模糊数学及其应用

■金长泽/编

吉林教育出版

模糊数学及其应用

金长泽　编

吉林教育出版社

模糊数学及其应用　　金长泽　编

责任编辑：白国才　阙家栋　　封面设计：张庆平

出版：吉 林 教 育 出 版 社　787×1092毫米32开本6.75印张　145 000字
1991年12月第1版　1991年12月第1次印刷
发行：吉 林 省 新 华 书 店　印数：1—2 507册　定价：2.50元
印刷：长春市第十一印刷厂　ISBN　7-5383-1497-0／G·1317

前　言

模糊数学是一门崭新的数学学科。它的产生不仅拓广了经典数学的数学基础，而且是使计算机科学向人们的自然机理方面发展的重大突破。它在科学技术、经济发展和社会学等问题的广泛应用领域中，显示出了巨大的力量。它虽然只有二十多年的历史，但已被国内外数学界以及信息、系统、计算机和自动控制科学人员的普遍关注，它是正在迅速发展中的有着广阔应用前景的一门崭新学科。

本书是在东北师大数学系开设《模糊数学》选修课使用过多遍的基础上改编而成。作为模糊数学最基本的内容是本书的第二、三两章。第一章是预备知识。第四章是模糊数学常用方法的具体应用的举例。第五章扼要介绍了经典数学几个分支的模糊化理论。本书在叙述上尽力作到条理清晰，深入浅出，易于理解，便于自学，并使有一定高等数学基础的读者可以无师自通。对于初学的读者略去带 * 号的几节，并不影响对全书基本内容的理解与掌握。

感谢东北师大数学系的领导和函授教研室的同志们的鼓励与支持。特别要感谢张同君同志和吉林教育出版社的同志们所付出的辛勤劳动。

由于笔者才疏学浅，缺点错误在所难免，恳请读者批评指正。

金长泽

1989. 6. 30

目　录

第一章　集论初步……………………………… 1

§1.1　概念与运算……………………………… 1

§1.2　映射与关系……………………………… 5

§1.3　序与格……………………………………… 8

§1.4　同态与同构……………………………… 14

第二章　模糊集合……………………………… 20

§2.1　模糊集的概念…………………………… 20

§2.2　模糊集的运算…………………………… 30

§2.3　分解定理………………………………… 42

§2.4　扩张原理………………………………… 49

§2.5　凸模糊集与模糊数……………………… 56

*§2.6　表现定理………………………………… 63

*§2.7　L—模糊集 ……………………………… 71

第三章　模糊关系……………………………… 81

§3.1　模糊关系………………………………… 81

§3.2　模糊矩阵………………………………… 89

§3.3　模糊关系方程…………………………… 96

§3.4　模糊函数…………………………………103

§3.5　模糊度与贴近度…………………………109

第四章　模糊数学常用的方法…………………122

§4.1　模糊模式识别……………………………122

§4.2　模糊聚类分析……………………………129

§4.3 模糊综合评判……………………………………136
§4.4 模糊规划……………………………………………145
§4.5 模糊系统……………………………………………151
第五章 经典数学模糊化简介………………………170
§5.1 模糊测度……………………………………………170
§5.2 模糊概率……………………………………………175
§5.3 模糊逻辑……………………………………………184
*§5.4 模糊拓扑……………………………………………190

第一章　集论初步

自从19世纪末，康托(Cantor)引入集合观点以后，集合的理论即迅速地渗入到数学的许多部门，并成为近代数学的基础。集合论本身现已成为一门独立的数学分支。本章的内容是经典集合论的初步知识，它是学习模糊数学所必备的基础。

§1.1　概念与运算

集合是现代数学中的一个最基本的概念，就象几何中的“点”和“直线”一样，不能用更简单的概念来定义它。好在“集合”这个概念在日常生活和数学中是经常遇到的，人们对它并不陌生，所以我们只给出一种比较恰当的描述。

关于集合我们给予描述如下：凡是具有某种特殊性质的，确定的事物的全体就是一个**集合**(或简称**集**)。构成集合的事物叫做集合的**元素**或**元**，通常用大写字母A，B，C，…，X，Y，Z等表示集合，而用小写字母a，b，c，…，x，y，z等表示元。当元a属于集合A时，记为$a\in A$；当元a不属于集合A时，记为$a\notin A$或$a\,\overline{\in}\,A$。

元a与集A的关系只有两种可能，要么$a\in A$，要么$a\notin A$，两者必居其一，但不可得兼。即所谓的“非此即彼”。

为了以后讨论的方便，我们引用如下一些符号：

“$\forall x\in A$”表示“集A中的任意一个元x”；

“$\exists x \in A$”表示“集A中存在某一个元x”；

设P、Q是两个命题，

“$P \Longrightarrow Q$”表示“若P成立，则Q成立”；

“$P \Longleftrightarrow Q$”表示“当且仅当P成立时Q成立”；

“$P(x)$”表示“关于x的命题或x具有性质P”；

“$A=\{x|P(x)\}$”表示“具有性质P的x所构成的集”。

常用的一些名词和述语如下：

不含任何元素的集称为**空集**，记为Φ。

含有限个元素的集称为**有限集**，记为

$$A=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}.$$

非有限集称为**无限集**。

仅含一个元a的集称为**单元素集**，记为$\{a\}$，a与$\{a\}$的意义是不同的，他们之间的关系是$a \in \{a\}$。

设A，B是二集合，若属于A的元素都属于B，则称**A包含于B或称B包含A**，记作$A \subseteq B$或$B \supseteq A$。

若A包含于$B(A \subseteq B)$，则称A为B的**子集**。若$A \subseteq B$且$B \subseteq A$，则称A与B**相等**，记为$A=B$(否则，$A \neq B$)。若$A \subseteq B$，但$A \neq B$，则称B**真包含**于A，记为$A \subsetneqq B$或$B \supsetneqq A$，并称A是B的**真子集**。

作为对象被考虑的所有元的全体称为**论域**，通常以大写字母U，V或X，Y表示。

设U是论域，由U的所有子集为元素而构成的集称为U的**幂集**，记为$P(U)$。Φ与U是U的两个特殊子集，称为U的**平凡子集**。

设U为论域，A，B，$C \in P(U)$，定义集的运算如下：

由A和B中的元的全体所构成的集称为A与B的**并集**，记

为$A\cup B$，即$A\cup B=\{u|u\in A$或$u\in B\}$。

由A和B中的公共元所构成的集称为A与B的**交集**，记为$A\cap B$，即$A\cap B=\{u|u\in A$且$u\in B\}$。

由属于A但不属于B的元所构成的集称为A与B的**差集**，记为$A\setminus B$，即$A\setminus B=\{u|u\in A$且$u\notin B\}$。

由论域U中不属于A的元所构成的集称为**A在U中的补集**，记为$U\setminus A=A^c$。当$B\subseteq A$，称$A\setminus B$为**B在A中的补集**。

集的并、交、差、补运算如图1.1—1表示：

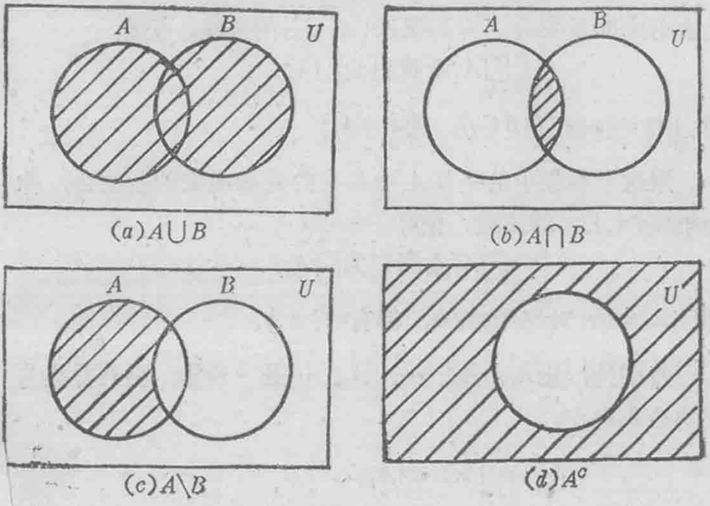

图 1.1—1 (a) $A\cup B$, (b) $A\cap B$, (c) $A\setminus B$, (d) A^c

定理1.1.1 设A，B，$C\subseteq P(U)$，其并、交、补运算具有如下性质：

1° **幂等律** $A\cup A=A$，$A\cap A=A$；

2° **交换律** $A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$；

3° **结合律** $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，

$$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C);$$

4°　分配律　$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$,

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C);$$

5°　吸收律　$A\cap(A\cup B)=A$，$A\cup(A\cap B)=A$；

6°　0—1律　$A\cup\Phi=A$，$A\cap\Phi=\Phi$，$A\cap U=A$；

7°　互补律　$A\cup A^c=U$，$A\cap A^c=\Phi$；

8°　对偶律　$(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$，$(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$；

9°　复原律　$(A^c)^c=A$。

设$\{A_\alpha\}_{\alpha\in D}$是任意集族，用这个集族中的一切$A_\alpha$的所有元素组成的新集合，称为集族$\{A_\alpha\}_{\alpha\in D}$的**并集**，记作

$$\bigcup_{\alpha\in D}A_\alpha\text{或简记为}\bigcup A_\alpha$$

即$\bigcup\limits_{\alpha\in D}A_\alpha=\{x\,|\,$存在$\beta\in D$，使$x\in A_\beta\}$

用这个集族中的一切A_α所共有的元素组成的新集合，称为集族$\{A_\alpha\}_{\alpha\in D}$的**交集**，记作

$$\bigcap_{\alpha\in D}A_\alpha\text{或简记为}\bigcap A_\alpha,$$

即$\bigcap\limits_{\alpha\in D}A_\alpha=\{x\,|\,$对每个$\alpha\in D$，都有$x\in A_\alpha\}$.

特别地，设A_1，A_2，…，A_n，…是一列集，则其并集与交集分别记作：

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n,\quad\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n$$

定理1.1.2　设$\{A_\alpha\}_{\alpha\in E}$，$\{B_\beta\}_{\beta\in F}$是二集族，则

1°　$\bigcup\limits_{\substack{\alpha\in E\\ \beta\in F}}(A_\alpha\cup B_\beta)=(\bigcup\limits_{\alpha\in E}A_\alpha)\cup(\bigcup\limits_{\beta\in F}B_\beta)$,

$\bigcap\limits_{\substack{\alpha\in E\\ \beta\in F}}(A_\alpha\cap B_\beta)=(\bigcap\limits_{\alpha\in E}A_\alpha)\cap(\bigcap\limits_{\beta\in F}B_\beta)$;

2°　$A\cap(\bigcup\limits_{\beta\in F}B_\beta)=\bigcup\limits_{\beta\in F}(A\cap B_\beta)$,

$$A\bigcup\left(\bigcap_{\beta\in F}B_\beta\right)=\bigcap_{\beta\in F}\left(A\bigcup B_\beta\right);$$

3° $$\bigcup_{\substack{\alpha\in E\\ \beta\in F}}\left(A_\alpha\bigcap B_\beta\right)=\left(\bigcup_{\alpha\in E}A_\alpha\right)\bigcap\left(\bigcup_{\beta\in F}B_\beta\right),$$

$$\bigcap_{\substack{\alpha\in E\\ \beta\in F}}\left(A_\alpha\bigcup B_\beta\right)=\left(\bigcap_{\alpha\in E}A_\alpha\right)\bigcup\left(\bigcap_{\beta\in F}B_\beta\right);$$

4° $$\left(\bigcup_{\alpha\in E}A_\alpha\right)^c=\bigcap_{\alpha\in E}A_\alpha^C,$$

$$\left(\bigcap_{\alpha\in E}A_\alpha\right)^c=\bigcup_{\alpha\in E}A_\alpha^C.$$

§1.2 映射与关系

给定集X和Y，若有一对应法则，使得对于集X中任一元x，有Y中唯一元y与之对应，则称此对应法则f为从X到Y的映射，记为

$$f:X\to Y.$$

并称X为映射f的定义域。又定义

$$f(X)=\{f(x)\mid x\in X\}\subset Y,$$

则称$f(X)$为f的值域。

1° 若$f(X)=Y$，则称f为满射或全射；

2° 若$f(x_1)=f(x_2)$，则$x_1=x_2$，称f为单射；

3° 若f既是单射又是满射，则称f为双射或满单射；

4° 若f为双射，由$y=f(x)$确定Y到X的映射，称为f的逆映射，记为f^{-1}；

5° 若$X=Y$，且$\forall x\in X$，$f(x)=x$，则称f为由X到X的恒等映射，记为1_x或e_x；

6° 设f：$X\to Y$，g：$Y\to Z$，定义映射h：$X\to Z$，

$$h(x)=g(f(x)),\ \forall x\in X,$$

称h为f与g的合成映射，记为$h=g\circ f$；

若f：$X\to Y$，g：$Y\to Z$；h：$Z\to W$，则

$$(h\circ g)\circ f\text{：}X\to W\text{且}(h\circ g)\circ f=h\circ(g\circ f)\text{；}$$

7° 设f：$X\to Y$，$A\in P(X)$令

$$f^*(A)=\{f(x)\mid x\in A\}\subseteq P(Y),$$

从而f^*：$P(X)\to P(Y)$，称f^*为由f诱导出来的集射，仍将f^*记为f.

定理1.2.1 设X，Y为任二集，若A，$B\in P(X)$，f：$X\to Y$，则

1° $A\subseteq B\Longrightarrow f(A)\subseteq f(B)$；

2° $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$；

3° $f(A\cap B)\subseteq f(A)\cap f(B)$；

4° $f(A\setminus B)\supseteq f(A)\setminus f(B)$.

定理1.2.2. 设X，Y为任二集，若$\{A_\alpha\}_{\alpha\in D}\subseteq P(X)$；$\{B_\beta\}_{\beta\in F}\subseteq P(Y)$，$f$：$X\to Y$，则

1° $f(\bigcup\limits_{\alpha\in D}A_\alpha)=\bigcup\limits_{\alpha\in D}f(A_\alpha)$；

2° $f(\bigcap\limits_{\alpha\in D}A_\alpha)\subseteq\bigcap\limits_{\alpha\in D}f(A_\alpha)$；

3° $f^{-1}(\bigcup\limits_{\beta\in F}B_\beta)=\bigcup\limits_{\beta\in F}f^{-1}(B_\beta)$；

4° $f^{-1}(\bigcap\limits_{\beta\in F}B_\beta)=\bigcap\limits_{\beta\in F}f^{-1}(B_\beta)$.

设$A\in P(U)$，定义映射χ_A：$U\to\{0,1\}$，

$$A(u)=\begin{cases}1 & \text{当}u\in A\text{；}\\0 & \text{当}u\notin A\text{。}\end{cases}$$

则称χ_A为集A的特征函数.

由定义易知：

$A=B\Longleftrightarrow\chi_A(u)=\chi_B(u)\qquad(\forall u\in U)$，

$$B \subseteq A \Longleftrightarrow \chi_B(u) \leqslant \chi_A(u) \qquad (\forall u \in U),$$

$B \subsetneqq A \Longleftrightarrow \chi_B(u) \leqslant \chi_A(u) \qquad (\forall u \in U$，且$\exists u_0 \in U$，使得$\chi_B(u_0) = 0$，$\chi_A(u_0) = 1)$

$$\chi_{A \cup B}(u) \triangleq \chi_A(u) \vee \chi_B(u)$$

$$\triangleq max\{\chi_A(u),\ \chi_B(u)\} \qquad (\forall u \in U),$$

$$\chi_{A \cap B}(u) \triangleq \chi_A(u) \wedge \chi_B(u)$$

$$\triangleq min\{\chi_A(u),\ \chi_B(u)\} \qquad (\forall u \in U),$$

$$\chi_{A^C}(u) = 1 - \chi_A(u), \ (\forall u \in U),$$

其中“$\triangleq$”表示“定义”，“$\vee$”表示“取大”运算，“$\wedge$”表示“取小”运算.

设X，Y为任意两集，称

$$X \times Y = \{(x,\ y) \mid x \in X,\ y \in Y\}.$$

为X与Y的直积.

类似地，可以定义任给n个集X_1，X_2，…，X_n的直积：

$$X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid x_i \in X_i,\quad 1 \leqslant i \leqslant n\}.$$

一般地，$X \times Y \neq Y \times X$.

对于给定的集X，Y，称任何子集$R \subseteq X \times Y$为X与Y的**关系**。当$(x,\ y) \in R$时，称**x和y为R相关**，记为xRy；否则$(x,\ y) \notin R$，记为$x\bar{R}x$.

设f：$X \to Y$，显然有$\{(x,\ y) \mid y = f(x)\} \subseteq X \times Y$，仍以$f$表示集合，于是映射是关系的特例.

同样，称$X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$的任意子集$R$为$X_1$，$X_2$，…，$X_n$的关系.

设$Y = X$，称$X \times X$的子集R为X上的**二元关系**，同样，称$X \times X \times \cdots \times X$的子集$R$为$X$上的**n元关系**.

若集X上的关系“～”满足下列三个条件时，则称为**等价关系**.

1° **自反律** $\forall x\in X$, 恒有$x\sim x$;

2° **对称律** $\forall x, y\in X$, $x\sim y\Longleftrightarrow y\sim x$;

3° **传递律** 若$x\sim y$且$y\sim z\Longrightarrow x\sim z$。

任意集合X上的集合族$K\subset P(X)$，若满足：

1° 对任意的$A, B\in K\Longrightarrow A=B$或$A\cap B=\Phi$;

2° $\bigcup\limits_{A\in K}A=X$,

则称K为**X的一个划分**.

定理1.2.3. R是X上的等价关系$\Longleftrightarrow$存在X的划分K，使得xRy，当且仅当x，y同属于某个$A\in K$。

当且仅当X与Y有R关系时，称**Y与X有R^{-1}关系**，R^{-1}称为R的**逆关系**。由上述看出关系R与其逆关系是互相唯一确定的。且有$(R^{-1})^{-1}=R$。

设R_1，R_2为关系，则

$$\{(x, y)\mid 对某个z，有xR_1z，zR_2y\}$$

称为**R_1关系与R_2关系的合成**，记作$R_2\circ R_1$。

定理1.2.4. 设R_1，R_2是集X上的两个关系，则

$$(R_1\circ R_2)^{-1}=R_2^{-1}\circ R_1^{-1}.$$

定理1.2.5. 设R_1，R_2，R_3是X上的三个关系，则结合律成立。即

$$R_1\circ(R_2\circ R_3)=(R_1\circ R_2)\circ R_3.$$

§1.3 序与格

从数的大小、集合的包含等关系中自然可以抽象出序的概念。

设"$\leqslant$"是U上的关系，且满足条件：

1° **自反律** $\forall u\in U$，都有$u\leqslant u$;

2° **反对称律** $u \leqslant v$且$v \leqslant u \Longrightarrow u=v$;

3° **传递律** $u \leqslant v$且$v \leqslant w \Longrightarrow u \leqslant w$;

称"$\leqslant$"是U上的**序关系或偏序关系**，而称$(U, \leqslant)$为**偏序集或半序集**.

若$(U, \leqslant)$是偏序集，且对任意的$u, v \in U$，必有$u \leqslant v$或$v \leqslant u$，则称$(U, \leqslant)$为**全序集**. 这时，$\leqslant$为U上的全序.

例1 设N是全体自然数集，"$\leqslant$"为两个整数间的整除关系，即$m \leqslant n \Longleftrightarrow m \mid n$，则$(N, \leqslant)$是偏序集. 但它并非全序集.

例2 平面上二点$\alpha_1=(x_1, y_1)$，$\alpha_2=(x_2, y_2)$间的序关系规定为

当$x_1^2+y_1^2<x_2^2+y_2^2$时$\alpha_1 \leqslant \alpha_2$,

当$x_1^2+y_1^2=x_2^2+y_2^2$，$x_1<x_2$时，$\alpha_1 \leqslant \alpha_2$,

当$x_1^2+y_1^2=x_2^2+y_2^2$，$x_1=x_2$，$y_1<y_2$时，$\alpha_1 \leqslant \alpha_2$.

则$\leqslant$关系是平面集的序关系，按$\leqslant$关系平面点集是偏序集. 读者易知它也是全序集.

例3 在$P(U)$中，令$A \leqslant B \Longleftrightarrow A \subseteq B$，则$(P(U), \subseteq)$是偏序集. 但它不是全序集.

显然任二子集间不一定有序关系.

例4 R是一切实数的集，"$\leqslant$"表示实数间小于或等于关系，则$(R, \leqslant)$是偏序集，且是全序集.

设$(U, \leqslant)$是偏序集，若$\exists a \in U$，且$\forall u \in U$，都有$u \leqslant a$，则a为U的**最大元**；设$c \in U$，若$\forall u \in U$；$c \leqslant u \Longrightarrow c=u$，则称$c$为$U$的**极大元**. 类似地可定义最小元与极小元.

显然，最大(小)元必是极大(小)元，但极大(小)元不一定是最大(小)元. 若U有最大(小)元存在，则必唯一. 然而，U中可能有多个极大(小)元.

对于任意集U，$(P(U), \subseteq)$是半序集，Φ是最小元，U是最大元.

在例2中，设$A=\left\{\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right) \middle| n, m\text{为自然数}\right\}$，则$(1,1)$为$A$的最大元，$A$无最小元.

设$(U, \leqslant)$是偏序集，$A\subseteq U$，若$\exists a\in U$，使得对任意$u\in A$，都有$u\leqslant a$，则称a为A(在U中)的**上界**. 若在上界中存在a_0，使得a_0小于或等于A的所有上界，则称a_0为A的**上确界**，记为$a_0=\sup A$. 对偶地可以定义**下界**与**下确界**，A的下确界记为$\inf A$。

大家熟知，实数集的任何有界子集必有上、下确界.

在例2中，设$A=\left\{\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right) \middle| n, m\text{为自然数}\right\}$，则$(0, 0)$为$A$的下确界.

设在非空集L上定义了二元运算"$\vee$"、"$\wedge$"，若满足如下性质，则称$(L, \wedge, \vee)$为**格**：

L_1　幂等律　$\alpha\vee\alpha=\alpha$，$\alpha\wedge\alpha=\alpha$；

L_2　交换律　$\alpha\vee\beta=\beta\vee\alpha$，$\alpha\wedge\beta=\beta\wedge\alpha$；

L_3　结合律　$\alpha\vee(\beta\vee\gamma)=(\alpha\vee\beta)\vee\gamma$，

$\alpha\wedge(\beta\wedge\gamma)=(\alpha\wedge\beta)\wedge\gamma$；

L_4　吸收律　$(\alpha\wedge\beta)\vee\alpha=\alpha$，$(\alpha\vee\beta)\wedge\alpha=\alpha$。

有时，也将格$(L, \wedge, \vee)$记为L。

例5　对任意集合U，$P(U)$按集合的"并"与"交"运算构成格。

例6　自然数集N，对于求最大公约与最小公倍数的运算亦构成格。

显然全序集必定是格。

定理1.3.1. 若L是格，定义$a\leqslant b \Longleftrightarrow a\wedge b=b$，则$(L,$

$\leqslant$)是偏序集，且$\sup\{a, b\}=a\vee b$，$\inf\{a, b\}=a\wedge b$。

反之，若$(L, \leqslant)$是偏序集，对任一对元a，b，$\sup\{a, b\}$，$\inf\{a, b\}$均存在，定义

$$a\vee b=\sup\{a, b\}, \quad a\wedge b=\inf\{a, b\},$$

则$(L, \vee, \wedge)$是一个格。

证明 设$(L, \wedge, \vee)$是格，在L上定义关系"$\leqslant$"是对于$\forall a, b\in L$，$a\leqslant b\Longleftrightarrow a\vee b=b$。因为

1° $a\vee a=a\Longrightarrow a\leqslant a$，即"$\leqslant$"是自反的；

2° $a\leqslant b$且$b\leqslant a\Longrightarrow b=a\vee b=b\vee a=a$，即"$\leqslant$"是反对称的；

3° $a\leqslant b$且$b\leqslant c\Longrightarrow a\vee b=b$，$b\vee c=c\Longrightarrow a\vee c=a\vee(b\vee c)=(a\vee b)\vee c=b\vee c=c\Longrightarrow a\leqslant c$，即"$\leqslant$"是传递的。

故$(L, \leqslant)$是偏序集。

任取a，$b\in L$，因$a\vee(a\vee b)=(a\vee a)\vee b=a\vee b$，故$a\vee b$是$\{a, b\}$的上界，同理$a\wedge b$是$\{a, b\}$的下界。

设另有c是$\{a, b\}$的任一上界，则$a\vee c=b\vee c=c$，而

$$(a\vee b)\vee c=a\vee(b\vee c)=a\vee c=c.$$

即$a\vee b\leqslant c$。故$a\vee b=\sup\{a, b\}$。

类似可知

$$a\wedge b=\inf\{a, b\}.$$

设$(L, \leqslant)$是偏序集，在L上定义了二元运算$\vee$，$\wedge$，且$\forall a, b\in L$，规定其运算为：$a\vee b\triangleq\sup\{a, b\}$，$a\wedge b\triangleq\inf\{a,b\}$，则

1° $a\vee b=\sup\{a, b\}=\sup\{b, a\}=b\vee a$，同理$a\wedge b=b\wedge a$。（交换律）；

2° $a\vee a=\sup\{a, a\}=a$，$a\wedge a=\inf\{a, a\}=a$（幂等律）；