

数值分析

李庆扬 王能超 易大义

华中工学院出版社

数值分析

李庆扬 王能超 易大义

华中工学院出版社

数 值 分 析

李庆扬 王能超 易大义

华 中 工 学 院 出 版 社
(武昌喻家山)

湖 北 咸 宁 县 印 刷 厂 印 刷
华 中 工 学 院 出 版 社 出 版 发 行 部 发 行

1981年11月第一版 开本：850×1168 1/32

1981年11月第一次印刷 印张 18 页码 539

印数：0001—3000 字数 443,000

统一书号：13255.001 定价：2.00元

前 言

1980年7月在大连召开的工科院校“应用数学教学学术会议”，根据教育部工科院校“应用数学专业教学计划”制定了“数值分析”课大纲（84学时），并决定由清华大学、华中工学院和浙江大学合编试用教材。

本书就是遵照会议决定编写的，但考虑到不同方面读者的需要，内容比原订大纲略有增加。如学时较少，用*号标出的部分可以不讲。因而，除适用于理工科应用数学专业外，适当删减某些内容还可供理工科其他专业的研究生或高年级学生使用。本书亦可供从事科学计算的科技工作者参考。

本书共分九章，其中第一、二、三章由李庆扬编写，第四、五、六章由王能超编写，第七、八、九章由易大义编写。

1981年元月在杭州召开了本教材的审稿会，到会的有大连工学院、天津大学、同济大学、南京工学院、上海交通大学、东北工学院、北京工业大学、北京工业学院等院校的老师。他们放弃寒假休息，以极其认真负责的态度审阅了初稿，提出许多中肯意见，对提高本书质量起了很大作用。编者在此表示衷心感谢！

编 者

1981年4月

目 录

第一章	绪论	1
§ 1	数值分析的对象与特点.....	1
§ 2	误差来源与误差分析的重要性.....	2
§ 3	误差的基本概念.....	5
	3-1 误差与误差限 (5) 3-2 相对误差与相对误差限 (6) 3-3 有效数字 (7)	
§ 4	数值运算中误差分析的若干原则.....	10
	习题.....	15
第二章	插值法	18
§ 1	引言.....	18
§ 2	拉格朗日插值.....	20
	2-1 插值多项式的存在唯一性 (20) 2-2 线性插值与抛物插值 (21) 2-3 拉格朗日插值多项式 (25) 2-4 插值余项 (26)	
§ 3	埃特金逐步插值与牛顿插值公式.....	30
	3-1 埃特金逐步插值 (30) 3-2 均差与牛顿插值公式 (33) 3-3 牛顿插值多项式余项 (35)	
§ 4	差分与等距节点插值公式.....	37
	4-1 差分及其性质 (37) 4-2 等距节点插值公式 (40)	
§ 5	埃尔米特插值.....	43
* § 6	插值过程的收敛性与稳定性.....	47
§ 7	分段线性插值.....	54
§ 8	分段三次埃尔米特插值.....	57
§ 9	三次样条插值.....	60
	9-1 三次样条函数 (61) 9-2 三转角方程 (62) 9-3 三弯矩 方程 (66) 9-4 计算步骤与例题 (67)	
* § 10	三次样条插值的稳定性与收敛性.....	68

习题	75
第三章 函数逼近与计算	80
§ 1 引言与预备知识	81
1—1 问题的提出 (80) 1—2 维尔斯特拉斯定理 (81) 1—3 连续函数空间 $C[a, b]$ (83)	
§ 2 最佳一致逼近多项式	84
*2—1 最佳一致逼近多项式的存在性 (84) 2—2 切比雪夫定理 (87)	
2—3 最佳一次逼近多项式 (90) *2—4 里米兹算法 (92)	
§ 3 切比雪夫多项式	93
3—1 切比雪夫多项式定义与性质 (94) *3—2 拉格朗日插值余项的极小化 (99) 3—3 幂级数项数的节约 (102)	
§ 4 最佳平方逼近	104
4—1 预备知识 (105) 4—2 函数的最佳平方逼近 (109) 4—3 用正交函数族作平方逼近 (112)	
§ 5 正交多项式	114
5—1 勒让德多项式 (115) 5—2 用勒让德多项式作平方逼近 (119) 5—3 其他常用的正交多项式 (121)	
§ 6 函数按切比雪夫多项式展开	122
§ 7 曲线拟合的最小二乘法	126
7—1 什么是最小二乘法 (126) 7—2 用正交函数作最小二乘拟合 (135)	
* § 8 离散富氏变换及其快速算法	138
8—1 三角函数插值与离散富氏变换 (138) 8—2 频谱分析与频率数字滤波 (141) 8—3 快速富氏变换 (FFT) (144)	
习题	153
第四章 数值积分与数值微分	158
§ 1 引言	158
1—1 数值求积的基本思想 (158) 1—2 代数精度的概念 (160) 1—3 插值型的求积公式 (161)	
§ 2 牛顿—柯特斯公式	163

	2—1 柯特斯系数 (163)	2—2 偶阶求积公式的代数精度 (166)	2—3 几种低阶求积公式的余项 (168)	2—4 复化求积法及其收敛性 (169)
§ 3	龙贝格算法	1 7 4	3—1 梯形法的递推化 (174)	3—2 龙贝格公式 (176)
			3—3 李查逊外推加速法 (179)	3—4 梯形法的余项展开式 (182)
§ 4	高斯公式	1 8 7	4—1 问题的提出 (187)	4—2 高斯点 (190)
			4—3 高斯-勒让德公式 (192)	4—4 高斯公式的余项 (193)
			4—5 高斯公式的收敛性与稳定性 (194)	*4—6 带权的高斯公式 (198)
* § 5	样条求积	2 0 0		
§ 6	数值微分	2 0 3	6—1 中点方法 (203)	6—2 中点方法的加速 (206)
			6—3 插值型的求导公式 (207)	6—4 实用的五点公式 (210)
				*6—5 样条求导 (212)
第五章	常微分方程数值解法	2 2 0		
§ 1	引言	2 2 0		
§ 2	尤拉方法	2 2 1	2—1 尤拉公式 (221)	2—2 后退的尤拉公式 (223)
			2—3 梯形公式 (226)	2—4 改进的尤拉公式 (227)
			2—5 尤拉两步公式 (229)	
§ 3	龙格-库塔方法	2 3 2	3—1 台劳级数法 (232)	3—2 龙格-库塔方法的基本思想 (234)
			3—3 二阶龙格-库塔方法 (235)	3—4 三阶龙格-库塔方法 (237)
			3—5 四阶龙格-库塔方法 (240)	3—6 变步长的龙格-库塔方法 (243)
§ 4	单步法的收敛性和稳定性	2 4 5	4—1 单步法的收敛性 (245)	4—2 单步法的稳定性 (248)
§ 5	线性多步法	2 5 2	5—1 基于数值积分的构造方法 (252)	5—2 亚当姆斯显式公式 (254)
			5—3 亚当姆斯隐式公式 (255)	5—4 亚当姆斯预测-校正系统 (257)
			5—5 基于台劳展开的构造方法 (261)	5—6 米尔尼公式 (264)
			5—7 哈明公式 (265)	
* § 6	多步法的收敛性和稳定性	2 6 6	6—1 线性差分方程解的结构 (266)	6—2 多步法的稳定性 (268)
			6—3	

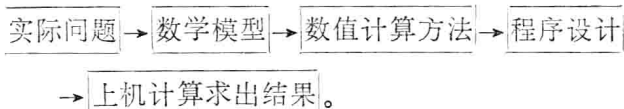
	多步法的收敛性 (271)	
§ 7	方程组与高阶方程的情形.....	273
	7—1 一阶方程组(273) *7—2 刚性方程组的概念 (275) 7—3 化高阶方程为一阶方程组 (278) 7—4 特殊的二阶方程 (280)	
§ 8	边值问题的数值方法.....	282
	8—1 试射法 (282) 8—2 差分方程的建立 (283) 8—3 差分问题的可解性 (286) 8—4 差分方法的收敛性 (287)	
第六章	方程求根	294
§ 1	根的搜索.....	294
	1—1 逐步搜索法 (294) 1—2 二分法 (295) 1—3 比例求根法 (298)	
§ 2	迭代法.....	300
	2—1 迭代过程的收敛性 (300) 2—2 迭代公式的加工 (307)	
§ 3	牛顿法.....	310
	3—1 牛顿公式 (310) 3—2 牛顿法的几何解释 (312) 3—3 牛顿法的局部收敛性 (313) 3—4 牛顿法应用举例 (315) 3—5 牛顿下山法 (317) 3—6 方程组的牛顿法 (319)	
§ 4	弦截法与抛物线法.....	322
	4—1 弦截法 (322) 4—2 抛物线法 (328)	
§ 5	代数方程求根.....	331
	5—1 多项式求值的秦九韶算法 (331) 5—2 代数方程的牛顿法(333) 5—3 劈因子法 (534)	
第七章	解线性代数方程组的直接法	342
§ 1	引言.....	342
§ 2	高斯消去法.....	344
	2—1 高斯消去法 (344) 2—2 矩阵的三角分解 (352) 2—3 计算量 (255)	
§ 3	高斯主元素消去法.....	356
	3—1 完全主元素消去法 (358) 3—2 列主元素消去法 (361) 3—3 高斯—约当方法求逆矩阵 (362)	
§ 4	高斯消去法的变形.....	368
	4—1 直接三角分解法(363) 4—2 平方根法(376) 4—3 追赶法 (384)	

§ 5	向量和矩阵的范数	3 8 8
§ 6	误差分析	3 9 8
	6—1 矩阵的条件数 (398) 6—2 舍入误差 (407)	
第八章	解线性方程组的迭代法	4 2 0
§ 1	引言	4 2 0
§ 2	雅可比迭代法与塞德尔迭代法	4 2 4
	2—1 雅可比迭代法 (424) 2—2 塞德尔迭代法 (425)	
§ 3	迭代法的收敛性	4 2 8
§ 4	解线性代数方程组的逐次超松弛法	4 3 8
* § 5	解线性代数方程组的梯度法	4 4 8
	5—1 最速下降法 (448) 5—2 共轭梯度法 (452)	
第九章	矩阵的特征值与特征向量计算	4 7 5
§ 1	引言	4 7 5
§ 2	幂法及反幂法	4 7 8
	2—1 幂法 (478) 2—2 加速方法 (486) 2—3 反幂法 (491)	
§ 3	雅可比方法	4 9 6
	3—1 引言 (496) 3—2 Jacob方法 (498) 3—3 Jacobi过关法 (508)	
§ 4	豪斯荷尔德方法	5 1 0
	4—1 初等反射阵及性质 (510) 4—2 用正交相似变换约化矩阵 (515)	
§ 5	对称三对角矩阵的特征值计算	5 2 4
	5—1 序列 $\{f_k(\lambda)\}$ 是一个sturm序列 (525) 5—2 求对称三对角阵的特征值的二分法 (529)	

第一章 绪 论

§ 1 数值分析的对象与特点

数值分析是研究各种数学问题求解的数值计算方法。在电子计算机成为数值计算的主要工具以后，则要求研究适合于计算机使用的数值计算方法。为了更具体地说明数值分析的研究对象，我们考察用计算机解决科学计算问题时经历的几个过程：



由实际问题的提出到上机求得问题解答的整个过程都可看作应用数学的任务。如果细分的话，由实际问题应用有关科学知识和数学理论建立数学模型这一过程，通常作为应用数学的任务。从根据数学模型提出求解的数值计算方法直到编出程序上机算出结果，这一过程则是计算数学的任务，这也就是数值分析研究的对象。因此，数值分析就是研究用计算机解决数学问题的数值计算方法及其理论。数值分析的内容，例如，积分数值计算，函数逼近与计算，方程求根数值解法，微分方程数值解法等，都是以数学问题为研究对象的。可见，数值分析也是数学的一个分支，只是它不像纯数学那样只研究数学本身的理论，而着重研究求解的数值方法及与此相关的理论，包括方法的收敛性、稳定性及误差分析，还要根据计算机特点研究计算时间最省（或计算费用最省）的计算方法。有的方法在理论上虽不够严格，但通过实际计算、对比分析等手段，被证明是行之有效的方法，也可采用。因

此，数值分析既有纯数学高度抽象性与严密科学性的特点，又有应用的广泛性与实际试验的高度技术性的特点，是一门与使用计算机密切结合的实用性很强的数学课程。下面再举例说明。

例如，很多科学技术问题都需求线性代数方程组的解，而在“线性代数”课中只介绍求解方程组的一般理论和精确解法。但实际问题要解的方程未知量有时为几百个或几千个，有的甚至多达十几万个，且方程系数为零的个数很少，显然“线性代数”中介绍的理论和方法是不能解决这类问题的，还必须根据方程特点，研究适合于计算机使用的、计算量较省的求解方法及有关理论，为保证能在机器上算出正确答案，通常还应根据计算机容量、速度、字长等指标，研究具体求解的计算步骤及程序设计技巧，有时还要通过试验才能定出最好的计算方案。这些都是“数值分析”要研究的问题，由此也可看到它与数学基础的关系。

根据“数值分析”的特点，学习时我们首先要注意掌握方法的基本原理和思想，要注意方法处理的技巧及其与计算机的结合，要重视误差分析、收敛性及稳定性的基本理论；其次，要通过例子，学习使用各种数值方法解决实际计算问题；最后，为了掌握本课的内容，还应做一定数量的理论与计算练习。由于本课内容包括了微积分，代数，常微分方程的数值方法，读者必须掌握这几门课的基本内容才能学好这一课程。

§ 2 误差来源与误差分析的重要性

用计算机解决科学计算问题首先要建立数学模型，它是对被描述的实际问题进行抽象、简化而得到的，因而是近似的。我们把数学模型与实际问题之间出现的这种误差称为**模型误差**。只有实际问题提法正确，建立数学模型时又抽象、简化得合理，才能得到好的结果。由于这种误差难于用数量表示，通常都假定数学

模型是合理的,这种误差可忽略不计,在“数值分析”中不讨论它。在数学模型中往往还有一些根据观测得到的物理量,如温度、长度、电压等等,这些参量显然也包含误差,这种由观测产生的误差称为**观测误差**,在“数值分析”中也不讨论这种误差。数值分析只研究用数值方法求解数学模型产生的误差。

当数学模型不能得到精确解时,通常要用数值方法求它的近似解,其近似解与精确解之间的误差称为**截断误差**或**方法误差**。例如,用 $f(x)$ 的**台劳**(Taylor)展开式部分和 $S_n(x)$ 近似函数 $f(x)$,其余项 $R_n(x)$ 就是真值 $f(x)$ 的截断误差。有了求解数学问题的计算公式以后,用计算机做数值计算时,由于计算机位数有限,用有限位进行计算,对超过位数的数字就要进行舍入,由此产生的误差称为**舍入误差**。例如,用3.1416作 π 的近似值产生的误差就是舍入误差。此外,在有的计算公式中初始值的误差对计算结果有很大影响,由初值引起的误差称为**初值误差**。因此,“数值分析”中除了研究求解数学问题的计算方法外,还要研究计算结果的误差是否满足精度要求,这就是误差估计问题。本书主要讨论方法的截断误差,对舍入误差及初值误差只做一些定性分析。

例1 计算 $I_n = e^{-1} \int_0^1 x^n e^x dx \quad (n=0,1,\dots)$ 并估计误差。

由分部积分可得计算 I_n 的递推公式

$$I_n = 1 - nI_{n-1} \quad (n=1,2,\dots) \quad (2.1)$$

$$I_0 = e^{-1} \int_0^1 e^x dx = 1 - e^{-1}$$

若计算出 I_0 ,代入(2.1),可逐次求出 I_1, I_2, \dots 的值。要算出 I_0 就要先计算 e^{-1} ,若用台劳展开部分和

$$e^{-1} \approx 1 + (-1) + \frac{(-1)^2}{2!} + \dots + \frac{(-1)^k}{k!}$$

并取 $k=7$,用4位小数计算,则得 $e^{-1} \approx 0.3679$,截断误差 $R_7 = |e^{-1} - 0.3679| \leq \frac{1}{8!} < \frac{1}{4} \times 10^{-4}$ 计算过程中小数点后第5

位的数字按四舍五入原则舍入，由此产生的舍入误差这里先不讨论。当初值 I_0 取为 $I_0 \approx 0.6321 = \tilde{I}_0$ 时，用 (2,1) 递推的计算公式为

$$(A) \begin{cases} \tilde{I}_0 = 0.6321 \\ \tilde{I}_n = 1 - n\tilde{I}_{n-1} \end{cases} \quad (n=1, 2, \dots)$$

计算结果见表1-1的 I_n 列。用 \tilde{I}_0 近似 I_0 产生的误差 $E_0 = I_0 - \tilde{I}$ 就是初值误差，它对后面计算结果是有影响的。

表1-1

n	\tilde{I}_n (用(A)算)	I_n^* (用(B)算)	n	\tilde{I}_n (用(A)算)	I_n^* (用(B)算)
0	0.6321 ↓	0.6321	5	0.1460 ↓	0.1455
1	0.3679	0.3679	6	0.1120	0.1268
2	0.2642	0.2643	7	0.2160	0.1121
3	0.2074	0.2073	8	-0.728	0.1035
4	0.1704	0.1708 ↑	9	6.824	0.0684 ↑

从表中看到 \tilde{I}_n 出现负值，这与一切 $I_n > 0$ 相矛盾。实际上，由积分估值得

$$\frac{e^{-1}}{n+1} = e^{-1} (\min_{0 < x < 1} e^x) \int_0^1 x^n dx < I_n < e^{-1} (\max_{0 < x < 1} e^x) \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1} \quad (2.2)$$

因此，当 n 较大时用 \tilde{I}_n 近似 I_n 显然是不正确的。这里计算公式与每步计算都是正确的，那么什么原因使计算错误呢？主要就是初值 \tilde{I}_0 有误差 $E_0 = I_0 - \tilde{I}_0$ ，由此引起以后各步计算的误差 $E_n = I_n - \tilde{I}_n$ ，它满足关系

$$E_n = -nE_{n-1} \quad (n=1, 2, \dots)$$

容易推得

$$\Gamma_n = (-1)^{(n!)} E_0$$

这说明 \tilde{I}_0 有误差 E_0 ，则 \tilde{I}_n 就是误差 E_0 的 $n!$ 倍误差，例如， $n=8$ ，若 $|E_0| = \frac{1}{2} \times 10^{-4}$ ，则 $|E_8| = 8! \times |E_0| > 2$ ，这就说明 \tilde{I}_8 完全不能近似 I_8 了。

如果我们用新的计算方案，由 (2.2) 取 $n=9$ ，

$$\frac{e^{-1}}{10} < I_9 < \frac{1}{10}$$

若粗略取 $I_9 \approx \frac{1}{2} \left(\frac{1}{10} + \frac{e^{-1}}{10} \right) = 0.0684 = I_9^*$ ，然后将公式 (2.1)

倒过来算，即由 I_9^* 算出 I_8^* ， I_7^* ， \dots ， I_0^* ，公式为

$$(B) \begin{cases} I_9^* = 0.0684 \\ I_{n-1}^* = \frac{1}{n} (1 - I_n^*) \end{cases} \quad (n=9, 8, \dots, 1)$$

计算结果见表 1-1 的 I_n^* 列。我们发现 I_0^* 与 I_0 的误差不超过 10^{-4} 因 $|E_0^*| = \frac{1}{n!} |E^*|$ ， E_0^* 误差比 E_n^* 缩小 $n!$ 倍。因此，尽管 E_9^* 较大，但由于误差逐步缩小，故可用 I_0^* 近似 I_0 。反之，当用方案 (A) 计算时，尽管初值 \tilde{I}_0 相当准确，由于误差传播是逐步扩大的，因而计算结果不可靠。（这个例子说明，在数值计算中如不注意误差分析，用了类似方案 (A) 的计算公式，就会出现“差之毫厘，失之千里”的错误结果。因此，尽管数值计算中估计误差比较困难，我们仍应重视计算过程的误差分析。

§ 3 误差的基本概念

3-1 误差与误差限。

定义 1 设 x 为准确值， x^* 为 x 的一个近似值，称 $e^* = x^* - x$ 为近似值的**绝对误差**，简称**误差**。

注意这样定义的误差 e^* 可正可负，故绝对误差不是误差绝对值。当绝对误差为正时近似值偏大，叫**强近似值**；当绝对误差为

负时近似值偏小，叫**弱近似值**。

通常我们不能算出准确值 x ，也不能算出误差 e^* 的准确值，只能根据量测工具或计算情况估计出误差的绝对值不超过某正数 ϵ^* ，也就是误差绝对值的一个上界， ϵ^* 叫做近似值的**误差限**，它总是正数。例如，用毫米刻度的米尺测量一长度 x ，读出和该长度接近的刻度 x^* ， x^* 是 x 的近似值，它的误差限是0.5毫米，于是 $|x^* - x| \leq 0.5$ 毫米，如读出的长度为765毫米，则有 $|765 - x| \leq 0.5$ 。从这不等式我们仍不知道准确的 x 是多少，但知 $764.5 \leq x \leq 765.5$ ，说明 x 在区间 $[764.5, 765.5]$ 内。

对于一般情形 $|x^* - x| \leq \epsilon^*$ ，即

$$x^* - \epsilon^* \leq x \leq x^* + \epsilon^*$$

这个不等式有时也表示为

$$x = x^* \pm \epsilon^*$$

例如，真空中光速 C 的最好近似值是

$$C^* = 2.997925 \times 10^{10} \text{ 厘米/秒}$$

其误差限为

$$\epsilon^* = 0.000001 \times 10^{10} \text{ 厘米/秒}$$

通常记为

$$C = (2.997925 \pm 0.000001) \times 10^{10} \text{ 厘米/秒}。$$

3-2 相对误差与相对误差限

误差限的大小还不能完全表示近似值的好坏。例如，有两个量：

$$x = 10 \pm 1, \quad y = 1000 \pm 5, \quad \text{则}$$

$$x^* = 10, \quad \epsilon_{x^*} = 1, \quad y^* = 1000, \quad \epsilon_{y^*} = 5$$

虽然 ϵ_{y^*} 比 ϵ_{x^*} 大4倍，但 $\epsilon_{y^*}/y^* = \frac{5}{1000} = 0.5\%$ 比 $\epsilon_{x^*}/x^* = \frac{1}{10}$

$= 10\%$ 要小得多，这说明 y^* 近似 y 的程度比 x^* 近似 x 的程度要好得多。所以，除考虑误差的大小外，还应考虑准确值 x 本身的大

小。我们把近似数的误差 e^* 与准确值 x 的比值

$$\frac{e^*}{x} = \frac{x^* - x}{x}$$

称为近似数 x^* 的**相对误差**，记作 e_r^* 。

在实际计算中，由于真值 x 总是不知道的，通常取

$$e_r^* = \frac{e^*}{x^*} = \frac{x^* - x}{x^*}$$

作为 x^* 的相对误差，条件是 $e_r^* = \frac{e^*}{x^*}$ 较小，此时

$$\frac{e^*}{x} - \frac{e^*}{x^*} = \frac{e^*(x^* - x)}{x^*x} = \frac{(e^*)^2}{x^*(x^* - e^*)} = \frac{(e^*/x^*)^2}{1 - (e^*/x^*)}$$

是 e_r^* 的平方项级，故可忽略不计。

相对误差也可正可负，它的绝对值上界叫做**相对误差限**，

记作 ε_r^* ： $\varepsilon_r^* = \frac{\varepsilon^*}{|x^*|}$ 。

据定义，上例 $\frac{\varepsilon_x^*}{|x^*|} = 10\%$ 与 $\frac{\varepsilon_y^*}{|y^*|} = 0.5\%$ 分别为 x 与 y 的

相对误差限，可见 y^* 近似 y 的程度比 x^* 近似 x 的程度好。

注意相对误差与相对误差限是无量纲的，而绝对误差与误差限是有量纲的。例如，光速 $C = (2.997925 \pm 0.000001) \times 10^{10}$ 厘米/秒 误差限 $e^* = 0.000001 \times 10^{10}$ 厘米/秒，有量纲厘米/秒，而

相对误差限 $\varepsilon_r^* = \frac{0.000001}{2.997925} < 0.0000004$ 是无量纲的。

—3 有效数字

当准确值 x 有多位数时，常常按**四舍五入**原则得到 x 的前几位近似值 x^* ，例如

$$x = \pi = 3.14159265\dots$$

$$\text{取3位 } x_3^* = 3.14 \quad \varepsilon_3^* \leq 0.002$$

$$\text{取5位 } x_5^* = 3.1416 \quad \varepsilon_5^* \leq 0.00008$$

它们的误差都不超过末位数字的半个单位，即

$$|\pi - 3.14| \leq \frac{1}{2} \times 10^{-2}, |\pi - 3.1416| \leq \frac{1}{2} \times 10^{-4}$$

若近似值 x^* 的误差限是某一位的半个单位，该位到 x^* 的第一位非零数字共有 n 位，我们就说 x^* 有 n 位有效数字。如取 $x^* = 3.14$ 作 π 的近似值， x^* 就有3位有效数字；取 $x^* = 3.1416$ 作 π 的近似值， x^* 就有5位有效数字。 x^* 有 n 位有效数字可写成标准形式

$$x^* = \pm 10^m \times (a_1 + a_2 \times 10^{-1} + \dots + a_n \times 10^{-(n-1)}) \quad (3.1)$$

其中， a_1 是1到9中的一个数字， a_2, \dots, a_n 是0到9中的一个数字， m 为整数，且

$$|x - x^*| \leq \frac{1}{2} \times 10^{n-1+m} \quad (3.2)$$

例2 按四舍五入原则写出下列各数具有5位有效数字的近似数：

187.9325, 0.03785551, 8.000033, 2.7182818

按定义上述各数具有5位有效数字的近似数分别是

187.93, 0.037856, 8.0000, 2.7183

注意 $x = 8.000033$ 的5位有效数字近似数是8.0000而不是8，因为8只有1位有效数字。

例3 重力常数 g ，如果以米/秒²为单位 $g \approx 9.80$ 米/秒²，若以千米/秒²为单位 $g \approx 0.00980$ 千米/秒²，它们都具有3位有效数字。因为，按第一种写法

$$|g - 9.80| \leq \frac{1}{2} \times 10^{-2}$$

按定义(3.1)这里 $m = 0, n = 3$ ，按第二种写法

$$|g - 0.00980| \leq \frac{1}{2} \times 10^{-5}$$

这里 $m = -3, n = 3$ 。它们虽然写法不同，但都具有3位有效数字。至于绝对误差限则由于单位不同结果也不同， $\varepsilon_1^* = \frac{1}{2} \times 10^{-2}$ 米/秒， $\varepsilon_2^* = \frac{1}{2} \times 10^{-5}$ 千米/秒²，而相对误差都是

$$\varepsilon_r^* = \frac{0.005}{9.80} = \frac{0.000005}{0.00980}$$