平三角大要

教育部審定

中學校用

共和國教科書

平三角大要

商務印書館出版

教育部審定批語

中學校共和國教科書

平三角大要

是書按照新制選取教材刪繁就簡尚屬妥洽准予審定作為中學教科書之用

部(22)

Republican Series

Principles of Plane Trigonometry

For Middle Schools

Approved by the Board of Education

Commercial Press, Ltd.

中華民國二年十二月初版
中華民國七年十二月十版

（共和國教科書平三角大要一冊）（中學校用）
（軟布面每冊定價大洋肆角
紙面叁角）
（外埠酌加運費匯費）

編纂者 吳江黃元吉
校訂者 紹興壽孝天 紹興駱師曾
發行者 商務印書館
印刷所 上海北河南路北首寶山路 商務印書館
總發行所 上海棋盤街中市 商務印書館
分售處 北京天津保定奉天吉林龍江濟南東昌太原開封洛陽西安南京杭州蘭谿安慶蕪湖南昌漢口長沙常德衡州成都重慶瀘縣福州廣州潮州香港桂林梧州雲南貴陽張家口新嘉坡 商務印書分館

中華民國三年一月十日稟部註冊二月七日領到文字第一百五十八號執照

編輯大意

一本書備中學校平三角教科之用。

一按中學校課程標準。第四學年三角與幾何並授。是三角僅占學年之半。故本書內容。力求簡要。俾得於規定年限以內。從容畢業。

一本書於每節綱要。均加黑線爲誌。以便學者隨時注重。

一本書於名詞之下。附注英文。以備參證。

一卷末所附各簡表。係備學者練習之用。若近於 0° 及 90° 之角。其圓函數。仍依密表檢算爲是。

一本書於演式及說明處。務取淺顯。恐猶未盡諦當。海內宏達。匡正是幸。

希 臘 文 字

大文字	小文字	名 稱	大文字	小文字	名 稱
Α	α	Alpha	Ν	ν	Nu
Β	β	Beta	Ξ	ξ	Xi
Γ	γ	Gamma	Ο	o	Omicron
Δ	δ	Delta	Π	π	Pi
Ε	ϵ	Epsilon	Ρ	ρ	Rho
Ζ	ζ	Zeta	Σ	σ	Sigma
Η	η	Eta	Τ	τ	Tau
Θ	θ	Theta	Υ	υ	Upsilon
Ι	ι	Iota	Φ	ϕ	Phi
Κ	κ	Kappa	Χ	χ	Chi
Λ	λ	Lambda	Ψ	ψ	Psi
Μ	μ	Mu	Ω	ω	Omega

中學校教科書

平三角大要目次

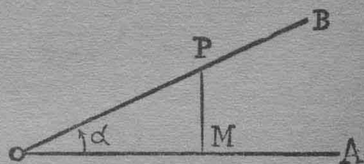
中學校教科書

平三角大要

第一篇　銳角之圓函數

第一章　圓函數之定義

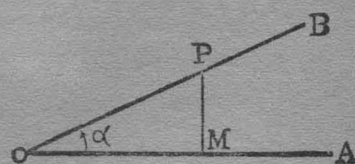
1. 定義 ∠AOB銳角。卽a角。其所夾之邊爲OA，OB。任於OB上取P點。由P作OA之垂線如PM。乃以OP爲單位。以度PM。卽PM÷OP爲a角之正弦*sine*.



凡正弦以*sin*表之。故a角之正弦。以$\sin a$表之，

$$\therefore \sin a=\frac{PM}{OP}$$

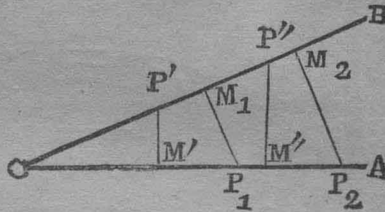
又任於OB上取OP。其對於OA之正射影爲OM。乃以OP爲單位。以度OM。卽OM÷OP。爲a角之餘弦。*Cosine*。



凡餘弦以*cos*表之。故a角之餘弦。以$\cos a$表之。

$$\therefore \cos a=\frac{OM}{OP}.$$

2. **定理**　角係一定不變者。其正餘弦之值。亦一定不變。



$\angle$AOB銳角。一定不變。任於OB上取$P', P'', \cdots\cdots$各點。作OA之垂線如$P'M'$, $P''M''$,…或於OA上取P_1, P_2,……各點。作OB之垂線如P_1M_1, P_2M_2,……卽得式如次。

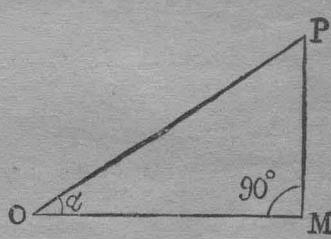
$$\frac{M'P'}{OP'}=\frac{M''P''}{OP''}=\cdots\cdots=\frac{M_1P_1}{OP_1}=\frac{M_2P_2}{OP_2}=\cdots\cdots$$

$$\frac{OM'}{OP'}=\frac{OM''}{OP''}=\cdots\cdots=\frac{OM_1}{OP_1}=\frac{OM_2}{OP_2}=\cdots\cdots$$

是可知$\angle$AOB銳角之正餘弦其值始終相等。

卽凡角係一定不變者。其正餘弦之值。亦一定不變。

3. **定理**　角之正餘弦之正方和。恆等於1。



OMP爲直角三角形。

$$\therefore \overline{PM}^2+\overline{OM}^2=\overline{OP}^2$$

兩邊以$\overline{OP}^2$除之。

得　$$\left(\frac{MP}{OP}\right)^2+\left(\frac{OM}{OP}\right)^2=1。$$

卽　$$(\sin\alpha)^2+(\cos\alpha)^2\equiv 1。$$

$$\therefore \sin^2\alpha+\cos^2\alpha\equiv 1。$$

4. **系**　銳角之正弦餘弦。皆小於1。

5. **定義** 以α角之餘弦爲單位。以度其正弦。即$\sin\alpha\div\cos\alpha$。爲α角之正切 *Tangent*。以$\tan\alpha$表之。

$$\therefore \tan\alpha\equiv\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

以α角之正弦爲單位。以度其餘弦。即$\cos\alpha\div\sin\alpha$。爲α角之餘切 *Cotangent*。以$\cot\alpha$表之。

$$\therefore \cot\alpha\equiv\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

α角餘弦之倒數。即$1\div\cos\alpha$。爲α角之正割 *Secant*。以$\sec\alpha$表之。

$$\therefore \sec\alpha\equiv\frac{1}{\cos\alpha}.$$

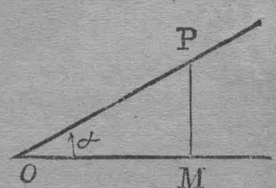
α角正弦之倒數。即$1\div\sin\alpha$。爲α角之餘割 *Cosecant*。以$\operatorname{cosec}\alpha$或$\csc\alpha$表之。

$$\therefore \operatorname{cosec}\alpha\equiv\frac{1}{\sin\alpha}.$$

按$\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$, $\cot\alpha$, $\sec\alpha$, $\operatorname{cosec}\alpha$. 均爲$\alpha$角之圓函數 *Circular function*。而$\sin\alpha$與$\operatorname{cosec}\alpha$又$\cos\alpha$與$\sec\alpha$又$\tan\alpha$與$\cot\alpha$皆互爲倒數。故各相乘。皆等於1。

此定義又可依圖規定如次。

PM 爲 OM 之垂線。



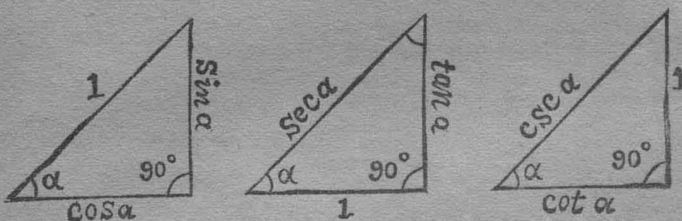
$$\tan\alpha\equiv\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{MP}{OP}\div\frac{OM}{OP}=\frac{MP}{OM}.$$

$$\therefore \tan\alpha=\frac{MP}{OM}.$$

依同理。$cot\ \alpha=\frac{OM}{MP}$. $sec\ \alpha=\frac{OP}{OM}$. $cosec\ \alpha=\frac{OP}{MP}$.

此爲正切,餘切,正割,餘割之獨立定義。

如是則圓函數可依圖表之如次。



6. **定理**　凡任何角。於其正切之平方加1。則等於其正割之平方。又於其餘切之平方加1。則等於其餘割之平方。

$\therefore 1+tan^2\alpha\equiv 1+\frac{sin^2\alpha}{cos^2\alpha}\equiv\frac{1}{cos^2\alpha}\equiv sec^2\alpha$〔§5及§3〕.

$1+cot^2\alpha\equiv 1+\frac{cos^2\alpha}{sin^2\alpha}\equiv\frac{1}{sin^2\alpha}\equiv cosec^2\alpha$〔§5及§3〕.

$\therefore 1+tan^2\alpha\equiv sec^2\alpha$.

$1+cot^2\alpha\equiv csc^2\alpha$.

7. **系**　銳角之正割餘割。皆大於1。

第一章之問題

1. ABC三角形。C爲90°。BC爲3尺。CA爲4尺。求A,B兩角之正餘弦。

2. 直角三角形兩銳角之正餘弦。與其三邊之關係若何。

3. 試作正弦爲$\frac{1}{2}$之角。又正弦爲$\frac{2}{3}$之角。又正弦爲0.6之角。又餘弦爲0.8之角。

4. $(\cos\alpha+\sin\alpha)^2-1\equiv 2\cos\alpha\sin\alpha$。

5. $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha\equiv 2\sin^2\alpha-1\equiv 1-2\cos^2\alpha$。

6. $\sin\alpha=0.6$. 求 $\cos\alpha$ 之值。

7. $2\cos^2\alpha=3\sin\alpha$. 求 $\sin\alpha$ 之值。

8. 試就正弦為 $\frac{5}{13}$ 之角。又正割為 $\frac{13}{12}$ 之角。各求其圓函數。

9. 直角三角形兩銳角之圓函數與其邊之關係若何。

10. 試作正切為 $\frac{3}{2}$ 之角。又餘切為 1 之角。又正割為 $\frac{5}{3}$ 之角。又餘割為 2 之角。

11. (i) $\cos^2\alpha\tan^2\alpha+\sin^2\alpha\cot^2\alpha\equiv 1$.

(ii) $\sec^2\alpha+\mathrm{cosec}^2\alpha\equiv\sec^2\alpha\,\mathrm{cosec}^2\alpha$。

(iii) $\dfrac{1}{1+\tan^2\alpha}+\dfrac{1}{1+\cot^2\alpha}=1$.

(iv) $\dfrac{\cot^2\alpha}{1+\cot^2\alpha}\equiv\cos^2\alpha$ 試各求其證。

12. 設先知 $\sin\alpha$ 或 $\cos\alpha$ 或 $\tan\alpha$ 或 $\cot\alpha$ 試各推求其餘之圓函數。

13. 設餘弦為 $\frac{4}{5}$ 試求其正切。又正切為 $\frac{15}{8}$ 試求其正弦。

14. (i) $\begin{cases}\cos\theta=\alpha,\\ \sin\theta=\beta.\end{cases}$

(ii) $\begin{cases}\sec\theta=\alpha,\\ \cot\theta=\beta.\end{cases}$

(iii) $\begin{cases}\alpha\cos\theta-\beta\sin\theta=\alpha',\\ \alpha\sin\theta+\beta\cos\theta=\beta'.\end{cases}$

試各消去 θ。

15.　(i) $\sin\theta+\cos\theta=1.4$.　(ii) $\sin\theta+7\cos\theta=5$.

試求 $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$ 之值。

16.　$\sin\theta+\operatorname{cosec}\theta=a$ 求 $\sin\theta$ 之值。

第二章　角與圓函數之關係

8. **定理**　凡角相等。其圓函數亦必相等。

因　　$\alpha=\beta$, 則 $\sin\alpha=\sin\beta$, $\cos\alpha=\cos\beta$. (§2)

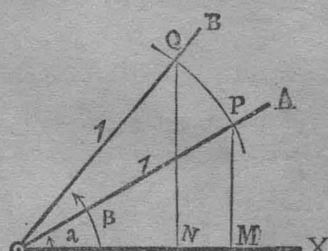
由是　$\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}$, 即 $\tan\alpha=\tan\beta$. (§5)

$\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\dfrac{\cos\beta}{\sin\beta}$, 即 $\cot\alpha=\cot\beta$. (§5)

$\dfrac{1}{\cos\alpha}=\dfrac{1}{\cos\beta}$, 即 $\sec\alpha=\sec\beta$. (§5)

$\dfrac{1}{\sin\alpha}=\dfrac{1}{\sin\beta}$, 即 $\operatorname{cosec}\alpha=\operatorname{cosec}\beta$. (§5)

9. **定理**　大小二銳角之圓函數。其正弦正切正割。則角大亦大。其餘弦餘切餘割。則角大反小。



$\angle XOA$ 銳角即 α 角。比 $\angle XOB$ 銳角即 β 角為小。命 $OP=OQ=1$。其 PM, QN 各為 OX 之垂線。

$\sin\alpha=MP$,　$\cos\alpha=OM$. (§1)

$\sin\beta=NQ$,　$\cos\beta=ON$. (§1)

因 MP, NQ。為 2α, 2β (其和比 $180°$ 小) 之圓心角所對之弦之半。故大角 2β 所對之弦之半 NQ。較大於小角 2α 所對之弦之半 MP。

即　　$\sin\beta>\sin\alpha$。

又OM, ON。爲MP, NQ兩半弦自圓心之距離。故長弦之距離ON。較小於短弦之距離OM。

即　$\cos\beta < \cos\alpha.$

是爲正弦餘弦之證明。

其正切餘切正割餘割之證明如次。

因$\alpha < \beta < 90^\circ$

則　$\sin\alpha < \sin\beta,\qquad \cos\alpha > \cos\beta.$

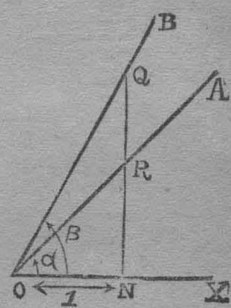
故　$\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} < \dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}$, 即 $\tan\alpha < \tan\beta;$

$\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} > \dfrac{\cos\beta}{\sin\beta}$, 即 $\cot\alpha > \cot\beta;$

$\dfrac{1}{\cos\alpha} < \dfrac{1}{\cos\beta}$, 即 $\sec\alpha < \sec\beta,$

$\dfrac{1}{\sin\alpha} > \dfrac{1}{\sin\beta}$, 即 $\operatorname{cosec}\alpha > \operatorname{cosec}\beta.$

此定理又可依圖證明如次。



令ON=1。由N點作OX之垂線。與AO, OB交於R, Q兩點。

如是則　NR<NQ,　OR<OQ

然由§5。

$NR = \tan\alpha,\quad NQ = \tan\beta,$

$OR = \sec\alpha,\quad OQ = \sec\beta.$

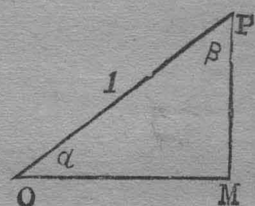
故　$\tan\alpha < \tan\beta,\quad \sec\alpha < \sec\beta.$

餘依同理證明。

10. **系** 有定値之圓函數。其銳角之大。亦有定度。故銳角之大。可以其圓函數之値示之。

11. **系** α 角之圓函數。爲 α 之函數 *Function*。蓋依 α 之大而變化。且隨 α 之大而定也。

12. **定理** 一角之正弦正切正割。即與其餘角之餘弦餘切餘割相等。



$\angle$MOP 銳角卽 α 角。於其一邊上。取OP=1。由 P 作 OM 之垂線如 PM。

如是則 $\angle$OPM 卽 β 角。爲 α 角之餘角。

因 $\sin\alpha=\mathrm{MP},\quad \cos\beta=\mathrm{PM}.$

故 $\sin\alpha=\cos\beta.$

是爲一角之正弦。等於其餘角之餘弦。

又依同理 $\cos\alpha=\sin\beta.$

故 $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{\cos\beta}{\sin\beta}$, 卽 $\tan\alpha=\cot\beta$; (§5)

又 $\dfrac{1}{\cos\alpha}=\dfrac{1}{\sin\beta}$, 卽 $\sec\alpha=\operatorname{cosec}\beta.$ (§5)

第二章之問題

17. (i) $\sin^2 25^\circ+\sin^2 65^\circ=1$

(ii) $\tan(45^\circ-\alpha)\tan(45^\circ+\alpha)=1$ 試各求其證。

18. $\sin(45^\circ+\theta)=\cos 2\theta$ 求銳角 θ 之値。

第三章　45°等角之圓函數

13.　45°之圓函數。

因　$\sin 45° = \cos 45°$. [§12]

故　$\sin^2 45° + \cos^2 45° = 2\sin^2 45° = 1$. [§3]

由是　$\sin 45° = \cos 45° = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = 0.7071\cdots\cdots\cdots$

$\tan 45° = \cot 45° = 1$.

$\sec 45° = \operatorname{cosec} 45° = \sqrt{2} = 1.4142\cdots\cdots\cdots$

此又可依圖證明如次。

$\angle MOP = 45°$,　$OM = 1$,　$\angle OMP = 90°$.

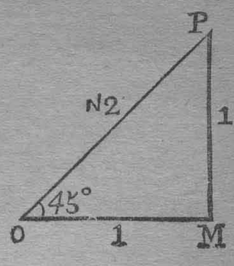
由是　$MP = 1$.

故　$OP = \sqrt{2}$.

$\therefore \sin 45° = \cos 45° = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$,

$\tan 45° = \cot 45° = 1$,

$\sec 45° = \operatorname{cosec} 45° = \sqrt{2}$.



14.　30°及60°之圓函數。

$\angle MOP = 60°$,　$OM = 1$,

$\angle OMP = 90°$.

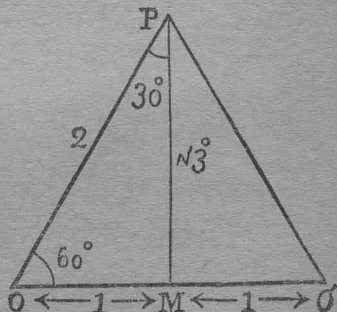
OM延長至O′，令$MO' = 1$.

聯結PO′

如是則$\angle OO'P = \angle O'OP = 60°$.

$\angle OPO' = 60°$.

$OP = O'P = OO' = 2$,　$MP = \sqrt{3}$.



故 $sin\,60° = cos\,30° = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.8660\cdots\cdots$

$cos\,60° = sin\,30° = \frac{1}{2} = 0.5000\cdots\cdots$

$tan\,60° = cot\,30° = \sqrt{3} = 1.7320\cdots\cdots$

$cot\,60° = tan\,30° = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0.5773\cdots\cdots$

$sec\,60° = cosec\,30° = 2.$

$cosec\,60° = sec\,30° = \frac{2}{\sqrt{3}} = 1.1547\cdots\cdots$

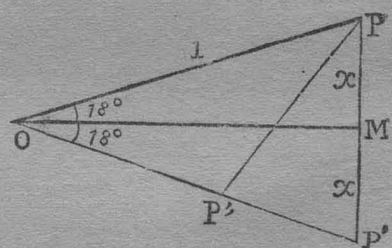
15. 18° 及 72° 之圓函數。

$\angle MOP = 18°$, $OP = 1.$

PP' 係與 OM 成正交。

而 $MP = MP'$

聯結 OP'。



如是則 POP' 為二等邊三角形。其底角適等於頂角之二倍。計各為 72°。

故作 PP'' 直線。係分底角 P 為二等分。即成 POP'', $PP'P''$ 各為二等邊三角形。而 $PP'P''$ 與 POP' 為相似形。

故 $$OP : PP' = PP' : P'P''.$$

令 $$sin\,18° = x.$$

因 $OP = 1$, 故 $MP = MP' = x.$

由是 $PP' = OP'' = 2x,\quad P'P'' = 1 - 2x.$

故 $$1 : 2x = 2x : 1 - 2x.$$

$$\therefore\ x = \frac{1}{4}(-1 \pm \sqrt{5}).$$

然x雖有正負兩值。因負數於本節不適合。故依其正值。得式如次。

$$\sin 18^\circ = \cos 72^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1) = 0.3090\cdots\cdots\cdots$$

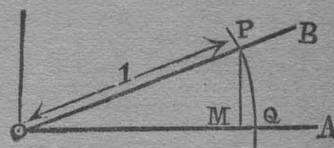
16. 0°及90°之圓函數。

$\angle AOB$爲銳角。 $OP=1$。

PM爲OM之垂線。

故PM卽$\angle AOB$之正弦。

OM爲其餘弦。



移轉OP。令漸與OA相近。則$\angle AOB$漸小而近於無。PM亦漸小而近於無。OM則漸大而將等於OQ。$(OQ=OP=1)$

故其極限如次。

$$\sin 0^\circ = 0, \qquad \cos 0^\circ = 1.$$

$$\therefore \quad \tan 0^\circ = 0, \quad \cot 0^\circ = \infty, \quad \sec 0^\circ = 1, \quad \operatorname{cosec} 0^\circ = \infty.$$

至90°之圓函數。卽依同理。將OP移動。令其所成$\angle AOB$漸大而近於90°。卽可得MP及OM之極限。(或以90°爲0°之餘角。亦可得其圓函數之值。)

$$\sin 90^\circ = 1, \quad \cos 90 = 0^\circ, \quad \tan 90^\circ = \infty,$$

$$\cot 90^\circ = 0, \quad \sec 90^\circ = \infty, \quad \operatorname{cosec} 90^\circ = 1.$$

17. 定理 凡角自0漸大而至於90°。其正弦之值。自0漸大而至於+1。餘弦之值。自+1漸小而至於0。正切之值。自0漸大而至於∞。

此依§16及§9證明可也。