http://www.phei.com.cn

通信网络精品图书

吉林大学优秀研究生教材建设项目

# 谱估计与自适应信号处理教程

赵晓晖　编著


電子工業出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY

吉林大学优秀研究生教材建设项目

通信网络精品图书

# 谱估计与自适应信号处理教程

赵晓晖　编著



電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京·BEIJING

## 内 容 简 介

本书较全面和系统地介绍和论述了信号处理理论中两类重要的随机信号处理基本方法的原理，即功率谱估计和自适应信号处理理论，它们都是统计信号处理的重要组成部分。其中功率谱估计是目前为止一种对随机信号进行深入分析和信号特征提取的有效且常用的方法，自适应滤波理论是随机信号中噪声消除的重要手段之一，它们都是后续有关空时信号处理的基础。同时，这两种理论之间还有着深刻的联系，它们都已经成功地应用于通信、雷达、声呐、自动控制、地震、电子工程和生物医学工程中，其应用领域还在不断拓展，理论还在不断发展和完善。本书主要内容包括信号处理中的矩阵代数理论，概率、统计与参数估计理论基础，功率谱估计的经典方法，功率谱估计的参数模型方法，线谱估计方法，维纳滤波器，自适应滤波器。

本书既可作为通信工程、信息工程、电子工程、自动控制、生物医学工程和电子科学与技术等相关专业的硕士研究生和高年级本科生的教材和教学参考书，也可供从事信号处理方面研究工作和工程技术开发的广大科技人员参考。



**图书在版编目（CIP）数据**

谱估计与自适应信号处理教程 / 赵晓晖编著. —北京：电子工业出版社，2013.9
（通信网络精品图书）
ISBN 978-7-121-21534-6

Ⅰ. ①谱…　Ⅱ. ①赵…　Ⅲ. ①谱估计—高等学校—教材②自适应控制—信号处理—高等学校—教材　Ⅳ. ①TN911.23②TN911.7

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2013）第 224628 号

策划编辑：宋　梅
责任编辑：宋　梅
印　　刷：三河市鑫金马印装有限公司
装　　订：三河市鑫金马印装有限公司
出版发行：电子工业出版社
　　　　　北京市海淀区万寿路 173 信箱　邮编　100036
开　　本：787×1 092　1/16　印张：13.75　字数：352 千字
印　　次：2013 年 9 月第 1 次印刷
印　　数：3 000 册　　定价：39.00 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系，联系及邮购电话：（010）88254888。

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn，盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

服务热线：（010）88258888。

# 前　言

本书介绍了用于分析和处理实际问题过程中随机信号的谱估计与自适应信号处理理论。它们是在传统的数字信号处理理论的基础上发展起来的针对随机信号进行数字处理的一类方法，同属于现代信号处理理论的一部分。它们主要基于概率和数理统计理论、优化估计理论、线性代数和矩阵理论等数学工具对离散时间随机过程进行有针对性的研究。

对于随机信号处理的问题，不管问题有多么复杂，不管问题产生自什么具体的场合，我们可以粗略地把它们分成两类：一类是信号的特征提取，另外一类就是信号中的噪声消除。围绕着这两类问题，根据不同的实际问题和具体应用产生了数不清的信号处理算法和系统。对于第一类问题的典型应用有：雷达和声呐对目标进行探测和分类、语音识别和说话人证实、认知无线电中的频谱感知、无线通信系统的信道识别、机械设备的故障诊断、生物医学信号中的特征提取等；对于第二类问题的典型应用有：通信系统中噪声和干扰的消除（信道均衡、回波抵消）、机械系统的主动噪声控制、语音或图像增强、雷达或声呐信号中的杂波消除等。这就给我们提出了具有挑战性的问题，即如何利用数学手段和工具，结合具体的信号处理问题来研究和设计完成能实现我们要求的信号处理算法或系统。

本书是一本为相关专业硕士研究生和高年级本科生撰写的入门教材，计划授课40 学时。考虑到学生已经掌握了高等数学、线性代数和数理统计、工程数学、信号与系统、数字信号处理和信息论的基本理论，尽量使本书在内容、表达方式、符号的一致性、习题的安排上自成体系，具有相对合理而完善的逻辑结构和循序渐进的讲授方式，特别注意了教材阐述问题的系统性，避免不必要的重复。

本书主要基于对高等院校相关专业研究生和高年级本科生在其培养过程中对功率谱估计和自适应信号处理理论的需求以及和他们掌握该理论的重要性，考虑众多科研人员与工程技术人员对相关理论学习的迫切需要，结合作者多年的教学经验和体会编写而成。本书已被列为吉林大学研究生精品教材，它的前身在吉林大学相关专业的教学中应用了多年，在进行基本理论和基本方法的介绍的同时，注重培养学生自学能力，强化培养他们在信号处理问题中的数学分析能力。

本书在内容选取上注意吸取国内外有关教材的主要精髓，考虑到国内研究生不断提高的教学要求和尽快使国内相关研究生教材与国外研究生的优秀教材逐渐接轨的目标，把功率谱估计和自适应信号处理理论中基础的内容和方法纳入到本教程

中。本书特别注重对学生数学推导能力的培养，希望通过本课程的学习，为他们在今后的研究工作中能灵活应用数学工具来解决信号处理问题打下一个比较坚实的基础。

全书共 7 章，主要内容包括信号处理中的矩阵代数理论，概率、统计与参数估计理论基础，功率谱估计的经典方法，功率谱估计的参数模型方法，线谱估计方法，维纳滤波器，自适应滤波器。每章后面都附有相关的习题作为学生巩固所学内容和研读其他参考文献拓展理论基础的补充，有些习题需要利用 MATLAB 仿真语言来实现。本书的组织结构如下：为了使读者更方便地使用本教材，在前两章中重点回顾本书在统计信号处理中应用到的矩阵代数理论、概率、统计和估计理论的一些重要结论和性质，希望使读者在学习和阅读时能够基本了解本书所利用的重要数学知识。由于篇幅所限，本书没有给出完整的相关结果的数学证明。第 3 章到第 5 章，分层次阐述功率谱估计的主要内容，从经典的功率谱估计方法、参数化的现代功率谱估计方法到线谱估计理论。特别把重要的理论分析和必要的谱估计方法的介绍过程作为培养学生数学推导能力的环节，并阐述这些方法之间的内在相互联系。第 6 章介绍最优滤波器的基础，以维纳滤波器作为重点，阐述最优滤波的概念和最基本的优化方法。第 7 章涵盖自适应滤波理论的主要内容，重点介绍最小均方自适应滤波器和最小二乘自适应滤波器，同时讨论由这两种滤波器派生出来的自适应滤波算法。本章还介绍了两种格型自适应滤波器，阐述了现代谱估计理论和线性预测器理论同自适应滤波器的内在联系。特别注重自适应滤波器的收敛性分析。最后介绍卡尔曼滤波理论的基础，阐述卡尔曼滤波器和递推最小二乘自适应滤波器的关系。

在本书的编写过程中，笔者主要参考了目前国内外出版的有关教材，从中整理和吸取了相关内容，在多年使用的讲义的基础上反复修改，力求简明扼要，并采纳了使用该讲义的硕士研究生们的建设性建议。在此，向这些著作的作者们表示衷心的感谢！没有他们开创性的工作，就没有本书的成功出版。还要感谢那些研究生们，是他们的鼓励和鞭策，才使这本书更加明确了读者对象，使教与学更加趋于统一。

感谢吉林大学研究生系列精品课程教材建设基金对这本教材的资助。

由于作者的水平有限，书中会存在不妥之处和疏漏，希望读者原谅并给予批评指正。

赵晓晖

吉林大学

2013 年 8 月于长春

# 反侵权盗版声明

电子工业出版社依法对本作品享有专有出版权。任何未经权利人书面许可，复制、销售或通过信息网络传播本作品的行为；歪曲、篡改、剽窃本作品的行为，均违反《中华人民共和国著作权法》，其行为人应承担相应的民事责任和行政责任，构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。

为了维护市场秩序，保护权利人的合法权益，我社将依法查处和打击侵权盗版的单位和个人。欢迎社会各界人士积极举报侵权盗版行为，本社将奖励举报有功人员，并保证举报人的信息不被泄露。

举报电话：（010）88254396；（010）88258888

传　　真：（010）88254397

E-mail：　dbqq@phei.com.cn

通信地址：北京市万寿路 173 信箱

　　　　　电子工业出版社总编办公室

邮　　编：100036

# 目　录

# 第 1 章　信号处理中的矩阵代数理论

在现代信号处理理论中，会出现各种矩阵运算和方程组求解的问题。因此，可以说现代信号处理的数学基础是建立在矩阵代数理论之上的，在后续的章节中读者会发现这一事实。本章主要概括性地回顾与本课程相关的线性代数和矩阵理论的一些重要结果，这些结果都是后续章节中所涉及和不可缺少的数学分析工具。在下面的内容介绍中，假定读者已经对基本的有关理论有所了解和掌握。但是，对于不同背景的读者，究竟哪些内容应该引入到本章中，并没有进行具有针对性的严格筛选，主要考虑和依据本科线性代数课程中介绍的主要内容和这本教材的使用范围，再加上篇幅所限，那些比较基础的、作者认为读者可能已经了解的有关理论和结果就不在本章中重新一一介绍了。另外，在这里提到的所有结果都不给出相应的证明，如果读者感兴趣，可以查阅相关书籍。

## 1.1 矩　阵

### 1.1.1　特殊结构矩阵

**定义 1.1.1**　设 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}^{n\times n}$，如满足 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{A}$，则 $\boldsymbol{A}$ 为共轭对称矩阵，也称为赫米特（Hermitian）矩阵；满足条件 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}=-\boldsymbol{A}$ 的矩阵为反赫米特矩阵。

**赫米特矩阵具有以下性质：**

① 对所有 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}^{n\times n}$，矩阵 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}$、$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}$ 和 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}$ 均是赫米特矩阵。

② 若 $\boldsymbol{A}$ 是赫米特矩阵，则 $\boldsymbol{A}^k$ 对所有 $k=1,2,3,\cdots$ 都是赫米特矩阵；若 $\boldsymbol{A}$ 还是非奇异的，则 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 是赫米特矩阵。

③ 若 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 是赫米特矩阵，则 $\alpha\boldsymbol{A}+\beta\boldsymbol{B}$ 对所有实数 $\alpha$ 和 $\beta$ 均是赫米特矩阵。

④ 对所有 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}^{n\times n}$，矩阵 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}$ 是反赫米特矩阵。

⑤ 若 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 是反赫米特矩阵，则 $\alpha\boldsymbol{A}+\beta\boldsymbol{B}$ 对所有实数 $\alpha$ 和 $\beta$ 均是反赫米特矩阵。

⑥ 若 $\boldsymbol{A}$ 是赫米特矩阵，则 $\mathrm{j}\boldsymbol{A}\left(\mathrm{j}=\sqrt{-1}\right)$ 是反赫米特矩阵。

⑦ 若 $\boldsymbol{A}$ 是反赫米特矩阵，则 $\mathrm{j}\boldsymbol{A}$ 是赫米特矩阵。

**定义 1.1.2**　设 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}^{m\times n}$，矩阵

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1}\end{bmatrix} \tag{1.1.1}$$

为范德蒙德（Vandermonde）矩阵，式中，第 $j$ 列是公比为 $a_j$ 的等比序列，$j=1,2,\cdots,n$。该矩阵的转置也称为范德蒙德矩阵。其行列式

$$\det(A)=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}\left(a_j-a_i\right)\equiv\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=i+1}^{n}\left(a_j-a_i\right) \tag{1.1.2}$$

显然，若 $a_i\neq a_j,\forall i\neq j$，则 $\det\left(A\right)\neq 0$，即范德蒙德矩阵非奇异。

在信号处理问题中，有时要求范德蒙德矩阵的逆矩阵。范德蒙德矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵中的第 $i$ 第 $j$ 元素可以表示为

$$A^{-1}\left(i,j\right)=\left(-1\right)^{i+j}\frac{\sigma_{n-i}\left(a_1,\cdots,a_{j-1},a_{j+1},\cdots,a_n\right)}{\prod_{k=1}^{j-1}\left(a_j-a_k\right)\prod_{k=j+1}^{n}\left(a_k-a_j\right)}\quad i,j=1,2,\cdots,n \tag{1.1.3}$$

式中，

$$\left.\begin{aligned}\sigma_0\left(a_1,a_2,\cdots,a_n\right)&=1\\ \sigma_1\left(a_1,a_2,\cdots,a_n\right)&=a_1+a_2+\cdots+a_n\\ \sigma_2\left(a_1,a_2,\cdots,a_n\right)&=a_1a_2+\cdots+a_1a_n+a_2a_3+\cdots+a_2a_n+\cdots+a_{n-1}a_n\\ &\cdots\\ \sigma_n\left(a_1,a_2,\cdots,a_n\right)&=a_1a_2\cdots a_n\end{aligned}\right\} \tag{1.1.4}$$

所以，可以根据范德蒙德矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的元素直接计算逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$。

**定义 1.1.3**　设 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}^{(n+1)\times(n+1)}$，由元素 $a_0,a_1,\cdots,a_{2n}$ 排成

$$A=\begin{bmatrix}a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n+1}\\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_{n+2}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_n & a_{n+1} & a_{n+2} & \cdots & a_{2n}\end{bmatrix} \tag{1.1.5}$$

为汉克尔（Hankel）矩阵，式中，$a_{ij}=a_{i+j-2}\left(i,j=1,2,\cdots,n\right)$。它是对称矩阵，完全由其第 1 行和第 $n+1$ 行的 $2n+1$ 个元素确定。

**定理 1.1.1**　非奇异矩阵 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 为汉克尔矩阵的充分必要条件是存在 $n\times n$ 阶矩阵

$$C=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1\\ c_0 & c_1 & \cdots & c_{n-2} & c_{n-1}\end{bmatrix} \tag{1.1.6}$$

使 $CA = AC^{\mathrm{T}}$。

**定义 1.1.4**　设 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$，由元素 $a_{-n+1}, a_{-n+2}, \cdots a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}$ 排成

$$A = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{-1} & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ a_{-2} & a_{-1} & a_0 & \cdots & a_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{-n+1} & a_{-n+2} & a_{-n+3} & \cdots & a_0 \end{bmatrix} \tag{1.1.7}$$

为托普利兹（Toeplitz）矩阵，其中，$a_{ij} = a_{j-i}\left(i, j = 1, 2, \cdots, n\right)$，它完全由其第 1 行和第 1 列的 $2n-1$ 个元素确定。托普利兹矩阵沿平行主对角线的每一对角线上的元素是相等的，是关于交叉对角线对称的。显然，$JA^{\mathrm{T}}J = A$，其中 $J$ 为反向单位矩阵。

简单的托普利兹矩阵有

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n},\ B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n} \tag{1.1.8}$$

因为它们作用于同维向量或矩阵时所产生的移位效果，又称为前向移位矩阵（Forward Shift Matrix）和后向移位矩阵（Backward Shift Matrix）。

**定理 1.1.2**　$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 为托普利兹矩阵的充分必要条件是

$$A = \sum_{k=1}^{n-1} a_{-k} B^k + \sum_{k=0}^{n-1} a_k F^k \tag{1.1.9}$$

式中，$F$ 和 $B$ 由式（1.1.8）给出。

**定理 1.1.3**　非奇异矩阵 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 为托普利兹矩阵的充分必要条件是存在 $n\times n$ 阶矩阵

$$C^{(1)} = \begin{bmatrix} c_{n-1} & c_{n-2} & \cdots & c_1 & c_0 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{1.1.10}$$

$$C^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & c_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & c_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & c_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & c_{n-1} \end{bmatrix} \tag{1.1.11}$$

使 $C^{(1)}A = AC^{(2)}$。

**定理 1.1.4**　若 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 是汉克尔矩阵，则 $JA$ 和 $AJ$ 是托普利兹矩阵；若

$A\in\mathbb{C}^{n\times n}$是托普利兹矩阵，则$\boldsymbol{JA}$和$\mathbf{AJ}$是汉克尔矩阵。式中$\boldsymbol{J}$是反向单位矩阵。

**定义 1.1.5** $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$，如果满足条件$\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}$，则称$\boldsymbol{A}$为正规矩阵；如果满足条件$\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{I}$，则称$\boldsymbol{A}$为酉矩阵；如果满足条件$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{I}$，则称$\boldsymbol{A}$为正交矩阵。

**定理 1.1.5** $n\times n$矩阵$\boldsymbol{A}$互换任意$p,q$两行（或列）得到的矩阵$\boldsymbol{A}_{(p,q)}$的行列式与原矩阵$\boldsymbol{A}$的行列式存在关系

$$\det\left(A_{(p,q)}\right)=-\det\left(A\right),\ \forall p\neq q \tag{1.1.12}$$

### 1.1.2 三角矩阵

三角矩阵是矩阵分解和方程组求解中的重要形式之一。满足条件$u_{ij}=0,i>j$的正方矩阵$\boldsymbol{U}=\left[u_{ij}\right]$称为上三角矩阵（Upper Triangular Matrix），其一般形式为

$$\boldsymbol{U}=\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix} \tag{1.1.13}$$

满足条件$l_{ij}=0,j>i$的正方矩阵$\boldsymbol{L}=\left[l_{ij}\right]$称为下三角矩阵（Lower Triangular Matrix），其一般形式为

$$\boldsymbol{L}=\begin{bmatrix} l_{11} & \cdots & \cdots & 0 \\ l_{12} & l_{22} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix} \tag{1.1.14}$$

（1）上三角矩阵的性质

① 上三角矩阵之积为上三角矩阵，即若$\boldsymbol{U}_1,\boldsymbol{U}_2,\cdots,\boldsymbol{U}_k$各为上三角矩阵，则$\boldsymbol{U}=\boldsymbol{U}_1\boldsymbol{U}_2\cdots\boldsymbol{U}_k$为上三角矩阵。

② 上三角矩阵$\boldsymbol{U}=\left[u_{ij}\right]$的行列式等于对角线元素之积，即

$$\det\left(U\right)=u_{11}u_{22}\cdots u_{nn}=\prod_{i=1}^{n}u_{ii} \tag{1.1.15}$$

③ 上三角矩阵的逆为下三角矩阵。

④ 上三角矩阵$\boldsymbol{U}$的$k$次幂$\boldsymbol{U}^k$仍为上三角矩阵，并且其第$i$个对角线元素等于$u_{ii}^k$。

⑤ 上三角矩阵$\boldsymbol{U}=\left[u_{ij}\right]$的特征值为$u_{11},u_{22},\cdots,u_{nn}$。

⑥ 正定赫米特矩阵$\boldsymbol{A}$可以分解为$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{T}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{DT}$，其中，$\boldsymbol{T}$为单位上三角复矩阵，$\boldsymbol{D}$为实对角矩阵。

（2）下三角矩阵的性质

① 下三角矩阵之积为下三角矩阵，即若 $\boldsymbol{L}_1,\boldsymbol{L}_2,\cdots,\boldsymbol{L}_k$ 各为下三角矩阵，则 $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{L}_2\cdots\boldsymbol{L}_k$ 为下三角矩阵。

② 下三角矩阵的行列式等于对角线元素之积，即

$$\det(\boldsymbol{L})=l_{11}l_{22}\cdots l_{nn}=\prod_{i=1}^{n}l_{ii} \tag{1.1.16}$$

③ 下三角矩阵的逆矩阵为上三角矩阵。

④ 下三角矩阵 $\boldsymbol{L}_{n\times n}$ 的 $k$ 次幂 $\boldsymbol{L}^k$ 仍为下三角矩阵，且第 $i$ 个对角线元素等于 $l_{ii}^k$。

⑤ 下三角矩阵 $\boldsymbol{L}_{n\times n}$ 的特征值为 $l_{11},l_{22},\cdots,l_{nn}$。

⑥ 一个正定方矩阵 $\boldsymbol{A}$ 能够分解为下三角矩阵 $\boldsymbol{L}$ 与其转置之积，即 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{L}\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}$，这一分解称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的乔来斯基（Cholesky）分解。

有时称满足 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{L}\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}$ 的下三角矩阵 $\boldsymbol{L}$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的平方根。更一般地，满足

$$\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{A} \tag{1.1.17}$$

的任何矩阵 $\boldsymbol{B}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的平方根，记作 $\boldsymbol{A}^{1/2}$。需要注意的是，一个方矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的平方根不一定唯一。

### 1.1.3　正交矩阵与酉矩阵

向量 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots\boldsymbol{x}_k\in\mathbb{C}^n$ 组成一正交组，若 $\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{H}}\boldsymbol{x}_j=0,1\leqslant i<j\leqslant k$。此外，若向量还是归一化的，即 $\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{H}}\boldsymbol{x}_i=1,i=1,2,\cdots,k$，则称该正交组称为标准正交组。

**定理 1.1.6**　一组正交的非零向量是线性无关的。

**定义 1.1.6**　一实正方矩阵 $\boldsymbol{Q}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 称为正交矩阵，若

$$\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}=\mathbf{I} \tag{1.1.18}$$

一复正方矩阵 $\boldsymbol{U}\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 称为酉矩阵，若

$$\boldsymbol{U}\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{U}=\boldsymbol{I} \tag{1.1.19}$$

实矩阵 $\boldsymbol{Q}_{m\times n}$ 称为半正交矩阵（Semi-orthogonal Matrix），若它只满足 $\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{I}_m$ 或者 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{I}_n$。类似地，复矩阵 $\boldsymbol{U}_{m\times n}$ 称为仿酉矩阵（Para-unitrary Matrix），若它只满足 $\boldsymbol{U}\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{I}_m$ 或者 $\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{U}=\boldsymbol{I}_n$。

在有些文献中，半正交矩阵被称为标准正交矩阵（Orthonormal Matrix）。由于正交矩阵事实上就是实的酉矩阵，所以下面只讨论酉矩阵。

**定理 1.1.7**　（酉矩阵的性质）若 $\boldsymbol{U}\in\mathbb{C}^{n\times n}$，则下列事实等价：

① $\boldsymbol{U}$ 是酉矩阵；

② $\boldsymbol{U}$ 是非奇异的，并且 $\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{U}^{-1}$；

③ $\boldsymbol{U}\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{U}=\boldsymbol{I}$；

④ $\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}$ 是酉矩阵；

⑤ $U=[u_1,u_2,\cdots,u_n]$的列组成标准正交组，即$u_i^{\mathrm{H}}u_j=\delta(i-j)=\begin{cases}1, & i=j\\0, & i\neq j\end{cases}$。

⑥ $U$的行组成标准正交组；

⑦ 对所有$x\in\mathbb{C}^n$而言，$y=Ux$的 Euclidean 长度与$x$的 Euclidean 长度相同，即$y^{\mathrm{H}}y=x^{\mathrm{H}}x$。

若线性变换矩阵$A$为酉矩阵，则线性变换$Ax$称为酉变换。酉变换具有以下性质。

① 向量内积在酉变换下是不变的，即$\langle x,y\rangle=\langle Ax,Ay\rangle$。

② 向量范数在酉变换下是不变的，即$\|Ax\|^2=\|x\|^2$。

③ 两个向量的夹角在酉变换下也是不变的，即$\cos\theta=\dfrac{\langle Ax,Ay\rangle^2}{\|Ax\|\|Ay\|}=\dfrac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\|y\|}$。

**定义 1.1.7** 一个满足$B=U^{\mathrm{H}}AU$的矩阵$B\in\mathbb{C}^{n\times n}$被称为是$A\in\mathbb{C}^{n\times n}$酉等价的。如果$U$取实数（因而是实正交的），则称$B$是与$A$正交等价的。

**定理 1.1.8** 若$n\times n$矩阵$A=[a_{ij}]$和$B=[b_{ij}]$是酉等价的，则

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|b_{ij}|^2=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2 \tag{1.1.20}$$

该定理说明$\mathrm{tr}(A^{\mathrm{H}}A)$是酉相似不变量，即若$A$和$B$酉等价，有$\mathrm{tr}(A^{\mathrm{H}}A)=\mathrm{tr}(B^{\mathrm{H}}B)$。

**定义 1.1.8** $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$，若$A^{\mathrm{H}}A=AA^{\mathrm{H}}$矩阵，称其为正规矩阵（Normal Matrix）。

**定理 1.1.9** 矩阵$A\in\mathbb{C}^{n\times n}$是正规矩阵，当且仅当存在$n\times n$维酉矩阵$U$，使

$$U^HAU=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n) \tag{1.1.21}$$

容易证明，赫米特矩阵、斜赫米特矩阵和酉矩阵都属于正规矩阵。

酉矩阵的重要性质如下：

① 若$A$为酉矩阵，$A$的列是标准正交的向量；$A$的行是标准正交的向量。

② 若$A$为酉矩阵，$A^{\mathrm{T}}$为酉矩阵；$A^{\mathrm{H}}$为酉矩阵；$A^*$为酉矩阵；$A^{-1}$为酉矩阵；$A^i$为酉矩阵，$i=1,2,\cdots$；$AA^{\mathrm{H}}=A^{\mathrm{H}}A=I$。

③ 若$A_{m\times m}$为实酉矩阵，$A$为正交矩阵。

④ 若$A$和$B$为酉矩阵，$AB$为酉矩阵。

⑤ 若$A$为酉矩阵，则$\det(A)$的绝对值等于 1，$\mathrm{rank}(A)=m$，$A$是正规矩阵（$AA^{\mathrm{H}}=A^{\mathrm{H}}A$），$A$的特征值的绝对值为 1。

⑥ 若$A_{m\times m}$，$B_{n\times n}$为酉矩阵，则$A\oplus B$为酉矩阵，$A\otimes B$为酉矩阵。

### 1.1.4　特殊矩阵的逆

**定理 1.1.10**　设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 $n\times n$ 的可逆矩阵，且 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 是两个 $n\times 1$ 向量。若 $\left(\boldsymbol{A}+b\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^{\mathrm{H}}\right)$ 可逆，则

$$\left(\boldsymbol{A}+b\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^{\mathrm{H}}\right)^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}-\frac{b\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{-1}}{1+\boldsymbol{y}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x}} \tag{1.1.22}$$

上式可推广为矩阵求逆公式

$$\left(\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{U}\boldsymbol{B}\boldsymbol{V}\right)^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}\mp\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{U}\boldsymbol{B}\boldsymbol{V}\boldsymbol{A}^{-1}\left(\boldsymbol{I}\pm\boldsymbol{U}\boldsymbol{B}\boldsymbol{V}\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{-1} \tag{1.1.23}$$

几种重要的分块矩阵的求逆公式如下所述。

① 当矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆时，有

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{U}\\ \boldsymbol{V} & \boldsymbol{D}\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{U}\left(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{V}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{U}\right)^{-1}\boldsymbol{V}\boldsymbol{A}^{-1} & -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{U}\left(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{V}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{U}\right)^{-1}\\ -\left(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{V}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{U}\right)^{-1}\boldsymbol{V}\boldsymbol{A}^{-1} & \left(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{V}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{U}\right)^{-1}\end{bmatrix} \tag{1.1.24}$$

② 当矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{D}$ 都可逆时，分别有

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{U}\\ \boldsymbol{V} & \boldsymbol{D}\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\left(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{U}\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{V}\right)^{-1} & -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{U}\left(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{V}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{U}\right)^{-1}\\ -\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{V}\left(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{U}\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{V}\right)^{-1} & \left(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{V}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{U}\right)^{-1}\end{bmatrix} \tag{1.1.25}$$

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{U}\\ \boldsymbol{V} & \boldsymbol{D}\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\left(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{U}\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{V}\right)^{-1} & -\left(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{U}\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{V}\right)\boldsymbol{U}\boldsymbol{D}^{-1}\\ -\left(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{V}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{U}\right)^{-1}\boldsymbol{V}\boldsymbol{A}^{-1} & \left(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{V}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{U}\right)^{-1}\end{bmatrix} \tag{1.1.26}$$

③ 当矩阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{U}$ 和 $\boldsymbol{V}$ 都可逆时，有

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{U}\\ \boldsymbol{V} & \boldsymbol{D}\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\left(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{U}\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{V}\right)^{-1} & -\left(\boldsymbol{V}-\boldsymbol{D}\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{A}\right)^{-1}\\ \left(\boldsymbol{U}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{D}\right)^{-1} & \left(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{V}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{U}\right)^{-1}\end{bmatrix} \tag{1.1.27}$$

④ 假定对角线或者交叉对角线上的矩阵是可逆的，分块三角矩阵的求逆公式为

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{C}\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{0}\\ -\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{C}^{-1}\end{bmatrix} \tag{1.1.28}$$

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{0} & \boldsymbol{C}^{-1}\\ \boldsymbol{B}^{-1} & -\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}^{-1}\end{bmatrix} \tag{1.1.29}$$

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{C}\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}^{-1} & -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}^{-1}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{C}^{-1}\end{bmatrix} \tag{1.1.30}$$

⑤ 令零均值的随机向量 $\boldsymbol{x}=\left[x_1,\cdots,x_n\right]^{\mathrm{T}}$ 的方差-协方差矩阵为 $\boldsymbol{V}=\mathrm{E}\left[\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\right]$，则可