污染物有三项：二氧化硫、二氧化氮和可吸入悬浮颗粒物（漂尘），这是根据全国城市污染情况及现有技术水平而确定的．

二氧化硫是一种无色的中等刺激性气体，主要影响呼吸道．二氧化硫主要来自燃烧含硫燃料，空气中的二氧化硫很大部分来自发电过程及工业生产．吸入二氧化硫可使呼吸系统功能受损，加重已有的呼吸系统疾病．对于容易受影响的人，除肺部功能改变外，还伴有一些明显症状如气喘、气促以及咳嗽等．二氧化硫亦会导致死亡率上升，尤其是在悬浮粒子协同作用下．

二氧化氮是一种棕红色有刺激性臭味的气体，主要来自于车辆废气、火力发电站和其他工业的燃料燃烧及硝酸、氮肥、炸药的工业生产过程，具有腐蚀性和生理刺激作用．呼吸系统有问题的人如哮喘患者，较易受二氧化氮的影响．对儿童来说，可能会造成肺部发育受损．二氧化氮是形成光化学烟雾的主要因素之一，也是酸雨的来源之一．

总悬浮颗粒物能长时间悬浮于空气中，大小由0.05至100微米不等的颗粒物组成，小于10微米以下的又称为可吸入颗粒物（漂尘）．总悬浮颗粒物由天然及人为来源产生，包括海洋、泥土、车辆废气、工业活动、建筑工程以及气象化学反应．直径10微米或以下的可吸入颗粒物能直达并沉积于肺部，从而引发不良的健康反应．可吸入颗粒物对人体健康的影响包括导致呼吸不适及呼吸系统症状或加重已有的呼吸系统疾病及损害肺部组织．