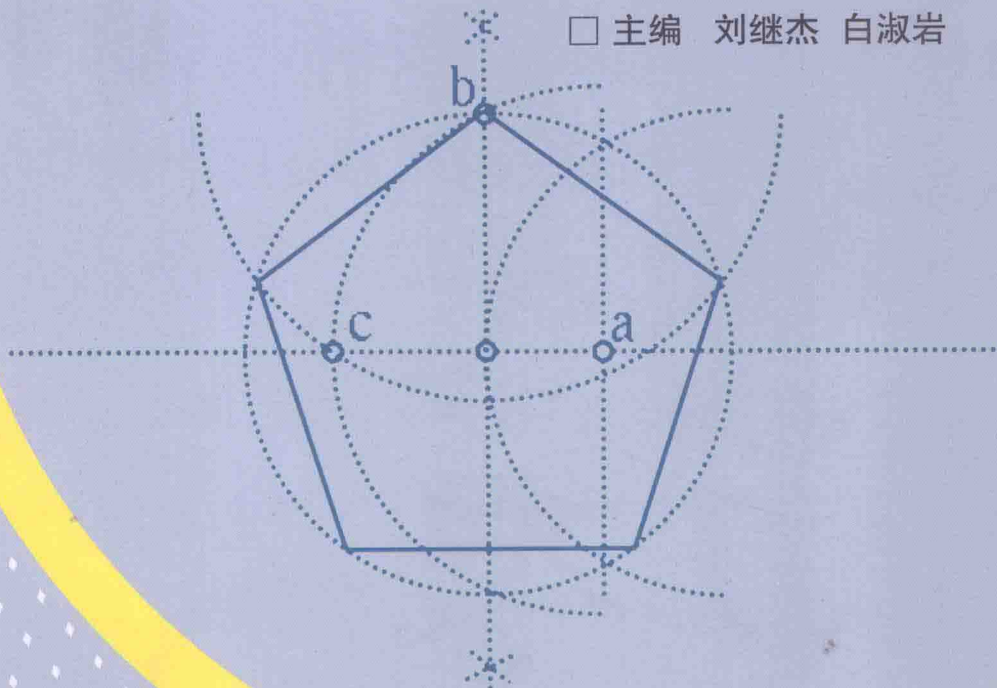
全国高职高专教育“十一五”规划教材

工科应用数学

Engineering Applied Mathematics

下册

□ 主编 刘继杰 白淑岩



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

全国高职高专教育"十一五"规划教材

工科应用数学

Gongke Yingyong Shuxue

（下册）

主编　刘继杰　白淑岩

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容提要

本教材以教育部《关于全面提高高等职业教育教学质量的若干意见》和《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》为指导，以"应用为目的，专业够用为度，学有所需，学有所用"的定位原则，在充分研究了当前我国高职教育现状的基础上编写而成。本教材旨在培养和造就高职院校学生可持续发展的职业能力和迁移能力、全面提升学生的素质。

全书分为上、下两册，共12章。上册主要内容为函数与极限、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分，下册主要内容为常微分方程、无穷级数、行列式与矩阵、向量与空间解析几何、拉普拉斯变换、离散数学基础、二元函数微积分学.

本书可作为高职高专院校理工类专业的数学基础课教材，也可作为成人高校及其他职业学校的参考教材或教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

工科应用数学．下册／刘继杰，白淑岩主编．—北京：高等教育出版社，2010.9

ISBN 978－7－04－030810－5

Ⅰ.①工… Ⅱ.①刘… ②白… Ⅲ.①应用数学－高等学校：技术学校－教材 Ⅳ.①O29

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2010）第 149467 号

策划编辑	邓雁城	责任编辑	王玲玲	市场策划	吕明华	封面设计	张申申
版式设计	余　杨	责任校对	胡晓琪	责任印制	尤　静		

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	咨询电话	400-810-0598
邮政编码	100120	网　　址	http://www.hep.edu.cn http://www.hep.com.cn
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司	网上订购	http://www.landraco.com http://www.landraco.com.cn
印　　刷	北京东光印刷厂	畅想教育	http://www.widedu.com
开　　本	787×1092　1/16	版　　次	2010年9月第1版
印　　张	15.25	印　　次	2010年9月第1次印刷
字　　数	370 000	定　　价	22.70元

物料号　30810－00

前　言

本教材编写时特别注重了以下几点：

一、通过教材优化教学内容和体系，加强应用性。从各专业后继课程的需要和社会的实际需求出发来考虑和确定教学内容和体系，强化应用意识和能力的培养，注重了数学思想和数学方法在实际生活中的应用，每章后面都设有数学应用实例，为培养学生理论联系实际、用数学思想去思考和解决实际问题的能力提供了生动的实例，从而拓宽知识面并激发学生学习兴趣。

二、教材结构设计科学合理，适合高职高专人才培养目标和工科类专业学生的实际水平及专业需求。以学科体系序化，打破以往学科本位强调学科体系的完整性、系统性的思想，理论上适度够用，去除繁冗，理论推导和证明以解释清楚有关结论为度，知识点表达设计明确，课程内容设计理念新颖；深度适宜，便于教师教学和学生学习。另外在高职高专中有部分对口学生，有些知识在职高学校中没学，为此教材在第一章中编排了函数概念与性质、初等函数、反函数（含反三角函数）等内容为后继学习打好基础。

三、本书分上下两册，两个学期学完。上册包括函数与极限、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分，需要68学时左右。下册包括常微分方程、无穷级数、行列式与矩阵、向量与空间解析几何（制造类）、拉普拉斯变换（电气电子类）、离散数学基础（计算机类）、二元函数微积分学（选学），需要72学时左右。第一学期重视高等数学的基础内容，着重培养学生分析问题解决问题的能力，第二学期课程内容体现专业特点，分制造类、电气电子类和计算机类，采用模块化教学，专业教学针对性更强。

四、重视数学实验，每章都有实验内容。注重培养学生用计算机和数学软件求解数学模型的实际应用能力，让学生充分认知现代工具的快捷性和实用性。

五、精选例题练习题，题型多样化，每节配有思考题、练习题，每章还配有综合练习题。考核形式和指标多元灵活。

本书上册由刘继杰、李少文任主编，张玉吉、王永旭、丁琳、闫海波、陈晖任副主编。下册由刘继杰、白淑岩任主编，刘春光、于俊梅、刘欣、孙晓琳、单国莉任副主编。具体编写任务：第1章 刘继杰；第2章 张玉吉；第3章 王永旭；第4章 闫海波；第5章 李少文；第6章 白淑岩；第7章 于俊梅；第8章 刘继杰；第9章 单国莉；第10章 刘春光；第11章 刘欣；第12章 孙晓琳。每章的应用实例由丁琳编写；每章的数学实验由陈晖编写。

全书的结构安排、总撰由刘继杰承担，全书统稿由刘继杰、李少文承担。本书编写得到了徐森林教授的指导，在此表示衷心感谢。

由于水平所限，书中不当之处敬请读者和同仁给予批评指正。

编者

2010年6月

目　　录

第 6 章　常微分方程

函数可以反映自然界中事物的运动规律，但在有些问题中，往往不能直接找出所需要的函数关系. 当事物的运动规律与其变化的速度、加速度等联系在一起的时候，对应的数学模型就是微分方程. 这时，我们可以通过建立函数与其导数或微分的关系式，来解出函数关系. 本章主要介绍常微分方程的概念及其解法.

6.1　常微分方程的基本概念

6.1.1　实例

例 1　求曲线的方程.

一曲线通过点 $(1,1)$，且该曲线上任一点 $M(x,y)$ 处的切线斜率为 $3x^2$，求该曲线的方程.

解　设所求曲线为 $y = f(x)$，由题意得

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 3x^2, & (1) \\ f(1) = 1. & (2) \end{cases}$$

方程(1)中含有未知函数的导数，变形为 $dy = 3x^2 dx$.

对方程两边积分得

$$y = \int 3x^2\, dx = x^3 + C, \tag{3}$$

其中 C 为任意常数.

将(2)代入(3)得 $C = 0$，故所求曲线方程为

$$y = x^3.$$

例 2　确定运动规律.

在真空中，某物体由静止状态自由下落，求其运动规律.

解　设物体运动时的位移函数为 $s = s(t)$，速度函数为 $v = v(t)$ 由牛顿第二定律及二阶导数的力学意义得

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 s}{dt^2} = g, & (4) \\ s\big|_{t=0} = 0, & (5) \\ v\big|_{t=0} = \dfrac{ds}{dt}\Big|_{t=0} = 0. & (6) \end{cases}$$

其中 g 为重力加速度.

方程(4)中含有未知函数的二阶导数,将该方程两边积分得

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = gt + C_1, \tag{7}$$

其中 C_1 为任意常数.将上式两边再积分一次,得

$$s = \frac{1}{2}gt^2 + C_1 t + C_2, \tag{8}$$

其中 C_1, C_2 为任意常数.将条件(6)代入(7)得 $C_1 = 0$.

再将条件(5)代入(8)得 $C_2 = 0$.

于是

$$s(t) = \frac{1}{2}gt^2,$$

这就是自由落体的运动方程.

6.1.2 微分方程的有关概念

定义 1 含有未知函数的导数或微分的方程称为**微分方程**.

未知函数为一元函数的微分方程,称为**常微分方程**.例如,上面两个例子中的方程(1)和(4)都是常微分方程.

应该指出,在常微分方程中,未知函数及其自变量可以不出现,但未知函数的导数(或微分)必须出现.例如,$x^2 + y = 1$ 就不是常微分方程.

本章只讨论常微分方程及其解法.为了方便,下面简称微分方程或方程.

微分方程中所出现的未知函数的最高阶导数的阶数称为微分方程的**阶**.

例如,$y' = x^2$ 是一阶常微分方程,$s'' = g$ 是二阶常微分方程.

定义 2 如果把某个函数代入微分方程中,能使该方程成为恒等式,则称这个函数为微分方程的**解**.

例如,$y = x^3 + C$, $y = x^3$ 都是微分方程 $y' = 3x^2$ 的解;而 $s(t) = \frac{1}{2}gt^2 + C_1 t + C_2$, $s(t) = \frac{1}{2}gt^2$ 都是微分方程 $s'' = g$ 的解.

含有几个任意常数的表达式,如果它们不能合并而使得任意常数的总个数减少,则称该表达式中的这几个任意常数**相互独立**.

例如,$y = C_1 x + C_2 x + 1$ 与 $y = Cx + 1$ (C_1, C_2, C 都是任意常数)所表示的函数族是相同的.而 $s = \frac{1}{2}gt^2 + C_1 t + C_2$ 中的 C_1, C_2 是不能合并的,即 C_1, C_2 是相互独立的.

如果微分方程的解中含有任意常数,且独立的任意常数的个数等于微分方程的阶数,则称此解为微分方程的**通解**.

如例2中的 $\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = g$ 是二阶的,所以 $s = \frac{1}{2}gt^2 + C_1 t + C_2$ 是其通解.同理,例1中的 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 3x^2$ 是一阶的,所以 $y = x^3 + C$ 是其通解.

在通解中,利用附加条件确定任意常数的取值,得到的不含任意常数的解称为**特解**,例如 $s =$

$\frac{1}{2}gt^2+C_1t+C_2$ 是方程 $s''=g$ 的通解，而 $s(t)=\frac{1}{2}gt^2$ 是其特解.

用来确定特解的附加条件，称为**初始条件**. 如例 1 中的 $f(1)=1$ 是 $y'=3x^2$ 的初始条件，例 2 中的 $s\big|_{t=0}=0,\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}=0$ 是 $\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}=g$ 的初始条件. 求微分方程满足初始条件的特解的问题称为初值问题.

微分方程的特解的图形是一条曲线，称为微分方程的**积分曲线**，通解的图形是一族积分曲线. 例如，$y=x^3+C$ 表示一族积分曲线，而特解 $y=x^3$ 是过点(1,1)的一条积分曲线.

求微分方程的解的过程叫做**解微分方程**.

例 3 验证 $y=C_1\sin x-C_2\cos x$ 是微分方程 $y''+y=0$ 的通解.

解 $y'=C_1\cos x+C_2\sin x, y''=-C_1\sin x+C_2\cos x$. 把 y,y'' 代入微分方程左边，得

$$y''+y=-C_1\sin x+C_2\cos x+C_1\sin x-C_2\cos x=0.$$

又 $y=C_1\sin x-C_2\cos x$ 中有两个独立的任意常数，而 $y''+y=0$ 是二阶的，所以 $y=C_1\sin x-C_2\cos x$ 是微分方程 $y''+y=0$ 的通解.

思考题 6.1

1. 微分方程的解、通解、特解之间有什么关系？
2. 怎样确定微分方程的阶数？

练习题 6.1

1. 下列等式中，哪个是微分方程？哪个不是微分方程？是微分方程的，指出其阶数.

(1) $xy'''+2y'-x^2y=0$；

(2) $y^2+5y-xy=7$；

(3) $x(y')^2-2xy'+x=0$；

(4) $(7x-6y)\mathrm{d}x+(x+y)\mathrm{d}y=0$；

(5) $\frac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}t^2}=\sin t+3$.

2. 判断下列函数是否为相应微分方程的解；如果是，是通解还是特解？

(1) $xy'=2y,\quad y=5x^2$；

(2) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-2y=0,\quad y=C\mathrm{e}^{2x}$，$C$ 是任意常数；

(3) $y''-2y'+y=0,\quad y=x^2\mathrm{e}^x$.

3. 解下列微分方程.

(1) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{x}$；

(2) $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\mathrm{e}^x, y\big|_{x=0}=-1, y'\big|_{x=0}=0$.

4. 一物体作直线运动，其运动速度 $v=2\cos t$ (m/s)，当 $t=\frac{\pi}{4}$ 秒时，物体与原点 O 相距 10 m，求物体在时刻 t 与原点 O 的距离.

6.2 一阶微分方程

一阶微分方程的一般形式为 $F(x,y,y')=0$，本节介绍三种一阶微分方程的解法.

6.2.1 $\dfrac{dy}{dx}=f(x)g(y)$ 型微分方程

方程 $\dfrac{dy}{dx}=f(x)g(y)$ 的特点为等号右端的函数是关于 x 的连续函数与关于 y 的连续函数之积. 这类方程也称为**可分离变量的微分方程**. 其解法为**分离变量法**,即

当 $g(y)\neq 0$ 时,将方程分离变量,得

$$\frac{1}{g(y)}dy=f(x)dx,$$

两边积分,得

$$\int\frac{1}{g(y)}dy=\int f(x)dx,$$

即可求得微分方程的通解.

例 1 求微分方程 $\dfrac{dy}{dx}=2xy$ 的通解.

解 将已知方程分离变量并两边积分得

$$\int\frac{dy}{y}=\int 2x dx,$$

即

$$\ln|y|=x^2+C_1,$$

于是

$$|y|=e^{x^2+C_1}=e^{C_1}e^{x^2},$$

即

$$y=\pm e^{C_1}e^{x^2}.$$

令 $C=\pm e^{C_1}$, 则 $y=Ce^{x^2}(C\neq 0)$.

当 $C=0$ 时, $y=0$ 也是原方程的解,所以方程的通解为

$$y=Ce^{x^2},\quad C \text{ 是任意常数}.$$

例 2 求解初值问题 $\begin{cases} x dx+ye^{-x}dy=0, \\ y(0)=1. \end{cases}$

解 先求通解. 将已知方程变形为

$$ye^{-x}dy=-x dx,$$

分离变量得

$$y dy=-xe^{x}dx,$$

两边积分得通解为

$$\frac{y^2}{2}=-xe^x+e^x+C,$$

代入初始条件,即 $x=0$ 时 $y=1$, 得

$$C=-\frac{1}{2},$$

所以原微分方程的特解为 $y^2=2e^x(1-x)-1$.

6.2.2 $\dfrac{dy}{dx}=f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ 型微分方程

方程 $\dfrac{dy}{dx}=f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ 的特点为等号右端是一个关于 $\dfrac{y}{x}$ 的连续函数,此类方程称为**齐次微分方程**. 如 $(x^2+y^2)dx-(y^2-x^2)dy=0$ 可以写成 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}{\left(\dfrac{y}{x}\right)^2-1}$.

这类齐次方程的解法为:作代换 $u=\dfrac{y}{x}$,将方程化为可分离变量的微分方程求解.

例 3 求 $y'=\dfrac{y}{x}+e^{\frac{y}{x}}$ 的通解.

解 令 $\dfrac{y}{x}=u$,则

$$y=xu,\qquad y'=u+x\frac{du}{dx}.$$

代入已知方程,化简得

$$x\frac{du}{dx}=e^u,$$

这是可分离变量的方程,分离变量得

$$e^{-u}du=\frac{1}{x}dx,$$

两边积分,得

$$-e^{-u}=\ln|x|+C_1,$$

将 $u=\dfrac{y}{x}$ 代入上式,得

$$\ln|x|=C-e^{-\frac{y}{x}},(C=-C_1),$$

即为所求微分方程的通解.

6.2.3 $\dfrac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$ 型微分方程

方程 $\dfrac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$ 的特点为方程中的未知函数及其导数都是一次的,这类方程称为**一阶线性微分方程**. 其中 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 为 x 的连续函数, $Q(x)$ 为自由项.

当 $Q(x)\equiv 0$ 时,方程 $\dfrac{dy}{dx}+P(x)y=0$ 称为**一阶线性齐次微分方程**.

当 $Q(x)$ 不恒等于零时,方程 $\dfrac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$ 称为**一阶线性非齐次微分方程**.

例如, $y'+2xy=e^x$ 及 $y'-\dfrac{y}{3x}=x\cos x$ 都是一阶线性非齐次微分方程,与它们对应的一阶线性齐次方程为 $y'+2xy=0$ 及 $y'-\dfrac{y}{3x}=0$; 而 $y'+y^2=0,yy'+y=x$ 都不是一阶线性微分方程.

一阶线性齐次微分方程 $\frac{dy}{dx}+P(x)y=0$ 是可分离变量的方程,分离变量后得

$$\frac{dy}{y}=-P(x)dx,$$

两边积分,得

$$\ln|y|=-\int P(x)dx+C_1,$$

即

$$y=\pm e^{-\int P(x)dx+C_1}=Ce^{-\int P(x)dx},(C=\pm e^{C_1}\neq 0),$$

又因为 $C=0$ 时,$y=0$ 也是解,所以一阶线性齐次微分方程的通解为

$$y=Ce^{-\int P(x)dx},C\text{ 是任意常数}. \tag{1}$$

现在求一阶线性非齐次微分方程的通解.

把方程

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$$

改写成

$$\frac{dy}{y}=\frac{Q(x)}{y}dx-P(x)dx.$$

由于 y 是 x 的函数,$\frac{Q(x)}{y}$ 也是 x 的函数,两边积分,得

$$\ln|y|=-\int P(x)dx+\int\frac{Q(x)}{y}dx.$$

因此

$$y=\pm e^{\int\frac{Q(x)}{y}dx}\cdot e^{-\int P(x)dx}.$$

因为 $\pm e^{\int\frac{Q(x)}{y}dx}$ 也是 x 的函数,可用 $C(x)$ 表示,所以

$$y=C(x)e^{-\int P(x)dx}.$$

也就是说,一阶线性非齐次微分方程的解,可以认为是将其相应的一阶线性齐次微分方程的通解中常数 C 用一个特定的函数 $C(x)$ 来代替,只要求出 $C(x)$ 即可.这种方法叫做**常数变易法**.

将 $y=C(x)e^{-\int p(x)dx}$ 及导数 $y'=C'(x)e^{-\int P(x)dx}-C(x)P(x)e^{-\int P(x)dx}$ 代入方程并化简,得

$$C'(x)e^{-\int p(x)dx}=Q(x),$$

即

$$C'(x)=Q(x)e^{\int p(x)dx},$$

两边积分,得

$$C(x)=\int Q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C.$$

因此,一阶线性非齐次微分方程的通解为

$$y=e^{-\int p(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C\right],C\text{ 是任意常数}. \tag{2}$$

将上式写成

$$y = Ce^{-\int p(x)\mathrm{d}x} + e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\int Q(x)e^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x,$$

可以看出,通解中的第一项是对应的线性齐次微分方程的通解,第二项是线性非齐次微分方程的一个特解((2)中取 $C = 0$).

由此可知,一阶线性非齐次微分方程的通解,是对应的齐次方程的通解与非齐次方程的一个特解之和,这是一阶线性非齐次方程通解的结构.

例 4 求微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y\cos x = 0$ 的通解.

解 这是一阶线性齐次微分方程,且 $P(x) = \cos x$, 代入公式 (1) 得

$$y = Ce^{-\int\cos x\mathrm{d}x} = Ce^{-\sin x}.$$

例 5 求方程 $xy' + y = \sin x$ 的通解.

解 解法一 公式法

将已知方程变形为

$$y' + \frac{1}{x}y = \frac{\sin x}{x},$$

这是一阶线性非齐次微分方程,且 $P(x) = \dfrac{1}{x}, Q(x) = \dfrac{\sin x}{x}$, 代入公式(2)得所求方程的通解为

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\left[\int\frac{\sin x}{x}e^{\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C\right] \\ &= \frac{1}{x}\left(\int\sin x\mathrm{d}x + C\right) \\ &= \frac{-\cos x + C}{x}. \end{aligned}$$

解法二 常数变易法

先用公式(1)求出相应的齐次方程

$$y' + \frac{1}{x}y = 0$$

的通解为

$$y = Ce^{-\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x} = \frac{C}{x}.$$

设 $y = \dfrac{C(x)}{x}$ 为原方程的解,因为

$$y' = \frac{C'(x)x - C(x)}{x^2},$$

将 y, y' 代入原方程,有

$$x\cdot\frac{xC'(x) - C(x)}{x^2} + \frac{C(x)}{x} = \sin x,$$

解得

$$C'(x) = \sin x,$$

两边积分,得

$$C(x) = -\cos x + C,$$

于是原方程的通解为

$$y = \frac{-\cos x + C}{x}.$$

例 6 设 $y > 0$，求微分方程 $y\mathrm{d}x + (x - y^3)\mathrm{d}y = 0$ 的通解.

解 如果将已知方程变形为 $y' + \frac{y}{x - y^3} = 0$，这显然不是关于未知函数 y 的一阶线性微分方程，但若将方程变形为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} + \frac{x - y^3}{y} = 0,$$

即

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} + \frac{1}{y}x = y^2,$$

这是关于 x 的一阶线性微分方程，且 $P(y) = \frac{1}{y}$，$Q(y) = y^2$，由通解公式(2)得

$$x = \mathrm{e}^{-\int \frac{1}{y}\mathrm{d}y}\left(\int y^2 \mathrm{e}^{\int \frac{1}{y}\mathrm{d}y}\mathrm{d}y + C\right) = \mathrm{e}^{-\ln y}\left(\int y^2 \mathrm{e}^{\ln y}\mathrm{d}y + C\right)$$

$$= \frac{1}{y}\left(\int y^3 \mathrm{d}y + C\right) = \frac{1}{4}y^3 + \frac{C}{y},$$

或

$$4xy = y^4 + C_1,$$

此为原方程的隐式通解.

思考题 6.2

1. 齐次微分方程有什么特点？
2. 一阶线性非齐次微分方程与相应的一阶线性齐次微分方程的通解之间有什么关系？

练习题 6.2

1. 单项选择题.

(1) 下列(　　)是一阶线性微分方程.

A. $y' + x^2 y - \cos x = 0$　　B. $y^2 y' + y = x$

C. $y' - \mathrm{e}^{-y} = \cos x$　　D. $y' + \frac{1}{x}y = \frac{\sin x}{x}$

(2) 一阶线性微分方程 $xy' - y - \mathrm{e}^x = 0$ 中的 $P(x)$，$Q(x)$ 应为(　　).

A. $P(x) = -1, Q(x) = \mathrm{e}^x$　　B. $P(x) = -\frac{1}{x}, Q(x) = \frac{-\mathrm{e}^x}{x}$

C. $P(x) = \frac{1}{x}, Q(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{x}$　　D. $P(x) = -\frac{1}{x}, Q(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{x}$

2. 求下列微分方程的通解或特解.

(1) $\mathrm{e}^x y\mathrm{d}x - (1 + \mathrm{e}^x)\mathrm{d}y = 0$；　　(2) $y' = \mathrm{e}^{2x-y}, y|_{x=0} = 0$；

(3) $(\mathrm{e}^{x+y} - \mathrm{e}^x)\mathrm{d}x + (\mathrm{e}^{x+y} + \mathrm{e}^y)\mathrm{d}y = 0$；　　(4) $y' = \frac{y}{x}\ln\frac{y}{x}$；

(5) $y' - \frac{2}{x}y = \frac{x}{2}, y|_{x=1} = 2$;　　(6) $y' - \frac{2}{x+1}y = (x+1)^{\frac{5}{2}}$.

6.3 可降阶的高阶微分方程

6.3.1 $y^{(n)} = f(x)$ 型的微分方程

微分方程

$$y^{(n)} = f(x) \tag{1}$$

的右端仅含有一个变量 x，两端积分一次，就得到一个 $n-1$ 阶的微分方程.

即
$$y^{(n-1)} = \int f(x)\,dx + C_1,$$

再积分一次就得

$$y^{(n-2)} = \int\left[\int f(x)\,dx + C_1\right]dx + C_2.$$

依此法继续进行，积分 n 次，便得方程(1)的含有 n 个相互独立的任意常数的通解.

例 1 求 $y''' = e^{2x} - \cos x$ 的通解.

解 对所给方程连续积分三次，得所给方程的通解：

$$y'' = \frac{1}{2}e^{2x} - \sin x + C_1,$$

$$y' = \frac{1}{4}e^{2x} + \cos x + C_1x + C_2,$$

$$y = \frac{1}{8}e^{2x} + \sin x + C_3x^2 + C_2x + C_4\left(C_3 = \frac{C_1}{2}\right).$$

6.3.2 $y'' = f(x, y')$ 型的微分方程

方程

$$y'' = f(x, y') \tag{2}$$

的右端不显含未知函数 y，若令 $y' = P$，则 $y'' = \frac{dP}{dx} = P'$. 把 y', y'' 代入式(2)得

$$P' = f(x, P).$$

这是一个关于 x, P 的一阶微分方程. 设其通解为

$$P = \varphi(x, C_1),$$

因为 $P = y'$，这样又得一个一阶方程

$$y' = \varphi(x, C_1),$$

对它进行积分，便得方程 (2)的通解

$$y = \int\varphi(x, C_1)\,dx + C_2.$$

例 2 求方程 $y'' + \frac{2}{x}y' = 0$ 的通解.

解 令 $y' = P(x)$，则 $y'' = P'(x)$，原方程变为

$$P'(x)+\frac{2}{x}P(x)=0,$$

分离变量后,解得

$$P(x)=\frac{C_1}{x^2},\quad \text{即}\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{C_1}{x^2}.$$

再积分一次,得所给方程的通解为

$$y=C_2-\frac{C_1}{x}.$$

例3 求方程 $y''-y'=x$ 满足初始条件 $y|_{x=0}=0$, $y'|_{x=0}=0$ 的特解.

解 令 $y'=P(x)$,则 $y''=P'(x)$,原方程变为 $P'(x)-P(x)=x$,这是一阶线性方程,其通解为

$$P(x)=\mathrm{e}^{\int\mathrm{d}x}\left(\int x\mathrm{e}^{-\int\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x+C_1\right)=\mathrm{e}^{x}\left(\int x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x+C_1\right)=C_1\mathrm{e}^{x}-x-1,$$

即

$$y'=C_1\mathrm{e}^{x}-x-1,$$

由条件 $y'|_{x=0}=0$ 得 $C_1=1$, 则

$$y'=\mathrm{e}^{x}-x-1,$$

再积分一次得

$$y=\mathrm{e}^{x}-\frac{1}{2}x^2-x+C_2,$$

由条件 $y|_{x=0}=0$ 得 $C_2=-1$, 故所求的特解为

$$y=\mathrm{e}^{x}-\frac{1}{2}x^2-x-1.$$

6.3.3 $y''=f(y,y')$ 型的微分方程

方程

$$y''=f(y,y') \tag{3}$$

中不显含变量 x, 为求出它的解,可令 $y'=P(y)=P$, 则

$$y''=\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=P\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y},$$

将 y',y'' 代入(3)中得

$$P\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y}=f(y,P),$$

这是一个以 P 为未知函数,y 为自变量的一阶微分方程,若设其通解为

$$y'=P=\varphi(y,C_1),$$

分离变量并积分,便得方程(3)的通解为

$$\int\frac{\mathrm{d}y}{\varphi(y,C_1)}=x+C_2.$$

例4 求方程 $2yy''+(y')^2=0$ 满足初始条件 $y|_{x=0}=1, y'|_{x=0}=1$ 的特解.

解 令 $y'=P(y)=P$, 则 $y''=P\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y}$, 于是所给方程变为