高等院校信息与通信工程系列教材

随机信号分析

吉淑娇　雷艳敏　编著

清华大学出版社

高等院校信息与通信工程系列教材

随机信号分析

吉淑娇　雷艳敏　编著

清华大学出版社
北京

内容简介

本书系统地介绍了随机信号以及随机信号通过线性时不变系统的分析处理方法。内容涉及随机变量和随机过程的基本概念，平稳随机过程的时频域分析，随机信号通过线性系统的分析方法以及几种典型随机过程的分析等。

本书可作为普通高校电子信息类、通信类、电子类等专业的本科生教材，也可供信号处理相关领域的工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

随机信号分析/吉淑娇，雷艳敏编著. --北京：清华大学出版社，2014
高等院校信息与通信工程系列教材
ISBN 978-7-302-34056-0

Ⅰ. ①随…　Ⅱ. ①吉…②雷…　Ⅲ. ①随机信号—信号分析—教材　Ⅳ. ①TN911.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 238079 号

责任编辑：文　怡
封面设计：傅瑞学
责任校对：李建庄
责任印制：宋　林

出版发行：清华大学出版社
网　　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地　　址：北京清华大学学研大厦 A 座　**邮　　编**：100084
社 总 机：010-62770175　**邮　　购**：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质量反馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
课件下载：http://www.tup.com.cn，010-62795954
印 装 者：北京密云胶印厂
经　　销：全国新华书店
开　　本：148mm×210mm　**印　张**：5.375　**字　　数**：153 千字
版　　次：2014 年 1 月第 1 版　**印　　次**：2014 年 1 月第 1 次印刷
印　　数：1～2500
定　　价：22.00 元

产品编号：050245-01

前　言

“随机信号分析”是电子信息类专业主要的专业基础课程之一。它主要是研究随机信号的特点以及随机信号的一些分析方法。“随机信号分析”所研究的随机信号和“信号与系统”中所研究的确知信号一样，在通信、电信、自动控制、生物医学以及图像处理等领域有着广泛的应用。课程目的是使学生对随机信号有必要的了解，掌握一些随机信号的理论和分析处理的基本方法。

本书参考学时为36～40学时，在编排上本书最大的特点是，提供足够多的例题和习题，帮助学生更好的理解和掌握知识。全书共5章，第1章以随机变量为研究对象，主要在概率论基础上，研究了随机变量的分布律、数字特征和特征函数；第2章以随机信号为研究对象，主要研究它的概念、分类以及随机信号的数字特征及特征函数；第3章主要以平稳随机过程为研究对象，首先研究平稳随机过程概念及其数字特征，其次从时域和频域两个方面分析平稳随机过程，并讨论了随机信号的各态历经性；第4章主要研究随机信号通过线性系统之后的响应情况，及其在时域和频域的分析，并以白噪声为例，给出了随机信号通过线性系统的具体响应情况；第5章介绍3种典型的随机过程，如高斯随机过程、窄带随机过程以及复随机信号。

学习本课程需有高等数学、概率论、信号与系统以及电子线路等方面的知识作为基础。

本书由吉淑娇统编全稿。其中，第1、4章及部分习题由雷艳敏编写，第2、3、5章及部分习题由吉淑娇编写。

作者在编写本教材的过程中，参考了大量的文献，在此对其作者

表示衷心的感谢。同时，本书的编写也得到清华大学出版社的大力支持，本书的编辑和作者所进行的大量沟通更是十分有益，在此表示诚挚的感谢。

由于作者水平有限，本书在内容的选择、体系的安排以及文字叙述上难免有疏漏，恳请读者批评指正。

作　者

2013 年 8 月

目　　录

第 1 章　随机变量

1.1　随机变量概念

在随机实验中，实验的结果不止一个，如投掷骰子可能出现的点数、打靶命中的环数以及一批产品中的次品数等。还有一些随机实验尽管可能结果和数值间没直接的联系，如投掷硬币出现正面或反面，但可以规定一些数值来表示实验的可能结果，如用“1”表示投掷硬币的正面，用“0”表示反面。

引入随机变量可以将随机实验的所有可能结果与变量的取值联系起来。设随机实验的样本空间为 $S=\{e_i\}$，如果对于每一个元素 $e_i\in S$，都有一个实数 $X(e_i)$ 与之对应，对所有的元素 $e\in S$，就得到一个定义在空间 S 上的实单值函数 $X(e)$，称 $X(e)$ 为随机变量，简写为 X。一般用大写字母 X、Y、Z 表示随机变量，而用小写字母 x、y、z 表示对应随机变量的可能取值。

根据随机变量取值的可列和不可列，将随机变量分为离散和连续两种。描述不同的随机实验用不同的随机变量，如用随机变量 X 描述随机信号的电压，但如果用它来描述一个随机信号的幅度和相位是不够的，必须用两个随机变量 X 和 Y。根据实际情况，把随机变量分为一维、二维和多维随机变量。

1.1.1　随机变量的分布律

随机实验的某一结果出现是随机的，譬如投掷硬币出现正面还是反面，因此不能利用确定的函数关系来分析随机变量，而是要通过

大量的实验来统计规律。分布律描述随机变量各可能取值和相应的概率之间的关系，是研究随机变量统计规律的一种方法。

1. 概率分布函数

定义 1.1 概率分布函数。

定义随机变量 X 不超过 x 的概率为概率分布函数或累积分布函数，即

$$F_X(x) = P(X \leqslant x) \tag{1-1}$$

如果把一个随机变量看成是数轴上的一个随机点，则上式说明了随机变量 X 落在区域$(-\infty, x]$内的概率，显然它既适用于离散变量，也适用于连续随机变量。概率分布函数也可以说明随机变量在某一区间内取值的概率。根据概率分布函数的定义，可得到如下性质。

性质 1 $F_X(x)$是 x 的单调非减函数，对于 $x_2 > x_1$，有

$$F_X(x_2) \geqslant F_X(x_1) \tag{1-2}$$

性质 2 $F_X(x)$非负，且取值满足

$$0 \leqslant F_X(x) \leqslant 1 \tag{1-3}$$

性质 3 随机变量在 x_1, x_2 区间内的概率为

$$P(x_1 < X < x_2) = F_X(x_2) - F_X(x_1) \tag{1-4}$$

性质 4 $F_X(x)$右连续，即

$$F_X(x^+) = F_X(x) \tag{1-5}$$

性质 4 对离散随机变量特别的有用。对于任意一个函数，看它是否为概率分布函数的正确表达式，只要用性质 1、性质 2 和性质 4 判断即可。离散随机变量的分布函数除满足以上性质外，还具有阶梯形式，阶跃的高度等于随机变量在该点的概率，即

$$F(x) = \sum_{i=1}^{\infty} P(X = x_i) u(x - x_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P_i u(x - x_i) \tag{1-6}$$

式中，$u(x)$为单位阶跃函数；P_i 为 $X = x_i$ 的概率。

2. 概率密度函数

分布律的另一种形式是概率密度函数，定义为概率分布函数 $F(x)$ 对 x 的导数，即

$$f(x) = \frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x} \tag{1-7}$$

或写成积分形式

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(\lambda)\mathrm{d}\lambda \tag{1-8}$$

如果概率分布函数是连续的，其导数一定存在，故其概率密度存在；如果概率分布函数存在有限个间断点，则可引入 δ 函数，因此概率密度总是存在的。根据概率分布函数的性质，可得到概率密度的性质。

性质 1 概率密度函数非负，即

$$f(x) \geqslant 0 \tag{1-9}$$

性质 2 概率密度函数在整个取值区间积分为 1，即

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1 \tag{1-10}$$

性质 3 概率密度函数在 (x_1, x_2) 区间积分，给出该区间的取值概率

$$P(x_1 < X \leqslant x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x \tag{1-11}$$

这三条性质与概率分布函数的前三条性质是互相对应的。性质 1 和性质 2 说明概率密度函数是一条在横轴上方且与横轴所围的面积为 1 的曲线，它们也是检验一个函数是否为概率密度的条件。离散随机变量的概率密度为

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} P(X = x_i)\delta(x - x_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P_i\delta(x - x_i) \tag{1-12}$$

式中，$\delta(x)$ 为单位冲激函数。

概率分布函数和概率密度可以充分地说明离散随机变量取值落

在某点和某个区间的概率，而连续随机变量取值落在某一区间的概率也可由 $F(x)$和 $f(x)$求出。值得注意的是：连续随机变量在某点取值的概率为零。因此对于连续随机变量，取值区间写成开区间和闭区间是一样的，但对于离散随机变量，开区间和闭区间是不同的。图 1-1 和图 1-2 给出了连续和离散随机变量的分布律。

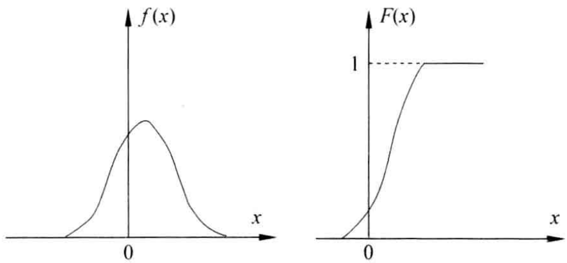

图 1-1 连续随机变量概率密度和概率分布函数

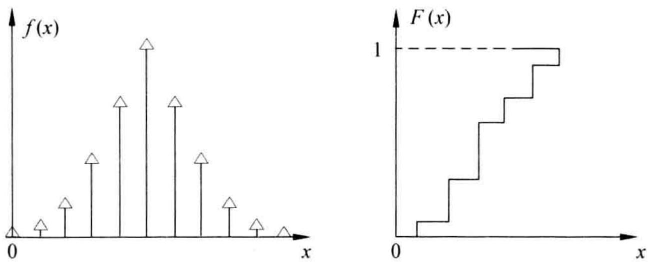

图 1-2 离散随机变量概率密度和概率分布函数

3. 多维随机变量的分布律

二维随机变量用(X,Y)表示，它可认为是二维平面上的一个随机点。n 维随机变量则用$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$表示，它可推广为 n 维空间上的一个随机点。

多维随机变量不是几个一维随机变量的简单组合，作为一个整体，多维随机变量的统计规律不仅取决于各个随机变量的统计规律，

还与几个随机变量之间的关联程度有关。由一维随机变量的分布律不难推广到二维随机变量的分布律。二维随机变量的概率分布函数和概率密度分别由式 (1-13)和式(1-14)决定：

$$F_{XY}(x,y) = P(X \leqslant x, Y \leqslant y) \tag{1-13}$$

$$f_{XY}(x,y) = \frac{\partial^2 F_{XY}(x,y)}{\partial x \partial y} \tag{1-14}$$

由于分布函数与概率密度的对应关系，这里我们只考虑二维概率密度的性质。

性质 1　二维概率密度函数非负

$$f_{XY}(x,y) \geqslant 0 \tag{1-15}$$

性质 2　二维概率密度函数在整个取值区域积分为 1

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 1 \tag{1-16}$$

性质 3　二维概率密度函数在某个区域积分，给出该区间的取值概率

$$p(x_1 < X \leqslant x_2, y_1 < Y \leqslant y_2) = \int_{x_1}^{y_1}\int_{x_2}^{y_2} f_{XY}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{1-17}$$

性质 4　对二维概率密度函数在一个随机变量的所有取值区间上积分，将给出另一个变量的概率密度函数

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\mathrm{d}y \tag{1-18}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\mathrm{d}x \tag{1-19}$$

在二维分布律中，$F_{XY}(x,y)$为联合概率分布函数，$f_{XY}(x,y)$为联合概率密度，$F_X(x)$和 $F_Y(y)$为边缘分布函数，$f_X(x)$和 $f_Y(y)$为边缘概率密度。如果将条件概率的概念引入到分布律中，还可得到条件概率分布函数 $F_Y(y|x)$和条件概率密度 $f_Y(y|x)$。在表示概率分布函数和概率密度时，为了区别不同的随机变量，常把随机变量作为下角标。

在 $X \leqslant x$ 的条件下，随机变量 Y 的条件概率分布函数和条件概率密度函数可分别表示为

$$F_Y(y \mid x) = \frac{F_{XY}(x,y)}{F_X(x)} \tag{1-20}$$

$$f_Y(y \mid x) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)} \tag{1-21}$$

与概率论中定义两个事件独立相似，定义两个随机变量 X,Y 独立的条件。对于所有的 x,y，若

$$f_X(x \mid y) = f_X(x) \tag{1-22}$$

$$f_Y(y \mid x) = f_Y(y) \tag{1-23}$$

成立，则称 X、Y 是相互独立的两个随机变量。将式(1-21)与式(1-23)联合，便得到两个随机变量 X,Y 相互统计独立的充要条件

$$f_{XY}(x,y) = f_X(x)f_Y(y) \tag{1-24}$$

即随机变量 X,Y 的二维联合概率密度等于 X 和 Y 的边缘概率密度的乘积。

二维分布律是多维分布律最简单的情况，对于 n 维随机变量 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$，仍可仿式(1-13)和式(1-14)定义 n 维分布函数和概率密度

$$F_X(X_1,X_2,\cdots,X_n) = P(X_1 \leqslant x_1, X_2 \leqslant x_2, \cdots, X_n \leqslant x_n) \tag{1-25}$$

$$f_X(X_1,X_2,\cdots,X_n) = \frac{\partial^n F_X(X_1,X_2,\cdots,X_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \cdots \partial x_n} \tag{1-26}$$

n 维概率密度的性质也类似二维概率密度的性质，对应式(1-18)的一条重要性质为

$$f_X(X_1,X_2,\cdots,X_m) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}}_{n-m} f_X(x_1,x_2,\cdots,x_m,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_{m+1}\cdots\mathrm{d}x_n \tag{1-27}$$

上式说明了高维概率密度可以通过积分降低维数。式(1-18)是 $n=2,m=1$ 时的情况。

n 维随机变量相互统计独立的充要条件为：对于所有的 x_1，$x_2,\cdots,x_n$，满足

$$f_X(X_1,X_2,\cdots,X_n)=f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2)\cdots f_{X_n}(x_n)$$

$$=\prod_{i=1}^{n}f_{X_i}(x_i) \tag{1-28}$$

若 $n=2$，上式简化为式(1-24)。

1.1.2　随机变量的数字特征

随机变量的分布律反应了随机变量取值与概率对应关系。但在实际问题中，概率分布函数和概率密度函数需要大量的实验才能得到。有时候我们并不需要对随机变量进行完整的描述，只要知道随机变量统计规律的一些主要特征即可，这时可以引入随机变量的数字特征来描述它的统计特性。随机变量数字特征很多，主要有描述随机变量集中特性的，如数学期望；描述随机变量离散特性的，如方差以及描述随机变量的相关性的，如自相关函数等。

1. 数学期望

定义 1.2　数学期望。

数学期望又称统计平均，或者简称均值。它描述随机变量的集中特性，用 $E[X]$或 m_X 表示。如果 X 是离散的随机变量，则数学期望定义为

$$E[X]=m_X=\sum_{i=1}^{\infty}x_ip(X=x_i)=\sum_{i=1}^{\infty}x_ip_i \tag{1-29}$$

如果 X 是连续的随机变量

$$E[X]=m_X=\int_{-\infty}^{\infty}xf_X(x)\mathrm{d}x \tag{1-30}$$

同理，可以求 X 的函数的数学期望，即如果 $Y=g(X)$，则 Y 的数学期望公式为

$$E[Y]=m_Y=\sum_{i=1}^{\infty}g(x_i)p(X=x_i)=\sum_{i=1}^{\infty}g(x_i)p_i \tag{1-31}$$

$$E[Y]=m_Y=\int_{-\infty}^{\infty}g(x)f_X(x)\mathrm{d}x \tag{1-32}$$

根据数学期望的定义，数学期望具有如下性质：

性质 1 常数 C 的期望 $E[C]=C$

性质 2 对任意常数 $b,a_i(i=1,2,\cdots,n)$有

$$E\left[\sum_{i=1}^{n}a_iX_i+b\right]=\sum_{i=1}^{n}a_iE[X_i]+b \tag{1-33}$$

性质 3 若随机变量 X 和随机变量 Y 互不相关，则

$$E[XY]=E[X]E[Y] \tag{1-34}$$

性质 4 若 n 个随机变量$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$相互独立，则

$$E\left[\prod_{i=1}^{n}X_i\right]=\prod_{i=1}^{n}E[X_i] \tag{1-35}$$

2. 方差

定义 1.3 方差。

方差是用来度量随机变量偏离数学期望的程度，或者说是随机变量在数学期望附近的离散程度，用 $D[X]$或者 σ_x^2 表示。

对于离散的随机变量，方差计算公式为

$$D[X]=\sigma_X^2=E\{X-E[X]\}^2=\sum_{i=1}^{\infty}(x_i-E[X])^2P_i \tag{1-36}$$

对于连续的随机变量，方差计算公式为

$$D[X]=\sigma_X^2=E\{X-E[X]\}^2=\int_{-\infty}^{\infty}(x-E[X])^2f_X(x)\mathrm{d}x \tag{1-37}$$

方差开方后称为**均方差**或**标准差**，即 $\sigma_X=\sqrt{D[X]}$

随机变量的方差具有如下性质：

性质 1 常数 C 的方差为 $D[C]=0$

性质 2 $D[CX]=C^2D[X]$

性质 3 对于 n 个相互独立的随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 有

$$D[X_1+X_2+\cdots+X_n]=D[X_1]+D[X_2]+\cdots+D[X_n] \tag{1-38}$$

例 1-1　离散随机变量 X 由 0、1、2、3 四个样本组成，相当于四元通信中的四个电平，四个样本的取值概率顺序为 1/2、1/4、1/8 和 1/8，求随机变量的数学期望和方差。

解：根据离散随机变量的数学期望和方差定义得：

$$E[X]=\sum_{i=1}^{\infty}x_i p_i=0\times\frac{1}{2}+1\times\frac{1}{4}+2\times\frac{1}{8}+3\times\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$$

$$\begin{aligned}D[X]&=\sum_{i=1}^{\infty}(x_i-E[X])^2 p_i=\sum_{i=1}^{\infty}\left(x_i-\frac{7}{8}\right)^2 p_i\\&=\left(\frac{7}{8}\right)^2\times\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{8}\right)^2\times\frac{1}{4}+\left(\frac{9}{8}\right)^2\times\frac{1}{8}+\left(\frac{17}{8}\right)^2\times\frac{1}{8}\\&=\frac{71}{64}\end{aligned}$$

根据数学期望和方差的定义可以得到两者之间的关系为

$$E[X^2]=D[X]+E^2[X] \tag{1-39}$$

证明如下：

因为 $D[X]=E\{X-E[X]\}^2=E[X^2]-2E^2[X]+E^2[X]=E[X^2]-E^2[X]$

所以有 $E[X^2]=D[X]+E^2[X]$

例 1-2　已知高斯随机变量 X 的概率密度

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{\frac{-(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

求它的数学期望和方差。

解：根据数学期望和方差的定义

$$E[X]=\int_{-\infty}^{\infty}xf_X(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{\frac{-(x-m)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x$$

令 $t=\dfrac{x-m}{\sigma}$，$\mathrm{d}x=\sigma\mathrm{d}t$，代入上式并整理

$$E[X]=\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}te^{\frac{-t^2}{2}}\mathrm{d}t+\frac{m}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{\frac{-t^2}{2}}\mathrm{d}t=0+\frac{m}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{2\pi}=m$$