初中新代数

下

修正課程標準適用

初中新代數

下册

編著者 蔡研深

世界書局印行

中華民國二十六年六月印刷
中華民國三十五年七月新八版

初中新代數（全二冊）

下冊實價國幣
（外埠酌加運費匯費）

編著者 蔡研深

發行者 世界書局有限公司代表人 李煜瀛

出版印刷者 上海大連灣路 世界書局

發行所 上海及各省 世界書局

本書負責校對者王樹培

初中新代數

下冊目錄

第八編　乘方及開方根數與虛數

第九編　指數對數及對數表檢法

第十編

一元二次方程解法及應用問題

第十一編
可化為二次方程的簡易高次方程

第十二編　函數變數法

第十三編　比例

第十四編　級數

附　錄

第八編　乘方及開方,根數與虛數

第一節　代數式的乘方

90. **設題 172**　求 $3xy^2z^3$ 的平方（即二次方）.

【解】 $(3xy^2z^3)^2 = 9x^2y^4z^6$.

設題 173　求 $-7ab^2c$ 的平方.

【解】 $(-7ab^2c)^2 = 49a^2b^4c^2$.

由設題 172 和 173 的解法,可得求單項式平方的通則如下:

(1) 不論原式爲正爲負,其平方的符號都是正.

(2) 原式中數字係數的平方數,就是平方中的數字係數.

(3) 將原式中各文字的指數,用 2 乘之,即得平方中各該文字的指數.

91. **設題 174**　求 $5x+4y$ 的平方.

【解】 $$(5x+4y)^2 = (5x)^2 + 2(5x)(4y) + (4y)^2$$
$$= 25x^2 + 40xy + 16y^2.$$

設題175 求$3x-2y+z$的平方.

【解】 $(3x-2y+z)^2=\{3x-(2y-z)\}^2$

$=(3x)^2-2(3x)(2y-z)+(2y-z)^2$

$=9x^2-6(2y-z)x+(2y-z)^2.$

由設題174和175的解法,可得求多項式平方的通則如下:

(1)多項式的平方,可應用特殊積公式一和公式二求得.

(2)二項式的平方,必是三項式.其三項排列的標準,必與原式排列的標準相同(設題174中,原式依x的降冪排列,其平方亦依x的降冪排列).

(3)三項以上的多項式,如用括號分成二項,然後平方時,則其平方亦是一三項式.其三項排列的標準,亦與原式排列的標準相同(細看設題175).

問答題26

(1) 不論正項,負項,其平方常爲正,是何緣故?

(2) 說明一式平方的指數,是原指數2倍之理.

(3) 設題175如改爲$z-2y+3x$,依z的降冪排列,問其平方式若何?

演算題54

(1) 求$5abc^2$的平方.　(2) 求$-5x^2y$的平方.

(3) 求$4a-5b$的平方.　(4) 求$x+y-3z$的平方.

(5) 求$7x^2-8y^2+4$的平方.

(6) 求$3x-5y^2+6$的平方.

92. **設題176** 求$\dfrac{5x^2y}{7}$的平方.

【解】 $$\left(\frac{5x^2y}{7}\right)^2=\frac{(5x^2y)^2}{7^2}=\frac{25x^4y^2}{49}.$$

設題177 求$-\dfrac{7xy^2}{3}$的平方.

【解】 $$\left(-\frac{7xy^2}{3}\right)^2=\frac{(-7xy^2)^2}{3^2}=\frac{49x^2y^4}{9}.$$

設題178 求$\dfrac{x^2-xy}{x+y}$的平方.

【解】 $$\left(\frac{x^2-xy}{x+y}\right)^2=\frac{(x^2-xy)^2}{(x+y)^2}=\frac{x^4-2x^3y+x^2y^2}{x^2+2xy+y^2}$$

由設題176——178的解法,可得求含有分母的代數式或分式平方的通則如下:

分別求分子分母的平方;即以分母的平方爲平方的分母,分子的平方爲平方的分子.

演算題 55

求下列各式的平方:

(1) $\dfrac{5x+3y}{8}$. (2) $\dfrac{x+y-z}{7}$.

(3) $\dfrac{a+2b-3c}{12}$. (4) $\dfrac{x^2+xy+y^2}{x-y}$.

(5) $\dfrac{3a-4b+c}{a+b-c}$. (6) $\dfrac{7x+6y}{3x-4y}$.

(7) $\dfrac{(x+y)-(a-b)}{(a+b)-(x-y)}$. (8) $\dfrac{x+y-a+b}{a+b-x+y}$.

(9) $1+\dfrac{x^2-xy+y^2}{3xy}$.

93. 設題179 求 $5x^3yz^2$ 的立方(即三次方).

【解】 $(5x^3yz^2)^3=(5)^3(x^3)^3(y)^3(z^2)^3=125x^9y^3z^6$.

設題180 求 $-3xy^2z^3$ 的立方.

【解】 $(-3xy^2z^3)=(-3)^3(x)^3(y^2)^3(z^3)^3$

$$=-27x^3y^6z^9.$$

由設題179和180的解法,可得求單項式立方的通則如下:

(1)原式爲正,則其立方亦爲正;原式爲負,則其立方亦爲負.就是立方的正負,和原式相同.

(2) 原式數字係數立方的絕對值,就是立方中數字係數的絕對值.

(3) 原式中各文字指數的 3 倍,就是立方中各該文字的指數.

94.　設題 181　求 $5a-b$ 的立方.

【解】 $$\begin{aligned}(5a-b)^3 &= (5a)^3-3(5a)^2(b)+3(5a)(b)^2-(b)^3\\ &= 125a^3-75a^2b+15ab^2-b^3.\end{aligned}$$

設題 182　求 $3x-4y+5z$ 的立方.

【解】 $$\begin{aligned}(3x-4y+5z)^3 &= \{(3x-4y)+5z\}^3\\ &= (3x-4y)^3+3(3x-4y)^2(5z)\\ &\quad +3(3x-4y)\times(5z)^2+(5z)^3\\ &= (3x)^3-3(3x)^2(4y)+3(3x)(4y)^2-(4y)^3\\ &\quad +15z(9x^2-24xy+16y^2)\\ &\quad +75z^2(3x-4y)+125z^3\\ &= 27x^3-108x^2y+144xy^2-64y^3\\ &\quad +135x^2z-360xyz+240y^2z+225xz^2\\ &\quad -300yz^2+125z^3.\end{aligned}$$

由設題 181 和 182 的解法,可得求多項式立方的通則如下

(1)多項式的立方,可應用特殊積公式八及公式九求之.

(2)求得立方中各項排列的標準,必和原式排列的標準相同(設題181中,依a的降冪排列.設題182中,依z的昇冪排列).

問答題27

(1) 一式立方的正負,為什麼和原式的正負相同?

(2) 設題182若改做依x的降冪排列,應怎樣用小括號分項.

(3) 設題181若依b做標準,是什麼排列?

演算題56

求下列各式的立方:

(1) $7a^2b^3c^4$.　　(2) $-5x^3yz^2$.

(3) $3x+5y$.　　(4) $a+b-c$.

(5) $x-2y-3z$.　　(6) $7x^2-y^3$.

(7) $6x^2-xy+y$.　　(8) $5a^2-10b+15c$.

(9) $a+b-c-d$.

95. 設題183 求$\frac{3x+y}{8}$的立方.

【解】 $$\left(\frac{3x+y}{8}\right)^3=\frac{(3x+y)^3}{8^3}$$

$$=\frac{27x^3+27x^2y+9xy^2+y^3}{512}.$$

設題184 求$\frac{5x+6y}{3x-y}$的立方.

【解】 $$\left(\frac{5x+6y}{3x-y}\right)^3=\frac{(5x+6y)^3}{(3x-y)^3}$$

$$=\frac{125x^3+450x^2y+540xy^2+216y^3}{27x^3-27x^2y+9xy^2-y^3}.$$

由設題183和184的解法,可得求含有分母的代數式或分式立方的通則如下:

分子,分母分別求立方;即以分子的立方做立方的分子,分母的立方做立方的分母.

演算題57

求下列各式的立方:

(1) $\frac{2}{3}x^2yz$.

(2) $\frac{6}{5}xy^2z^3$.

(3) $\frac{7}{12}x^3yz^2$.

(4) $\frac{x-y}{x+y}$.

(5) $\frac{x^2+y^2}{x-y}$.

(6) $\frac{4(x^2+1)}{3(x+2y)}$.

(7) $-\frac{1}{7xy^2}$.

(8) $\frac{x^2+x+1}{x+1}$.

(9) $\frac{x^2+y^2+z^2}{x+y+z}$.

第二節　代數式的開方

96. 設題185　求$9x^2y^4z^6$的平方根（即二次方根）.

【解】開方是乘方的逆運算.開平方是求平方的逆運算.表示開平方常用$\sqrt{\ }$符號,叫做平方根號,簡稱根號.故本題的算式如下:

$$\sqrt{9x^2y^4z^6}=\pm 3xy^2z^3.$$

設題186　求$49a^2b^4c^2$的平方根.

【解】　$\sqrt{49a^2b^4c^2}=\pm 7ab^2c.$

試將設題185的算式,和設題172的算式相比較;將設題186的算式,和設題173的算式相比較.則知設題185算式中根號內之式,與設題172算式中等號右邊之式相同;設題185等號右邊之式,比設題172括號內之式多一（−）號;設題186算式中根號內之式,與設題173等號右邊之式相同;設題186等號右邊之式,比設題173括號內之式多一（+）號.因由求

單項式平方通則第(1)條,知$(3xy^2z^3)^2$等於$9x^2y^4z^6$;而$(-3xy^2z^3)^2$亦等於$9x^2y^4z^6$.故設題185中之$9x^2y^4z^6$或從$3xy^2z^3$平方而來,或從$-3xy^2z^3$平方而來,實難斷定.因而不得不並用正負兩個符號.由是可得單項式開平方的通則如下:

(1)一式的平方根前,必須並附正負兩個符號;正號在上,負號在下,照士寫法.

(2)平方根的數字係數,是原式數字係數的平方根.

(3)平方根中各文字的指數,是原式中各該文字指數的$\frac{1}{2}$.

問答題28

口述下列各式的平方根:

(1) $4x^2y^4$.　(2) $64x^4y^2z^6$.　(3) $49a^8b^6c^4$.

(4) $144x^2y^{10}z^{12}$.　(5) $121x^6y^6z^4$.　(6) $16a^8x^2y^6$.

(7) $25x^2y^2z^8$.　(8) $36x^4y^{16}z^8$.　(9) $81x^2y^2z^{10}$.

97. 設題187 求$25x^2+40xy+16y^2$的平方根.

【解】 將設題174的算式,從右邊寫到左邊,則得

$$25x^2+40xy+16y^2=(5x)^2+2(5x)(4y)+(4y)^2$$
$$=(5x+4y)^2.$$

$$\therefore \quad \sqrt{25x^2+40xy+16y^2}=\pm(5x+4y).$$

設題188 求 $9x^2-6(2y-z)x+(2y-z)^2$ 的平方根.

【解】 將設題175的算式,從右邊寫到左邊,則得

$$9x^2-6(2y-z)x+(2y-z)^2$$
$$=(3x)^2-2(3x)(2y-z)+2y-z)^2$$
$$=\{3x-(2y-z)\}^2$$
$$=(3x-2y+z)^2.$$

$$\therefore \quad \sqrt{9x^2-6(2y-z)x+(2y-z)^2}=\pm(3x-2).$$

從設題187和188的解法,可知一代數式若依某文字的降冪（或昇冪）排列好後,其平方根的第一項,就是原式中第一項的平方根.例如設題187中所得平方根的第一項$5x$,是原式中第一項$25x^2$的平

方根;設題 188 中所得平方根的第一項 $3x$, 是原式中第一項 $9x^2$ 的平方根.平方根的第二項,是用平方根第一項的 2 倍除原式中第二項所得之商.例如設題 187 中平方根的第二項 $4y=\dfrac{40xy}{2(5x)}$; 設題 188 中平方根的第二項 $2y-z=\dfrac{6(2y-z)x}{2(3x)}$.

設題 189　求 $24xy+16x^2+9y^2$ 的平方根.

【解】 (1) 先將原式依 x 的降冪排列,得

$$16x^2+24xy+9y^2.$$

(2) $\sqrt{16x^2}=4x$…………根的第一項.

(3) $\dfrac{24xy}{2\times 4x}=3y$…………根的第二項.

(4) $\sqrt{16x^2+24xy+9y^2}=\pm(4a+3y)$.

一般布算方式如下:

$$
\begin{array}{l|l}
 & 4x+3y\cdots\cdots\text{根} \\
\cline{2-2}
 & 16x^2+24xy+9y^2\cdots\text{排列好後的原式.} \\
(4x)^2=16x^2 & \\
- & \\
\hline
2\times 4x=8x & 24xy+9y^2\cdots\cdots\text{第一餘式.} \\
+\qquad\quad 3y & \underline{24xy+9y^2}\cdots\cdots 3y(8x+3y). \\
\hline
8x+3y & \qquad\quad 0
\end{array}
$$

設題 190 求 $9x^2-6xy+12xz+y^2-4yz+4z^2$的平方根.

【解】 本題已依 x 的降冪排列,故不必再行整理.其算式如下:

$$
\begin{array}{r|l}
 & 3x-y+2z \cdots\cdots\cdots\cdots \text{平方根} \\
\hline
 & 9x^2-6xy+12xz+y^2-4yz+4z^2 \\
(3x)^2=9x^2 & \\
- & 9x^2 \\
\hline
2\times 3x=6x & -6xy+12xz+y^2-4yz+4z^2 \cdots\cdots \text{第一餘式} \\
+\quad -y & -6xy \qquad\qquad +y^2 \cdots\cdots\cdots\cdots -y(6x-y) \\
\hline
6x-y & \qquad 12xz \qquad -4yz+4z^2 \cdots\cdots \text{第二餘式} \\
2(3x-y)=6x-2y & \qquad 12xz \qquad -4yz+4z^2 \cdots\cdots 2z(6x-2y+2z) \\
+\quad 2z & \hline \\
6x-2y+2z & \qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

$$\therefore \sqrt{9x^2-6xy+12xz+y^2-4yz+4z^2}$$
$$=\pm(3x-y+2z).$$

由設題187——190的解法,可得求多項式平方根的通則如下:

(1)整理原式,使依一文字的降冪或昇冪排列.

(2)求出第一項的平方根,即得所求平方根的第一項.

(3)從原式中減去求得根的第一項的平方,得第一餘式.